

Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана

На правах рукописи

ЧАН КИ АН

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РАСЧЕТА
БЕЗМОМЕНТНЫХ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ
С НЕСИММЕТРИЧНО УЛОЖЕННЫМИ НИТЯМИ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:

доктор технических наук, доцент

СОРОКИН Ф.Д.

Москва 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Введение	6
Глава 1. Анализ работ по механике сетчатых оболочек	12
1.1. Проблемы исследования мягких оболочек	12
1.2. Проблемы композитных оболочек.....	15
1.3. Мягкая сетчатая оболочка	17
1.4. Применение сетчатых оболочек в изготовлении пневмоамортизаторов и муфт.....	23
1.5. Возможность применения сетчатых оболочек в устройствах управляемой упругой деформации (УУД).....	25
Глава 2. Равновесные конфигурации сетчатых оболочек вращения с несимметричной укладкой нитей	29
2.1. Соотношение между мембранными силами.....	29
2.2. Построение профиля оболочки при несимметричной геодезической намотке.....	33
2.3. Натяжение нитей при несимметричной укладке.....	37
2.4. Пример расчета напряженно – деформированного состояния сетчатой оболочки с несимметричной укладкой нитей по геодезическим линиям.....	39
2.5. Контроль полученных соотношений сопоставлением с симметричной укладкой	42
Глава 3. Большие перемещения сетчатых оболочек вращения с несимметрично уложенными нитями при осесимметричном нагружении и устройство преобразования давления в крутящий	

	Стр.
момент.....	47
3.1. Геометрические соотношения сетчатой оболочки с несимметрично уложенными нитями.....	48
3.2. Система дифференциальных уравнений для расчета больших перемещений сетчатых оболочек с несимметрично уложенными нитями	53
3.3. Учет растяжимости нитей	56
3.4. Пример расчета сетчатой оболочки.....	58
3.5. Полный потенциал сетчатой оболочки при осесимметричных деформациях и его минимизация.....	69
3.6. Преобразование внутреннего давления в крутящий момент.....	72
 Глава 4. Большие перемещения сетчатых оболочек произвольной формы с произвольным законом укладки нитей.....	 75
4.1. Полный потенциал сетчатой оболочки вращения с переменными по меридиану и по окружной координате углами наклона нитей	76
4.2. Расчет больших перемещений сетчатых оболочек произвольной формы на основе принципа минимума полного потенциала системы.....	79
4.3. Устройства управляемой упругой деформации (УУД) на основе сетчатых оболочек.....	83
4.4. Вычисление тягового момента оболочки и контроль результатов на основе механики гибких стержней.....	88
4.5. Расчет упругой характеристики упругого элемента	

	Стр.
пневмобаллонной муфты.....	93
Глава 5. Расчет сетчатой оболочки движителя транспортного средства высокой проходимости.....	99
5.1. Описание транспортного средство высокой проходимости с эласто-винтовым движителем.....	99
5.2. Начальное напряженное состояние резинокордной оболочки.....	104
5.3. Учет распределенной нагрузки со стороны грунта.....	109
5.4. Взаимодействие резинокордной оболочки шнекохода с колесами генератора волн.....	111
Выводы и заключение.....	120
Список литературы.....	122
Приложения.....	138

ВВОДИМЫЕ СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

ДУ	Дифференциальное уравнение
КМ	Композиционный материал
МКЭ	Метод конечных элементов
НДС	Напряженно-деформированное состояние
СОНРН	Сетчатая оболочка с несимметричным расположением нитей
УУД	Управляемая упругая деформация
ЭВМ	Электронно-вычислительная машина

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность проблемы. Сетчатые оболочки успешно применяются при конструировании автомобильных шин, баллонов давления, пневмобаллонных муфт, пневмоамортизаторов, оплеток рукавов и других изделий. Кроме того, в данной диссертации предлагается использовать сетчатые оболочки в качестве устройств управляемой упругой деформации и эластичного шнека для транспортного средства высокой проходимости.

Стенка сетчатой оболочки образована семействами перекрещивающихся нитей. Если семейств нитей всего два - левое и правое, то сетка нитей является геометрически изменяемой, так как в основе ее лежит нежесткая фигура - параллелограмм, а сами нити могут свободно изгибаться. Обычно в исходном состоянии сетчатые оболочки осесимметричны. При этом нити левого и правого семейств уложены под одинаковыми углами ($\beta_n = \beta_l$).

Однако симметричная укладка (симметричное армирование) может быть нарушена по ряду причин:

- специальная укладка нитей под разными углами;
- погрешность изготовления;
- изменение углов вследствие приложения осевого крутящего момента;
- неодинаковое изменение углов в процессе работы.

Такие оболочки практически не исследованы, т. е. существует мало изученный класс сетчатых оболочек вращения, в которых углы укладки нитей правого и левого семейств не совпадают ($\beta_n \neq \beta_l$). Кроме того исходная форма срединной поверхности оболочки может даже отличаться от поверхности вращения.

Несимметричная укладка приводит к возникновению новых эффектов в поведении сетчатых оболочек, которые можно использовать в конструировании, например, эффекта закручивания или эффекта изгибания при подаче внутреннего давления. В виду этого разработка методов расчета

сетчатых оболочек с несимметричной укладкой нитей является актуальной задачей.

Целью диссертационной работы является создание методов расчета сетчатых оболочек с несимметричной укладкой нитей и демонстрация целесообразности применения таких оболочек в технике. Для реализации поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Расчет равновесной конфигурации сетчатой оболочки вращения с несимметричной укладкой нитей при осесимметричном нагружении.

2. Расчет больших перемещений сетчатых оболочек вращения с несимметричной укладкой нитей при осесимметричной нагрузке в случае растяжимых и нерастяжимых нитей корда.

3. Расчет больших перемещений сетчатых оболочек произвольной формы с произвольным законом укладки нитей на основе минимизации полного потенциала механической системы.

Методы исследования. В работе использованы методы:

- численное интегрирование систем нелинейных дифференциальных уравнений (задача Коши и нелинейная краевая задача);

- прямая минимизация полного потенциала механической системы, позволяющая избежать построения матрицы жесткости и других атрибутов МКЭ.

Численные алгоритмы реализованы на алгоритмических языках математических пакетов MathWorks Matlab и Wolfram Mathematica с использованием встроенных процедур численного интегрирования дифференциальных уравнений и минимизации функций многих переменных.

Научная новизна. В диссертационной работе исследованы сетчатые оболочки с несимметричной укладкой нитей, многие методы исследования которых предложены впервые. Найдены наборы равновесных конфигурации, выведены формулы для усилий в нитях в случае несимметричной укладкой нитей. Усовершенствован метод интегрирования дифференциальных уравнений сетчатых оболочек в случае несимметричной укладкой нитей.

Предложено новое направление о возможности применения сетчатых оболочек с несимметричной укладкой нитей в устройствах управляемых упругой деформации. Рассмотрено применение сетчатых оболочек в качестве эластичного шнека для транспортного средства высокой проходимости.

Степень достоверности полученных результатов. Достоверность результатов подтверждается сопоставлением результатов диссертации с результатами из работ В.Л. Бидермана и Б.Л. Бухина в частном случае симметричной укладки нитей. А также сравнением результатов расчетов, основанных на различных подходах (интегрировании дифференциальных уравнений и минимизации функционала).

Практическая значимость диссертационной работы заключается в:

- разработке методики расчета и построения равновесных профилей сетчатых оболочек, полученных геодезической намоткой с различными углами укладки нитей левого и правого семейств;
- разработке методики расчета перемещений и мембранных усилий для безмоментных сетчатых оболочек вращения с несимметрично уложенными нитями;
- новых соотношениях, характеризующих «шинную геометрию» при несимметричной укладке нитей;
- разработке методики расчета основанного на прямой минимизации полного потенциала системы, выполняемого с использованием встроенной функции FindMinimum пакета Mathematica;
- разработке и исследовании приводов управляемой упругой деформации на основе сетчатых оболочек с несимметричной укладкой нитей;
- исследовании напряженно-деформированного состояния резинокордного движителя транспортного средства высокой проходимости;

Работа нашла свое применение в учебном процессе кафедры основ конструирования и деталей машин МГТУ им. Н.Э. Баумана, в практике проектирования ООО «СЕГУЛА» и при разработке конструкции эласто-винтового движителя транспортного средства высокой проходимости

совместно с кафедрой многоцелевых гусеничных машин и мобильных роботов МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- на научных конференциях аспирантов кафедры прикладной механики МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, 2010, 2011, 2012г.);

- на V международной конференции «Проблемы механики современных машин» (Улан-Удэ, 2012 г.);

- на Московском ежемесячном семинаре молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения имени Ю.Н. Работнова ИМАШ РАН (Москва, 2012 г.);

- на научном семинаре кафедры прикладной механики МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, 2014 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 5 научных работ, в том числе 4 работы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.

Структура диссертации и аннотация глав.

Диссертация состоит из введения, пяти глав и четырех приложений. Общий объем составляет 146 страниц, 71 рисунок и 2 таблицы. Список используемой литературы содержит 159 наименований.

В первой главе рассмотрены общие положения о состоянии проблемы сетчатых оболочек с несимметричной укладкой нитей; проведен обзор литературных источников, посвященных изучению сетчатых оболочек в различных аспектах.

В второй главе разработана методика расчета и построения равновесных профилей сетчатых оболочек с различными углами укладки нитей левого и правого семейств. Методика сведена к численному интегрированию системы 2-х уравнений с начальными условиями.

Приведены примеры построения равновесных профилей сетчатых оболочек с несимметрично уложенными нитями при различных значениях геометрических параметров, определяемых технологией изготовления.

Во третьей главе разработана методика расчета перемещений и мембранных усилий для безмоментных сетчатых оболочек вращения с несимметрично уложенными нитями. Предложены соотношения, характеризующие «шинную геометрию» при несимметричной укладке нитей. Нелинейная краевая задача для системы 4-х дифференциальных уравнений сетчатой оболочки решена методом пристрелки. Приведены примеры построения равновесных профилей и определения мембранных усилий для рассмотренного класса сетчатых оболочек при различных сочетаниях внешних нагрузок. Предложена методика расчета угла закручивания оболочки. Выполнен контроль результатов на основе прямой минимизации функционала.

В четвертой главе разработана методика расчета больших перемещений сетчатых оболочек произвольной конфигурации с произвольным законом укладки нитей. Показано что, равновесную конфигурацию, к которой стремится оболочка при подаче внутреннего давления, можно находить прямой минимизацией полного потенциала системы. Предложен новый вид приводов на основе сетчатых оболочек с неравновесной исходной конфигурацией. Продемонстрирована возможность применения сетчатых оболочек в качестве приводов управляемой упругой деформации и указаны преимущества таких устройств. Приведен пример цилиндрической сетчатой оболочки, принимающей форму тора при нагружении внутренним давлением, что дает возможность разработки на ее основе захватов и других устройств. Управление величиной жесткости такого устройства сводится к простому изменению давления. Та же методика применяется для построения упругой характеристики пневмобаллонной муфты.

В пятой главе исследуется напряженно – деформированное состояние резинокордной оболочки движителя транспортного средства высокой проходимости, предназначенного для освоения крайнего Севера. Найдено начальное напряженно-деформированное состояние оболочки при нагружении оболочки движителя давлением, изменение этого состояния вследствие воздействия давления снега, а также исследованы локальные нагрузки со стороны колес генератора волн и вызываемые ими перемещения.

В приложения вынесены акты внедрения результатов диссертации и тексты компьютерных программ.

Благодарности. Автор выражает благодарность сотрудникам ФГБОУ ВПО МГТУ им. Н.Э. Баумана (кафедр прикладная механика и основы конструирования и детали машин) и сотрудникам ИМАШ им. А.А.Благоднарова РАН:

- Профессору Ряховскому О.А. за предоставленные материалы по параметрам муфт и внимание к работе;
- Профессору Гаврюшину С.С. за ценные советы, нацеленные на улучшение качества работы.

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ РАБОТ ПО МЕХАНИКЕ СЕЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК

1.1. Проблемы исследования мягких оболочек

Мягкими называют оболочки, которые вследствие весьма малой толщины стенки всегда испытывают только безмоментное напряженное состояние и не могут воспринимать сжимающих напряжений. В последние десятилетия мягкие оболочки получили широкое применение в технике и строительстве. Конструкции с надувным каркасом и воздухоопорные оболочки используют в качестве складских помещений, ангаров, выставочных павильонов и т. п. Мягкие оболочки необходимы во многих судовых конструкциях. В космической технике их применяют в шлюзовых устройствах на пилотируемых орбитальных кораблях, в скафандрах космонавтов и даже в качестве надувных спутников.

Благодаря своим отличительным достоинствам (компактности при транспортировке, скорости разворачивания и малому весу) конструкции, изготовленные из мягких оболочек, находят широкое применение в народном хозяйстве. Мягкие оболочки используются в качестве пневмоподъемников [12], [33], [54], [100], амортизаторов [29], [86], устройств для крепления грузов при транспортировке [105], [107], контейнеров [108], аварийно-спасательных средств на флоте [4], пневматических плотин [66], защитной надувной подушки водителя и камеры автомобиля [36], перекрытий, тентов, ангаров [55], [66], [120], [123], парашютов, летательных аппаратов, искусственных спутников земли [49], [66], [120], и т. д. Подробно применение мягких оболочек изложено в обзорных работах [49], [51], [66], [105] [108],[120], [123].

Несмотря на наличие упрощающего основные уравнения свойства безмоментности, построение теории мягких оболочек - проблема очень сложная. Все осложняется тем обстоятельством, что мягкая оболочка под нагрузкой существенно изменяет геометрию. Это, в свою очередь, оказывает

влияние на распределение нагрузки. Основы теории для случая осевой симметрии в предположении о малости деформации предложены С.А. Алексеевым [5]. Им же в работах [6], [9] заложены основы общей теории мягких оболочек.

Объектом научного исследования мягкие оболочки стали в 40-х - 50-х годах 20 века. Изложение развития теории мягких оболочек содержится в обзорах [6], [49], [56]. Среди многочисленных публикаций по теории мягких оболочек, выделим работы С. А. Алексеева [6-11], Л. И. Балабуха [14], В.Л. Бидермана [24-26], Б.Л. Бухина [24-25], А.С. Вольмира [43], К.З. Галимова [44-47], Г.А. Гениева [48], А.С. Григорьева [51-53], Б.В. Гулина [55-58], Б.И. Друзя [59-62], В.В. Ермолова [64], В.Э. Магулы [87-93], А.Д. Москаленко [99], В.В. Риделя [57-58], Н.П. Стрекозова [120-122], В.И. Усюкина [124-129], К.Ф. Черныха [132-136], L.J. Hart-Smith [147-149], Ф. Отто и Р. Тростеля [106].

Наиболее исследованными являются задачи деформирования некруговых цилиндрических [59-62], [69], [74] и осесимметричных мягких оболочек [6], [10], [33], [36], [44], [51-53], [120-129], [131-136]. Задачам теории мягких оболочек произвольной формы посвящено относительно немного работ [58], [120], [129]. Контактные задачи рассматривались в работах [43], [73].

Нерастяжимым мягким оболочкам посвящены работы С. А. Алексеева [11], В. Э. Магулы [92], Ф. Отто и Р. Тростеля [106]. Изменение их формы происходит только за счет перемещений, при отсутствии деформации. К тому же, вследствие малости толщины, изгибные напряжения играют ничтожно малую роль и нерастяжимая оболочка рассматривается как безмоментная. Таким образом, такая схема расчета является простейшей. В ней невозможно учесть свойства материала и внимание, в основном,

уделяется формам раскройного и конечного состояний, а так же появлению зон складок.

Способность мягких оболочек уже при малых нагрузках существенно изменять свою форму вынуждает четко различать начальное (ненагруженное) и конечное (деформированное) состояния. Соответственно, в классификации, данной С.А. Алексеевым [5-8] выделяются три основные задачи теории мягких оболочек. Первая основная задача состоит в определении начальной (или раскройной) формы по заданным нагрузкам и форме конечного состояния. Вторая - в определении конечной формы (и напряженно-деформированного состояния) по известным нагрузкам и заданной раскройной форме. Третья - в определении изменений формы и напряжений, вызванных системой дополнительных нагрузок.

Существуют лишь несколько работ, посвященных задачам первого типа, это [5], [8], [25], [114],[117], [127-129], [151-152]. Огромное количество работ содержит решение частных случаев второй и третьей основной задачи, обсуждение и конкретный анализ результатов которых можно найти в обзорных статьях [7], [31], [50], [68], [137], [139], [143].

Исследованию НДС мягкой оболочки в области малых деформаций посвящено наибольшее количество работ. Расчет мягкой оболочки при больших деформациях требует максимально точного учета геометрической, физической и конструктивной нелинейностей. Для этой области деформаций строгая модель мягкой оболочки получена В. И. Усюкиным в работе [129]. Характерной особенностью данной расчетной схемы является то, что в большинстве случаев нелинейные физические соотношения основаны на уравнениях состояний высоко-эластичных сжимаемых и несжимаемых гиперупругих материалов. Закон их поведения описывается функцией упругого потенциала (потенциальной энергией деформации). Различные виды упругих потенциалов рассматривались в многочисленных публикациях,

среди которых выделим основополагающие работы А. И. Лурье [85], Р. С. Ривлина [109], К. Ф. Черныха [136], J.T. Oden [105] и др. К высокоэластичным материалам относятся натуральные и синтетические каучуки, резины, некоторые виды полимеров, различные материалы биологического происхождения [134].

В работе В.И. Усюкина [128] на основе вариационного подхода построена система уравнений безмоментной оболочки произвольной начальной геометрии при больших деформациях и перемещениях. При этом особенностью полученных нелинейных уравнений равновесия мягких оболочек является то, что направления перемещений совпадают с осями недеформированной оболочки. Я.Ф. Каюк и Л.Ф. Ващенко в [72] предложили вариант нелинейных геометрических соотношений мягких ортотропных оболочек вращения в предположении, что деформации и квадраты углов поворота малы по сравнению с единицей. На основе этого подхода рассмотрена деформация мягкой конической оболочки под действием внутреннего давления [40]. Изучено влияние геометрической нелинейности на напряженно-деформированное состояние последней [41], [71]. В работах [70] приводятся основные зависимости геометрические нелинейной теории мягких оболочек, причем детально рассмотрены возможные упрощения соотношений между кратностями удлинения и перемещениями. Другие варианты записи основных уравнений теории мягких оболочек и принципиальные схемы их расчета приведены в книге В.З. Магулы [90]. Полученные там соотношения не содержат таких понятий как начальная форма и перемещения [87-93], так как, вообще говоря, у мягкой оболочки отсутствует определенная форма до нагружения.

1.2. Проблемы композитных оболочек

Развитие современной техники неразрывно связано с производством композитных материалов (КМ), конструкций из них, внедрением их в самые

различные отрасли промышленности, а также с созданием новых композитных материалов и конструкций.

Большой вклад в развитие теории и практики расчета композитных оболочек внесли Н.А. Алфутов, С.А. Амбарцумян, А.Н. Андреев, Ю.П. Артюхин, В.Л. Бажанов, В.Л. Бидерман, В.В. Болотин, Г.А. Ванин, В.В. Васильев, Э.И. Григолюк, П.А. Зиновьев, В.А. Иванов, Р.А. Каюмов, М.А. Колтунов, Ю.Г. Коноплев, М.С. Корнишин, В.И. Королев, В.А. Крысько, С.Г. Лехницкий, В.А. Ломакин, А.К. Малмейстер, Ю.В. Немировский, Ю.Н. Новичков, И.Ф. Образцов, П.М. Огибалов, В.Н. Паймушин, Б.Е. Победря, Б.Г. Попов, А.В. Саченков, В.С. Саркисян, В.П. Тамуж, Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Терегулов, Г.А. Тетере, П.П. Чулков и др.

Основной проблемой расчета композитных оболочек является определение рациональной схемы армирования, которая первоначально формулировались как задачи оптимизации конструкций из композитов. Под конструкцией рациональной схемы армирования подразумевается конструкция, в которой направления армирования совпадают с линиями главных напряжений или напряжения вдоль линий армирования постоянны. В некоторых работах использовались условия оптимальности, полученные как условия стационарности определённого функционала качества конструкции. Обзоры работ по оптимальному армированию представлены в [37-39], [102-104]. Первые проведённые исследования в области оптимального проектирования конструкций из композитов относились к оболочкам вращения (баки, баллоны давления, камеры сгорания ракетных двигателей твёрдого топлива), рассчитываемых на внутреннее давление [38], [67], [110]. Использование безмоментной теории оболочек, применяемой при расчёте баллонов давления, и принципа равнопрочности позволило получить рациональное решение в замкнутом виде. Оптимальные проекты оболочек вращения, образованных намоткой, оказались технологичными и были реализованы на практике.

1.3. Мягкая сетчатая оболочка

Мягкая сетчатая оболочка - это расчетная схема широкого класса мягких оболочечных конструкций, образованных двумя семействами нитей и изотропным связующим (заполнителем). Как сетчатые оболочки рассматриваются не только оболочки, образованные собственно сетями (например, вантовые конструкции, рыболовные сети), но также тканевые оболочки, резинокордные оболочки. Анализ, основанный на теории сетчатых оболочек, эффективен и при оптимизации конструкций из армированных пластиков.

Наиболее ранние работы, известные автору, по механике сетчатых мягких оболочек принадлежат В.Л. Бидерману и Б.Л. Бухину [20-29]. От этих работ, собственно, и ведет свое начало термин сетчатая оболочка, обозначающий оболочку, образованную двумя перекрещивающимися семействами гибких нитей, связанных связующим. Система нитей, связанная связующим, определяет реальную начальную форму оболочки. В случае отсутствия связующего оболочка не имеет формы, и термин сетчатая оболочка определяет расчетную модель. Под руководством В.Л. Бидермана была написана книга [20] по теории и методам расчета, проектирования и испытаний сетчатых оболочек.

В работах Т.В. Бидерман был разработан алгоритм расчета резинокордных оболочек вращения переменной толщины с произвольной плавно меняющейся формой меридиана при заданном непрерывном законе изменения внешних нагрузок. В этой работе также разработана методика расчета несущей способности с учетом изменения размеров оболочек и методика расчета на устойчивость при кручении.

Основная задача расчета оболочек по сетчатой модели заключается в определении равновесной формы и расчете усилий в нитях. Наибольшее количество работ в данной постановке относится к определению равновесной

формы оболочек, нагруженных постоянным внутренним давлением [22], [28], [34-35], [39], [63], [67], [76-77], [80-81], [94], [96-98], [105], [111], [132], [144].

Если исходная форма является равновесной, то деформации оболочки за счет растяжимости нитей и ее конечная форма могут быть определены с удовлетворительной для практики точностью в рамках линейной теории. В случае, если исходная форма оболочки неравновесная, то задача становится существенно нелинейной. При этом нелинейная модель расчета должна учитывать свойства связующего, характеристики которого и модель деформирования могут существенно отличаться, например, жесткие эпоксидные смолы либо резино-подобный наполнитель.

Для определения равновесной формы сетчатой структуры необходимо знать закон распределения углов армирования на поверхности оболочке или, другими словами, закон намотки при ее изготовлении на оправке. Следует отметить, что с точки зрения реализации на практике, выбор траектории намотки может быть различным. Наиболее широко используется геодезическая намотка. Реже применяются другие виды намотки. Равновесная конфигурация сетчатой оболочки определяется типом нагружения, законом изменения угла намотки и условиями закрепления.

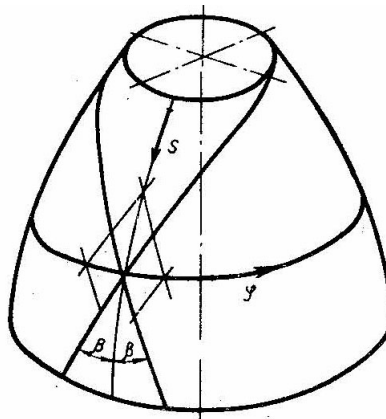


Рис. 1.1. Сетчатая оболочка изготовлена геодезической намоткой

Эта геометрия характерна для оболочек, изготавливаемых намоткой натянутых нитей на оправку, имеющую форму поверхности оболочки

(например, для стеклопластиковых оболочек, получаемых спиральной намоткой). В этом случае нити укладываются по кратчайшим расстояниям, т. е. по геодезическим линиям. Уравнение геодезических линий на поверхности вращения имеет вид:

$$\sin\beta=c/r,$$

где c — параметр, определяемый технологией изготовления.

Намотка по винтовым линиям на цилиндрическую оправку также является геодезической. После трансформации закон изменения углов армирования описывается так называемой «шинной геометрией». Процесс перевода оболочки - заготовки в конечную форму представляет собой геометрически нелинейную задачу.

Как известно, геодезическая траектория позволяет осуществить намотку с натяжением на абсолютно гладкой поверхности. Однако в ряде практических случаев этот тип намотки не позволяет удовлетворить конструктивные требования, например, геодезической намоткой нельзя получить баллон давления с разными полюсными отверстиями. Отклонение намотки от геодезической ограничено величиной коэффициента трения между оправкой и наматываемой нитью.

Принцип равнопрочности и соответствующий выбор схем армирования в некоторых случаях являются следствием экстремальности определённых функционалов качества. Условия, при которых безмоментная равнопрочная оболочка вращения, армированная волокнами, есть конструкция минимального веса, выведены в [110]. В работах [78], [110] установлены формы оболочек, для которых напряжения в нитях постоянны вдоль геодезических линий. Намотка по геодезическим линиям обусловлена возможностями технологии (условием несоскальзывания нитей). Намотка оболочек из ортотропной ленты рассматривалась в [38], [63], [78], [103]. Рассматривались задачи оптимизации форм оболочек и структуры

армирования [103]. Анализ рациональной структуры армирования в задаче о плоском напряжённом состоянии композитных пластин был дан на основании принципа равнопрочности в [32].

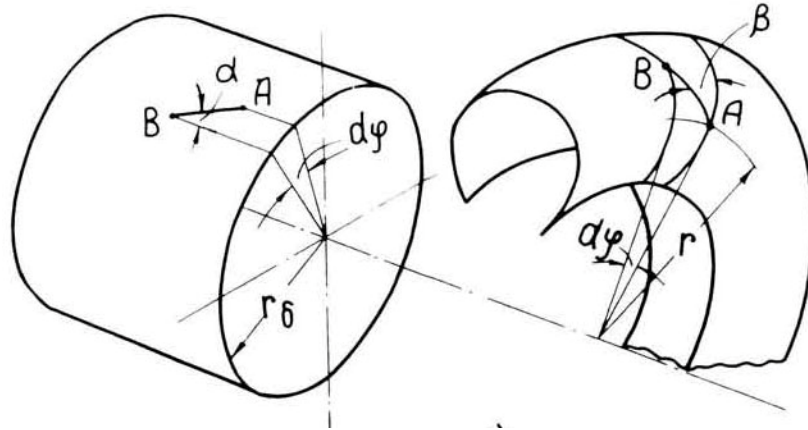


Рис. 1.2. Формирование сетчатой оболочки с «шинной» геометрией нитей

Каркасы резинокордных оболочек и некоторых видов пневматических шин изготавливают из обрезиненных кордных слоев, накладываемых друг на друга крест-накрест. Полученную таким образом цилиндрическую оболочку с нитями, лежащими по левым и правым винтовым линиям (Рис. 1.2), затем формируют подачей давления во внутреннюю полость при одновременном сближении торцов и вулканизируют. В процессе формования и вулканизации фиксируется окончательная форма изделия. Нити при этом приобретают «шинную» геометрию, характеризуемую следующим законом изменения угла β :

$$\sin\beta = \chi r,$$

где χ — параметр, определяемый технологией изготовления.

Аверко-Антонович Ю.О., Омельченко Р.Я. в [1] приводит исследования технологии изготовления пневматических шин, резинотехнических изделия различного назначения. В учебнике перечислены устройства, классификации шин, резиновых изделий и их технология производства. Учитывается разнообразие и обновление конкретных

технологий отдельных процессов. Авторы старались отразить в пособии наиболее важные, основополагающие вопросы, лишь в отдельных случаях прибегая к описанию конкретных схем. В пособии нашли отражение достижения технологии переработки эластомеров за последние 10 - 15 лет: широкое вовлечение в производство новых материалов, контроль и управление процессами с помощью ЭВМ, модернизация технологического оборудования, применение поточных автоматизированных линий и промышленных роботов.

Среди методов расчета НДС автомобильной шины существенную долю составляют методы, основанные на теориях оболочек. Полученные с их помощью теоретические и практические результаты отражены в огромном количестве работ. Первый расчет НДС резинокорда на основе мембранной модели для нужд дирижаблестроения приведен в работе [146]. В дальнейшем стратегические запросы авиастроения стимулировали развитие собственно механики пневматических шин. Пионерской по праву можно считать работу J. Rotta [153], основанную на экспериментальном анализе самолетных шасси. В рамках максимально упрощенной модели автором решены следующие задачи: определение деформации в шине при заданном контакте с грунтом, а также известными боковым сдвиге и наклоне плоскости колеса; определение контактных нагрузок; расчет продольного деформирования боковины шины. Установлена практическая независимость направления контактных сил и области контакта от давления. В качестве первых попыток применить теоретические наработки к изучению изменения профиля пневматической шины при раздувании можно указать работы [150].

В работе Бёма [140] предложена одна из первых рабочих расчетных схем, согласно которой каркас и брекер моделируются мембранами, а распределение усилий между ними задается некоторой функцией. Таким образом автором решена задача о нагружении шины внутренним давлением (осесимметричная задача), а также подробно изучены радиальные и

продольные колебания шины (результаты хорошо согласуются с экспериментом). Отметим, что в рамках двухслойной модели касательные напряжения остаются неопределенными.

Для моделирования динамического поведения шины Brewster разработал модель точечных масс [141]. Модель учитывает лишь небольшое число свойств реального материала. Кроме того, ее применение требует значительного числа экспериментов. Достоинством такой модели является ее простота, что позволяет рассчитывать нестационарное качение при больших скоростях.

Белкиным А.Е. решена задача обжатия шины на поверхности дороги и задача стационарного качения обжатой шины с использованием приближенной теории трехслойных оболочек [16-17]. Деформации предварительно напряженных оболочек считались малыми. В работе [18] предложено приближенное решение контактной задачи об обжатии шины на плоскость, основанное на интегрировании линеаризованных уравнений теории оболочек. При построении линеаризованной теории предполагалось, что смещения точек шины, переводящие ее из начального состояния (накачанная шина) в конечное (обжатая шина), являются малыми. Для более точной аппроксимации зоны беговой дорожки радиальных шин тем же автором была предложена модель шины как пятислойной оболочки [15]. Несущие мембранные слои, моделирующие каркас и два слоя брекера, считались анизотропными и тем самым учитывали различную направленность углов армирования. Экранирующие слои брекера моделировались мембранной оболочкой, отличной от модели рабочих слоев. Преимущество такого подхода по сравнению с трехслойными моделями состоит прежде всего в том, что он позволяет уточнить величины НДС в зоне кромок брекера, которая является потенциально опасной с точки зрения разрушения шины. Кроме того, в рамках модели возможно исследовать НДС резиновой прослойки между слоями брекера. Однако недостатком

пятислойной модели по сравнению с трехслойной заключается в требовании при расчетах значительно больших вычислительных ресурсов.

Важнейшие эксплуатационные характеристики шины выявляются в условиях контактного взаимодействия с дорожным полотном, поэтому задача моделирования поведения шины должна ставиться как контактная. Развитие методов расчета и совершенствование вычислительной техники дают возможность рассмотреть более полные расчетные схемы контактных задач и уточненные модели шины, основанные на геометрически нелинейных соотношениях теории оболочек. Одинцов О.А. в работе [104] разработал математические модели, метод и программное обеспечение для расчета напряженного состояния автомобильной радиальной шины в условиях стационарного качения в контактной постановке.

1.4. Применение сетчатых оболочек в изготовлении пневмоамортизаторов и муфт

Благодаря своим отличительным достоинствам: компактности при транспортировке, быстрой развертывания и малому весу, конструкции, изготовленные из сетчатых оболочек, находят широкое применение в народном хозяйстве. Сетчатая оболочка используется в качестве пневмоподъемников. Такие конструкции обычно состоят из наполненных газом сетчатых оболочек. Задачи расчета пневматических амортизаторов и устройств для крепления грузов являются актуальными, в которых необходим учет всех этих особенностей. Их работа, показана в [29] и [105], как правило, происходит при больших упругих деформациях и состоит из двух этапов. На первом этапе оболочка нагружается до некоторого рабочего состояния, на втором происходит контакт оболочки с конструкцией существенно большей жесткости. В связи с этим, при решении необходимо рассматривать два типа нелинейных задач: накачивание и контакт. В задаче накачивания, помимо геометрической и физической нелинейностей, возникает необходимость учета возможной конструктивной нелинейности,

обусловленной появлением заранее неизвестных складчатых областей. Решение контактной задачи требует использования нелинейного уравнения состояния газа. Здесь так же существует нелинейность, связанная с постановкой граничных условий на заранее неизвестной области контакта [84]. Вследствие малости массы оболочки, скорости накачивания и частоты вибрации грузов, инерционными силами в этих примерах можно пренебречь [29] и рассматривать квазистатическое нагружение.

В машиностроении, пневматические муфты относятся к классу фрикционных муфт с дистанционным пневматическим управлением. Эти муфты подразделяют на шинно-пневматические (пневмокамера которых участвует в передаче крутящего момента) и пневмо-камерные (пневмокамера которых не участвует в передаче крутящего момента). К пневмокамерным относят также и муфты типа «Pneumaflex», представляющие собой комбинацию фрикционной и упругой муфт. Шинно-пневматические муфты нашли широкое применение в буровых и судовых установках, экскаваторах, землеройных машинах, в кузнечно-прессовом оборудовании, конвейерах, шахтных подъемниках и т. д. Они позволяют регулировать величину передаваемого крутящего момента путем изменения давления воздуха в баллоне, допускают местное и дистанционное плавное включение и выключение, компенсируют значительные смещения валов (радиальное до 3 мм, угловое до 2 мм на 1 м длины вала, осевое до 15 мм при отключенной и до 1 мм при включенной муфте). Износ фрикционных поверхностей в этих муфтах компенсируется автоматически, без какой-либо дополнительной регулировки.

В. С. Поляков, И. Д. Барбаш, О. А. Ряховский в справочнике [113], описали конструкции современных механических, пневматических муфт, широко применяемых в машиностроении. Рассмотрены конструкции пневматических муфт отечественного и зарубежного производства. Приведены сведения по новым прогрессивным конструкциям муфт.

В работе [30] Бидерман Т.В. разработала методики расчета напряженно деформированного состояния резиновых торообразных упругих элементов муфт (ТУЭМ) с выпуклой и вогнутой поверхностями; жесткостных характеристик ТУЭМ; момента потери устойчивости ТУЭМ; деформационной несущей способности ТУЭМ; ТУЭМ с меридиональным разрезом.

1.5. Возможность применения сетчатых оболочек в устройствах управляемой упругой деформации (УУД)

Анализ тенденций развития современной электронной техники в промышленно развитых странах свидетельствует о непрерывном расширении масштабов применения высоких вакуумных технологий и технологического оборудования для их реализации. Одним из важнейших факторов, определяющих уровень и надёжность оборудования этого класса, является не только его способность формировать необходимые для соответствующих технологических процессов вакуумные условия, но и сохранять их стабильными в течении технологического цикла.

Аналогичные проблемы возникают при создании высоковакуумного оборудования в приборостроительной, авиационной и космической технике, в прецизионной металлургии для уникальных процессов атомной и термоядерной энергетики, ядерной физики, физики элементарных частиц и др. вплоть до тонких химических и медицинских технологий.

Сохранение «чистого» вакуума в процессе работы высоковакуумного автоматического оборудования с размещением в рабочих объёмах вакуумных камер различных функциональных систем и устройств для ориентации и перемещения изделий относительно источников технологического воздействия, их транспортирования и межкамерного шлюзования в многомодульных системах и т.д. является достаточно сложной комплексной задачей.

В то же время автоматизация сложных технологических процессов требует размещения в рабочих объемах высоковакуумных камер ряда механизмов, которые во многих случаях могут стать источниками генерации «загрязнений», так называемой привносимой дефектности вакуумной среды, в том числе наиболее опасным их видом — микрочастицами износа, при наличии в составе функциональных механизмов узлов внешнего трения скольжения или качения (Рис. 1.3).



Рис. 1.3. Характер износа зубьев шестерён в вакууме [3]:

- а) износ зубьев для тяжело нагруженных зубчатых пар;
- б) износ зубьев для мало нагруженных (приборных) зубчатых пар;

Устранить генерацию микрочастиц износа трущихся пар возможно только в случае их полного исключения в конструкциях функциональных механизмов. Одной из таких возможностей является создание различных исполнительных устройств и систем с использованием принципа УУД, при которой эффект функционирования механизмов создаётся в результате внутреннего трения.

Одним из методов создания функциональных механизмов, предназначенных для работы в вакууме и воспринимающих его дестабилизирующее влияние без снижения надежности, является использование для формирования усилий и перемещений приводов управляемой упругой деформации, особенно — гарантирующих высокую точность позиционирования.

В работах [2-3] рассматриваются приводы УУД, основанные на применении гибких оболочек, отделяющих «чистую» полость от полости приводного устройства (Рис. 1.4).

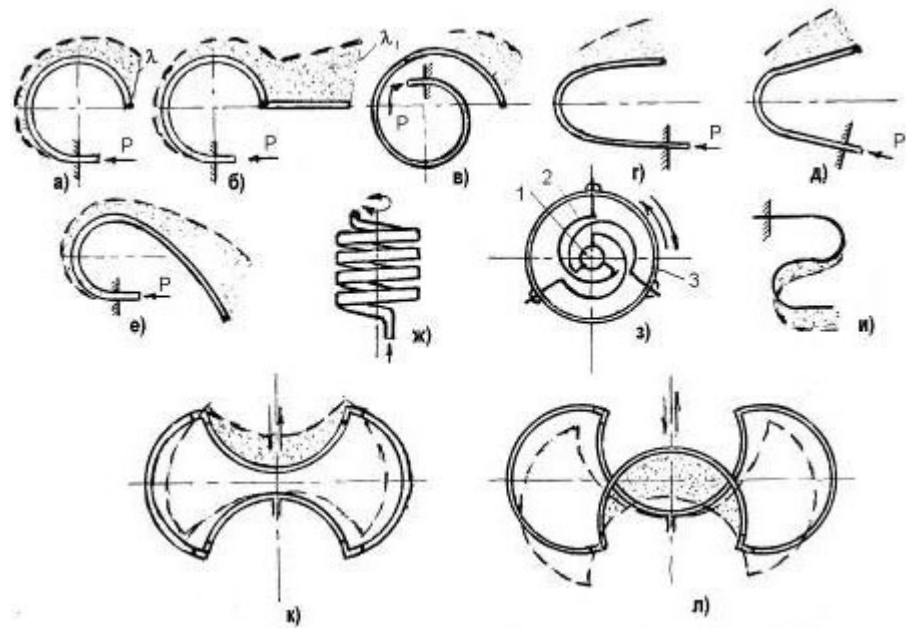


Рис. 1.4. Виды приводных элементов с УУД:

- а) приводной элемент с постоянным радиусом кривизны центральной оси;
- б) прямолинейный приводной элемент в виде стержня или трубки;
- в, г, д, е) приводные элементы, центральная ось которых, изменяется по различным законам;
- ж) многовитковый приводной элемент;
- и) приводной элемент незамкнутого контура прямолинейного перемещения;
- к, л) приводные элементы замкнутого контура, формирующие линейное перемещение;

В качестве гибких оболочек могут быть использованы трубки различной формы (витые, винтовые, некругового сечения, с некруговой осью и т.п.), системы таких трубок, сифоны с несимметричными гофрами и системы таких сифонов.

В данной диссертационной работе предлагается расширить набор таких приводов сетчатыми оболочками. Сетчатые оболочки с неравновесной

исходной конфигурацией очень сильно деформируются при приложении внутреннего давления, что и позволяет их использовать как приводы УУД.

Выводы по главе 1:

На основании проведенного анализа литературы можно сформулировать следующие выводы:

1). Несимметричная укладка нитей может значительно расширить спектр применения сетчатых оболочек. В случае успеха исследования возможно возникновение нового научного направления.

2). Исследования сетчатых оболочек с несимметричной укладкой нитей в литературе практически отсутствуют, хотя несимметричная укладка может быть вызвана различными причинами: специальная укладка нитей под разными углами; погрешность изготовления; изменение углов вследствие приложения осевого крутящего момента; неодинаковое изменение углов в процессе работы.

3). Несимметричная укладка нитей позволяет создавать устройства управляемой упругой деформации, альтернативные существующим устройствам, предназначенным для работы в условиях сверхчистого вакуума, основанным на однородных тонкостенных оболочках.

4). Применение сетчатых оболочек с несимметричной укладкой нитей значительно расширяет выбор форм и характеристик устройств, содержащих сетчатые оболочки.

ГЛАВА 2. РАВНОВЕСНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК С НЕСИММЕТРИЧНОЙ УКЛАДКОЙ НИТЕЙ

В данном разделе разработана методика расчета и построения равновесных профилей сетчатых оболочек с различными углами укладки нитей левого и правого семейств. Хотя в основном обсуждается геодезический закон укладки нитей, построенная методика может применяться практически без изменений при любом законе укладки нитей. Методика сведена к численному интегрированию системы 2-х уравнений с начальными условиями. Приведены примеры построения равновесных профилей сетчатых оболочек с несимметрично уложенными нитями при различных значениях безразмерных параметров.

2.1. Соотношение между мембранными силами

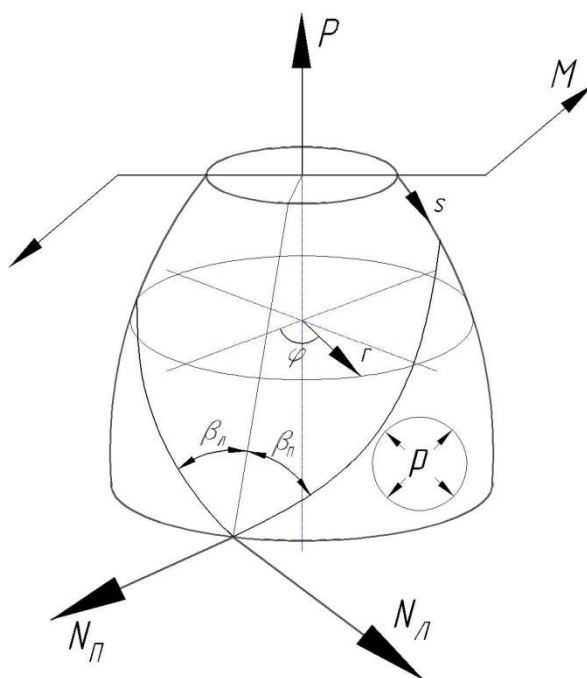


Рис. 2.1. Сетчатая оболочка вращения и действующие на нее нагрузки

Рассмотрим оболочку вращения, образованную двумя семействами нитей с углами армирования $+\beta_n$, $(-\beta_l)$ и нагруженную давлением, осевой силой и крутящим моментом (Рис. 2.1).

Как правило, наклон нитей левого и правого семейств одинаков [22], [26], [103], что обусловлено технологией непрерывной намотки. Однако если допустить возможность различного наклона нитей левого и правого семейств, то это существенно расширит спектр равновесных конфигураций сетчатых оболочек, изготавливаемых намоткой. С точки зрения технологии изготовления для смены угла наклона нити на оправке в районе полюсного отверстия достаточно предусмотреть выступы, за которые будет зацепляться нить при смене направления движения каретки (Рис. 2.2). Скорость движения каретки при смене направления также должна измениться.



Рис. 2.2. Система штифтов на торцах оправки для зацепления нитей при смене направления движения каретки для обеспечения непрерывности намотки (фотография из буклета выставки MIKROSAM 2009 г.)

Таким образом стенка сетчатой оболочки вращения образована сетью из двух несимметрично расположенных систем нитей. Поверхность такой оболочки удобно исследовать с использованием обычной системы гауссовых координат s, φ (Рис. 2.1):

s — длина дуги меридиана от некоторой начальной параллели;

φ — угол, определяющий положение меридиональной плоскости.

В произвольной точке оболочки направления нитей составляют с меридианом углы β_{Π} и $\beta_{Л}$, которые зависят только от координаты s .

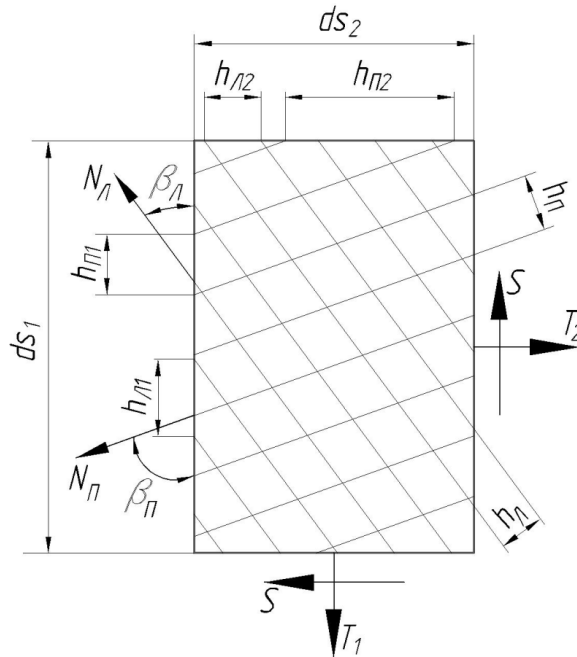


Рис. 2.3. Элемент сетчатой оболочки ($ds_1 = ds$, $ds_2 = rd\varphi$)

Участок $ds_2 = rd\varphi$ пересекает $k \frac{ds_2}{h_{\Pi}} \cos \beta_{\Pi}$ и $k \frac{ds_2}{h_{Л}} \cos \beta_{Л}$ нитей каждого из направлений, где $h_{\Pi}, h_{Л}$ - шаги нитей левого и правого семейств (Рис. 2.3), k - количество слоев.

$$h_{\Pi_2} = h_{\Pi_1} \operatorname{tg} \beta_{\Pi}$$

$$h_{Л_2} = h_{Л_1} \operatorname{tg} \beta_{Л}$$

Суммарное усилие в меридиональном направлении, воспринимаемое участком ds_2 , составляет (Рис. 2.3)

$$T_1 ds_2 = k N_{\Pi} \frac{ds_2}{h_{\Pi}} \cos^2 \beta_{\Pi} + k N_{Л} \frac{ds_2}{h_{Л}} \cos^2 \beta_{Л}$$

где N_{Π} , $N_{Л}$ - усилие в нитях (натяжение) правого и левого семейства.

Отношение полученной силы к ds_2 дает мембранное усилие T_1 , усилия T_2 и S получаются аналогично.

Преобразовывая аналогично [22], получаем соотношения, связывающие мембранные усилия T_1, T_2, S с натяжениями нитей

$$\begin{cases} T_1 = k \frac{N_{II}}{h_{II}} \cos^2 \beta_{II} + k \frac{N_{JI}}{h_{JI}} \cos^2 \beta_{JI} \\ T_2 = k \frac{N_{II}}{h_{II}} \sin^2 \beta_{II} + k \frac{N_{JI}}{h_{JI}} \sin^2 \beta_{JI} \\ S = k \frac{N_{II}}{h_{II}} \cos \beta_{II} \sin \beta_{II} - k \frac{N_{JI}}{h_{JI}} \cos \beta_{JI} \sin \beta_{JI} \end{cases} \quad (2.1)$$

Система (2.1) связывает 3 мембранных усилия T_1, T_2, S с двумя натяжениями нитей N_{II}, N_{JI} . Исключение N_{II}, N_{JI} из (2.1) приводит к следующему тождественному соотношению, связывающему T_1, T_2, S

$$T_2 = S(\operatorname{tg} \beta_{II} - \operatorname{tg} \beta_{JI}) + T_1 \operatorname{tg} \beta_{II} \operatorname{tg} \beta_{JI} \quad (2.2)$$

При отсутствии крутящего момента отсутствует и сдвигающая сила ($S=0$), что приводит к упрощенному варианту (2.3)

$$T_2 = T_1 \operatorname{tg} \beta_{II} \operatorname{tg} \beta_{JI} \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) обобщает хорошо известное уравнение (2.4) из [22,26] на случай несимметричной укладки нитей

$$T_2 = T_1 \operatorname{tg}^2 \beta \quad (2.4)$$

В [22] показано, что из (2.4) следует результирующее геометрическое соотношение

$$\sin \theta = A(r^2 + P_0 / \pi p) e^{-\int \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{r} dr} \quad (2.5)$$

где A - произвольная постоянная.

Так как переход от симметричной укладки к несимметричной фактически сводится к замене (2.4) на (2.3), то есть к замене $\text{tg}^2 \beta$ на $\text{tg} \beta_{\Pi} \text{tg} \beta_{\text{Л}}$, то очевидно, что аналогичная замена в (2.5) приводит к результирующему геометрическому соотношению для несимметричной укладки нитей

$$\sin \theta = A(r^2 + P_0 / \pi p) e^{-\int \frac{\text{tg} \beta_{\Pi} \text{tg} \beta_{\text{Л}}}{r} dr} \quad (2.6)$$

Соотношение (2.6) позволяет рассматривать любые законы изменения углов укладки нитей $\beta_{\Pi} = \beta_{\Pi}(r)$, $\beta_{\text{Л}} = \beta_{\text{Л}}(r)$. В следующем пункте рассмотрен один из возможных законов укладки нитей – укладка по геодезическим линиям.

2.2. Построение профиля оболочки при несимметричной геодезической намотке

Для оболочек, изготавливаемых намоткой натянутых нитей на оправку (например, для стеклопластиковых оболочек, получаемых спиральной намоткой) нити укладываются по кратчайшим расстояниям, т.е. по геодезическим линиям. Уравнение геодезических линий на поверхности вращения имеет вид [22]

$$\sin \beta_{\Pi} = \frac{c_{\Pi}}{r}, \quad \sin \beta_{\text{Л}} = \frac{c_{\text{Л}}}{r} \quad (2.7)$$

где $c_{\Pi}, c_{\text{Л}}$ геометрические параметры, определяемые технологией изготовления. Постановка (2.7) в (2.6) приводит к неопределенному интегралу, вычисляемому в аналитическом виде:

$$\int \frac{\text{tg} \beta_{\Pi} \text{tg} \beta_{\text{Л}}}{r} dr = \int \frac{c_{\Pi} c_{\text{Л}}}{r \sqrt{r^2 - c_{\Pi}^2} \sqrt{r^2 - c_{\text{Л}}^2}} dr = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{c_{\text{Л}} \sqrt{r^2 - c_{\Pi}^2} + c_{\Pi} \sqrt{r^2 - c_{\text{Л}}^2}}{c_{\text{Л}} \sqrt{r^2 - c_{\Pi}^2} - c_{\Pi} \sqrt{r^2 - c_{\text{Л}}^2}} \right| \quad (2.8)$$

где знак модуля вызван симметрией при замене индексов ($c_{\Pi} \leftrightarrow c_{\text{Л}}$).

Из (2.8) и (2.6) следует основная формула, определяющая геометрию рассматриваемого класса оболочек

$$\sin\theta = A \left(r^2 + \frac{P_0}{\pi p} \right) \left| \frac{c_{II} \sqrt{r^2 - c_{II}^2} - c_{II} \sqrt{r^2 - c_{II}^2}}{c_{II} \sqrt{r^2 - c_{II}^2} + c_{II} \sqrt{r^2 - c_{II}^2}} \right|^{1/2} \quad (2.9)$$

Постоянная A определяется из условия на экваторе оболочки: для максимального радиуса оболочки $r = R$ наклон нормали к оси составляет прямой угол ($\sin\theta = 1$), это приводит к окончательному выражению для $\sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{\left(r^2 + \frac{P_0}{\pi p} \right) \left| \frac{c_{II} \sqrt{r^2 - c_{II}^2} - c_{II} \sqrt{r^2 - c_{II}^2}}{c_{II} \sqrt{r^2 - c_{II}^2} + c_{II} \sqrt{r^2 - c_{II}^2}} \right|^{1/2}}{\left(R^2 + \frac{P_0}{\pi p} \right) \left| \frac{c_{II} \sqrt{R^2 - c_{II}^2} - c_{II} \sqrt{R^2 - c_{II}^2}}{c_{II} \sqrt{R^2 - c_{II}^2} + c_{II} \sqrt{R^2 - c_{II}^2}} \right|^{1/2}} \quad (2.10)$$

С учетом (2.7) этому соотношению можно придать несколько иной вид

$$\sin\theta = \frac{r^2 + \frac{P_0}{\pi p}}{R^2 + \frac{P_0}{\pi p}} \left(\frac{\sin(\beta_{II} - \beta_{*II}) / \sin(\beta_{II} + \beta_{*II})}{\sin(\beta_{*II} - \beta_{*II}) / \sin(\beta_{*II} + \beta_{*II})} \right)^{1/2} \quad (2.10a)$$

где $\sin \beta_{*II} = \frac{c_{II}}{R}$; $\sin \beta_{*II} = \frac{c_{II}}{R}$

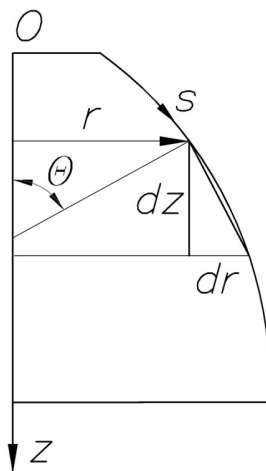


Рис. 2.4. Связь между осевой и радиальной координатами

Осевая и радиальная координата связаны следующим соотношением

$$dz = dr \cdot \operatorname{tg} \theta = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} dr \quad (2.11)$$

Из (2.10) и (2.11) следует, что определение уравнения меридиана оболочки $z = z(r)$ свелось к квадратуре. Однако вычисление указанной квадратуры затруднительно из-за обращения знаменателя (2.11) в нуль на экваторе оболочки. В связи с этим численное интегрирование производилось по меридиану оболочки на основе соотношений

$$\begin{cases} \frac{dz}{ds} = \sin \theta \\ \frac{dr}{ds} = \cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \end{cases} \quad (2.12)$$

Для сокращения числа параметров, определяющих форму оболочки, были введены безразмерные параметры

$$\alpha_{II} = \frac{c_{II}}{R}, \quad \alpha_{JI} = \frac{c_{JI}}{R}, \quad \Pi = \frac{P_0}{\rho \pi R^2} \quad (2.13)$$

Аналогичным образом вводились безразмерные переменные

$$\sigma = \frac{s}{R}, \quad \rho = \frac{r}{R}, \quad \zeta = \frac{z}{R} \quad (2.14)$$

Подстановки (2.13)-(2.14) в (2.10), (2.11) приводят к системе безразмерных дифференциальных уравнений, удобной для расчета профиля оболочки

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{\rho^2 + \Pi}{1 + \Pi} \frac{\left| \frac{\alpha_{JI} \sqrt{\rho^2 - \alpha_{II}^2} - \alpha_{II} \sqrt{\rho^2 - \alpha_{JI}^2}}{\alpha_{II} \sqrt{\rho^2 - \alpha_{JI}^2} + \alpha_{JI} \sqrt{\rho^2 - \alpha_{II}^2}} \right|^{1/2}}{\left| \frac{\alpha_{JI} \sqrt{1 - \alpha_{II}^2} - \alpha_{II} \sqrt{1 - \alpha_{JI}^2}}{\alpha_{II} \sqrt{1 - \alpha_{JI}^2} + \alpha_{JI} \sqrt{1 - \alpha_{II}^2}} \right|^{1/2}} \\ \frac{d\zeta}{d\sigma} = \sin \theta; \quad \frac{d\rho}{d\sigma} = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \end{cases} \quad (2.15)$$

Для интегрирования (2.15) применялись встроенные процедуры из компьютерного пакета Mathematica (см. Приложение 1). Нижняя граница интервала интегрирования принималась равной нулю ($\sigma=0$), верхняя граница определялась подбором. Система (2.21) интегрировалась со следующими начальными условиями

$$\begin{cases} \zeta(0) = 0 \\ \rho(0) = 1 \end{cases} \quad (2.16)$$

Построенные профили оболочек, полученные численным интегрированием (2.15) с учетом (2.16) представлены на Рис. 2.5 и 2.6

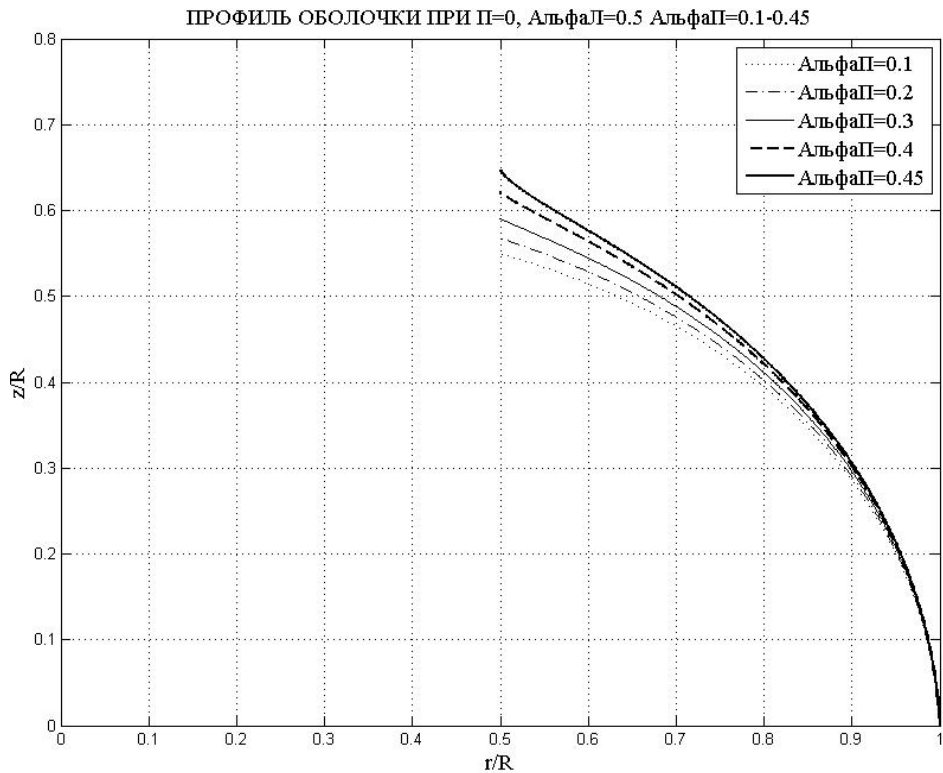


Рис. 2.5. Равновесные профили сетчатой оболочки при

$$\Pi=0, \alpha_L=0.5, \alpha_P=\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.45\}$$

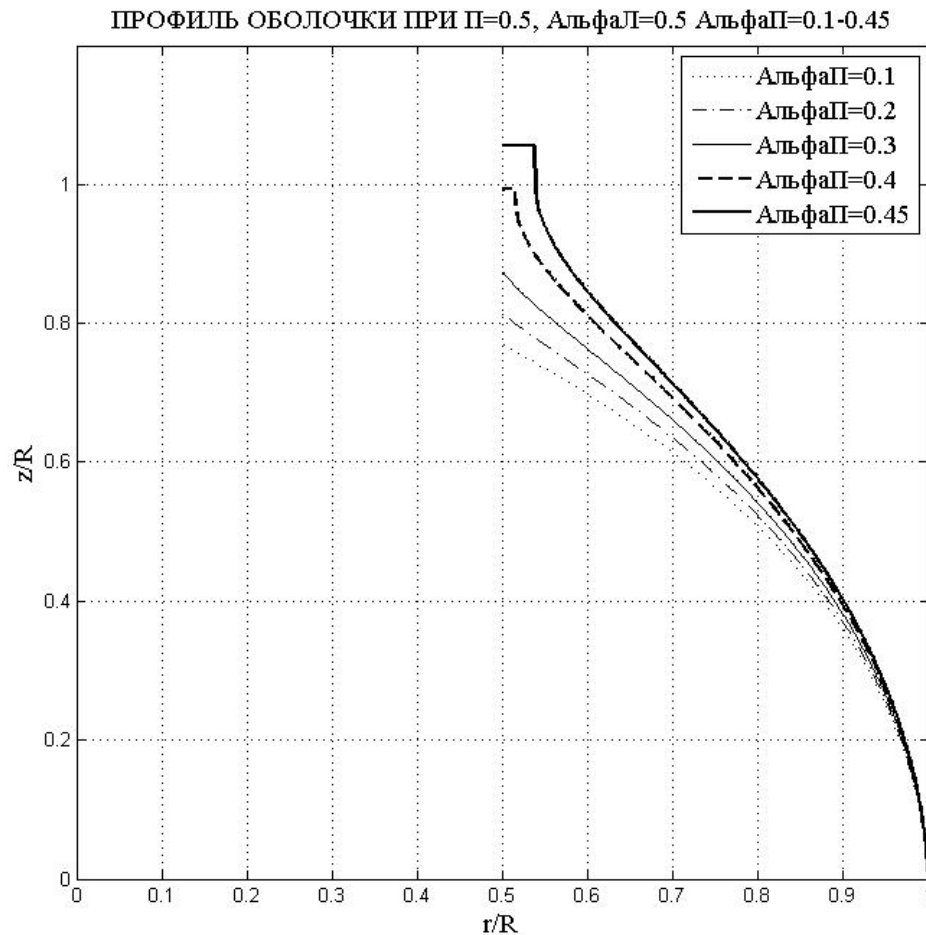


Рис. 2.6. Равновесные профили сетчатой оболочки при

$$\Pi=0.5, \alpha_{Л}=0.5, \alpha_{П}=\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.45\}$$

2.3. Натяжение нитей при несимметричной укладке

Известно, что при симметричной укладке нитей геодезическая намотка обеспечивает постоянство натяжения по длине нити, такая оболочка является равнопрочной («изотензоид»). В связи с этим большой интерес представляет вопрос о законе натяжения нитей при несимметричной укладке. Для вычисления натяжения нитей примем, что количество нитей левого и правого семейств в оболочке равны $v_{П}$ и $v_{Л}$.

Из равенства нулю крутящего момента или из условия $S=0$ получаем

$$v_{П} N_{П} \sin \beta_{П} = v_{Л} N_{Л} \sin \beta_{Л} \quad (2.17)$$

Связь мембранного усилия с натяжениями нитей вытекает из уравнения равновесия части оболочки в проекции на ось оболочки

$$2\pi r T_1 = v_{II} N_{II} \cos \beta_{II} + v_{JI} N_{JI} \cos \beta_{JI} \quad (2.18)$$

Уравнения (2.17) и (2.18) можно рассматривать как систему двух уравнений относительно натяжения нитей. Решением этой системы являются формулы

$$\begin{aligned} v_{II} N_{II} &= 2\pi r T_1 \frac{\sin \beta_{JI}}{\sin(\beta_{JI} + \beta_{II})} \\ v_{JI} N_{JI} &= 2\pi r T_1 \frac{\sin \beta_{II}}{\sin(\beta_{JI} + \beta_{II})} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Таким образом, для вычисления натяжения нитей необходимо вычислить мембранное усилие T_1 . Из уравнения равновесия $2\pi r T_1 \sin \theta = P_0 + p\pi r^2$ следует

$$T_1 = \frac{P_0 + p\pi r^2}{2\pi r \sin \theta} \quad (2.20)$$

Поставляя (2.19) в (2.20) и учитывая формулу (2.10a) для $\sin \theta$ получаем окончательные выражения для натяжений в нитях (2.21)

$$\begin{aligned} N_{II} &= \frac{1}{v_{II}} (\pi p R^2 + P_0) \frac{\sin \beta_{II}}{\sin(\beta_{JI} + \beta_{II})} \left(\frac{\sin(\beta_{*JI} - \beta_{*II}) / \sin(\beta_{*JI} + \beta_{*II})}{\sin(\beta_{JI} - \beta_{II}) / \sin(\beta_{JI} + \beta_{II})} \right)^{1/2} \\ N_{JI} &= \frac{1}{v_{JI}} (\pi p R^2 + P_0) \frac{\sin \beta_{JI}}{\sin(\beta_{JI} + \beta_{II})} \left(\frac{\sin(\beta_{*JI} - \beta_{*II}) / \sin(\beta_{*JI} + \beta_{*II})}{\sin(\beta_{JI} - \beta_{II}) / \sin(\beta_{JI} + \beta_{II})} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Прочность сетчатых оболочек в основном определяется прочностью нитей, поэтому для оценки прочности достаточно сопоставить полученные натяжения нитей с допустимыми:

$$\begin{aligned} N_{II} &\leq [N], \\ N_{JI} &\leq [N]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.4. Пример расчета напряженно–деформированного состояния сетчатой оболочки с несимметричной укладкой нитей по геодезическим линиям

В качестве примера рассчитаем полностью напряженно – деформированное состояние сетчатой оболочки с несимметричной укладкой нитей по геодезическим линиям, определяемой параметрами

$$\frac{c_{\perp}}{R} = 0.3; \quad \frac{c_{\parallel}}{R} = 0.5; \quad \Pi = 0.5 .$$

Наклон нормали полностью определяется заданными параметрами и формулой (2.10) (Рис. 2.7).

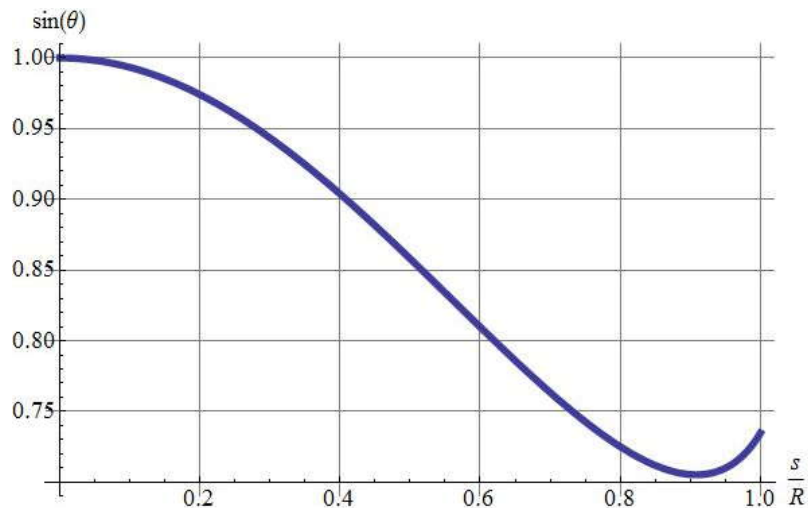


Рис. 2.7. Синус угла θ

Профиль оболочки, рассчитанный по методике, изложенной в п. 2.2, имеет вид, показанный на Рис. 2.8.

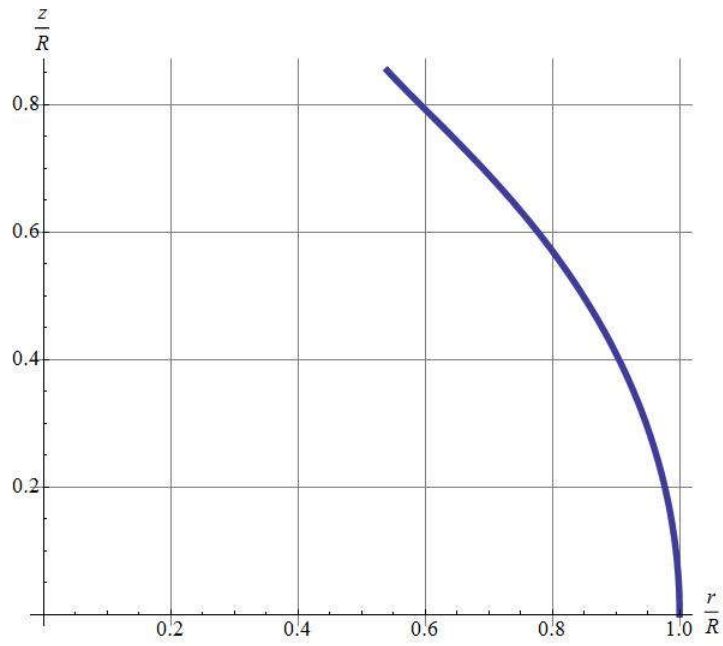


Рис. 2.8. Профиль равновесной конфигурации оболочки

Мембранные усилия были найдены по формулам (2.20) и (2.3).
Графики мембранных усилий показаны на Рис. 2.9. и 2.10.

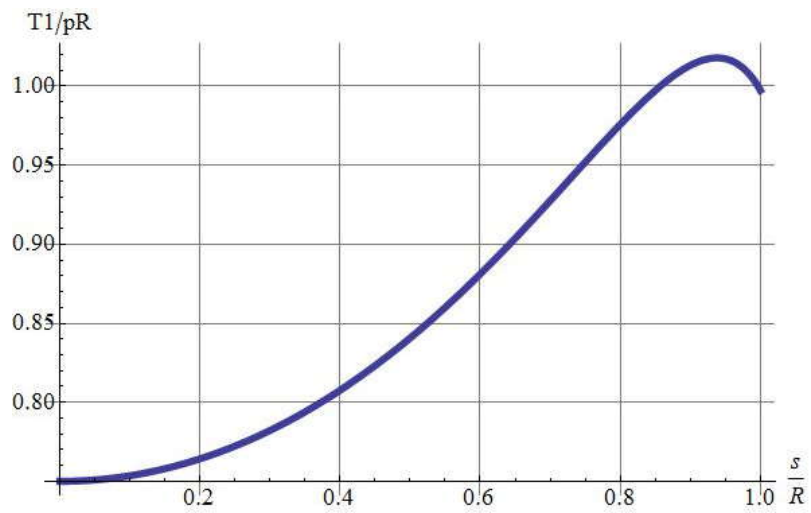


Рис. 2.9. Мембранное усилие T_1

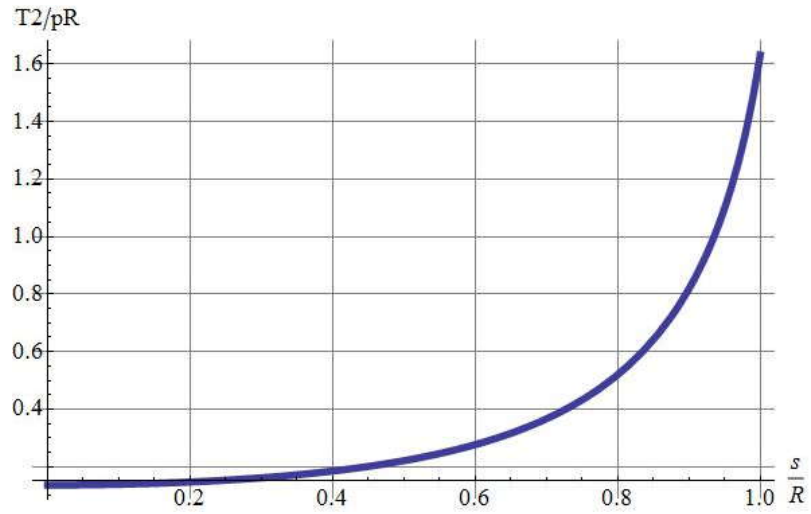


Рис. 2.10. Мембранное усилие T_2

Натяжения нитей были определены по формулам (2.21). Графики натяжений нитей показаны на Рис. 2.11 и 2.12.

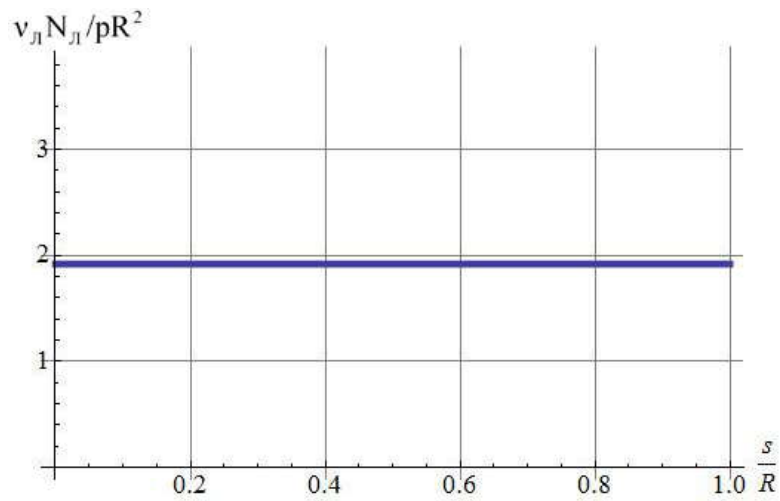


Рис. 2.11. Натяжение левого семейства N_l

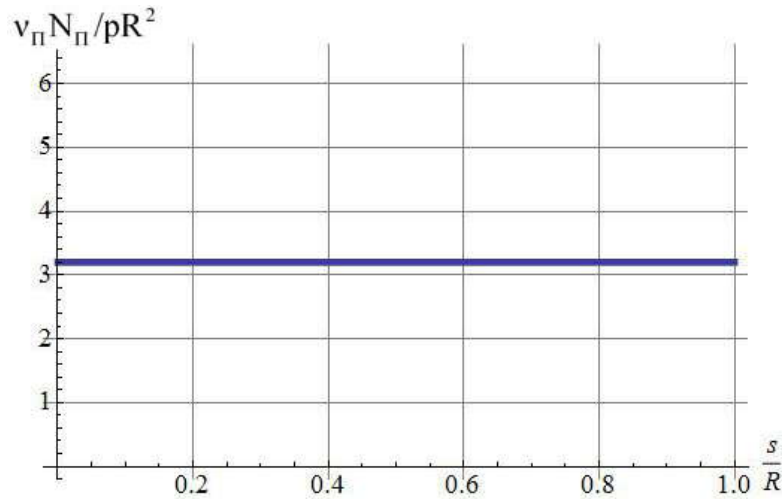


Рис. 2.12. Натяжение правого семейства N_{π}

Полученные графики показывают, что натяжение нитей каждого семейства остается постоянным даже при несимметричной укладке, при этом отношение величин натяжения согласно (2.17) равно отношению синусов углов укладки, которое для рассматриваемого случая также является постоянным.

2.5. Контроль полученных соотношений сопоставлением с симметричной укладкой

Очевидно, что в предельном случае $\beta_{\pi} \rightarrow \beta_{\text{л}}$, соотношения полученные для несимметричной укладки должны переходить в аналогичные соотношения для симметричной укладки. Указанный предельный переход, однако, требует сложных математических выкладок. Гораздо проще сопоставить численные результаты. Рассмотрим несимметричную укладку нитей по геодезическим линиям с параметрами $\frac{c_{\text{л}}}{R} = 0.500$; $\frac{c_{\text{п}}}{R} = 0.499$. Хотя это несимметричная укладка, но отличие от симметричной составляет всего 0.2%. Поэтому формулы, полученные в п. 2.3 должны давать практически те же результаты, что и формулы для симметричной укладки.

В случае симметричной укладки по геодезическим линиям классическая теория сетчатых оболочек приводит к соотношениям [22]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \beta = \frac{c}{r} \\ \sin \theta = \frac{p\pi r^2 + P_0 \cos \beta^*}{p\pi R^2 + P_0 \cos \beta} \\ T_1 = \frac{P_0 + p\pi R^2 \cos \beta}{2\pi r \cos \beta^*} \\ N = \frac{P_0 + p\pi R^2}{v \cos \beta^*} \end{array} \right. , \quad (2.23)$$

где $\sin \beta^* = \frac{c}{R}$.

Форма оболочки, рассчитанная по методике п. 2.3 для несимметричной укладки и на основании уравнений (2.23) симметричной укладки показана на Рис. 2.13.

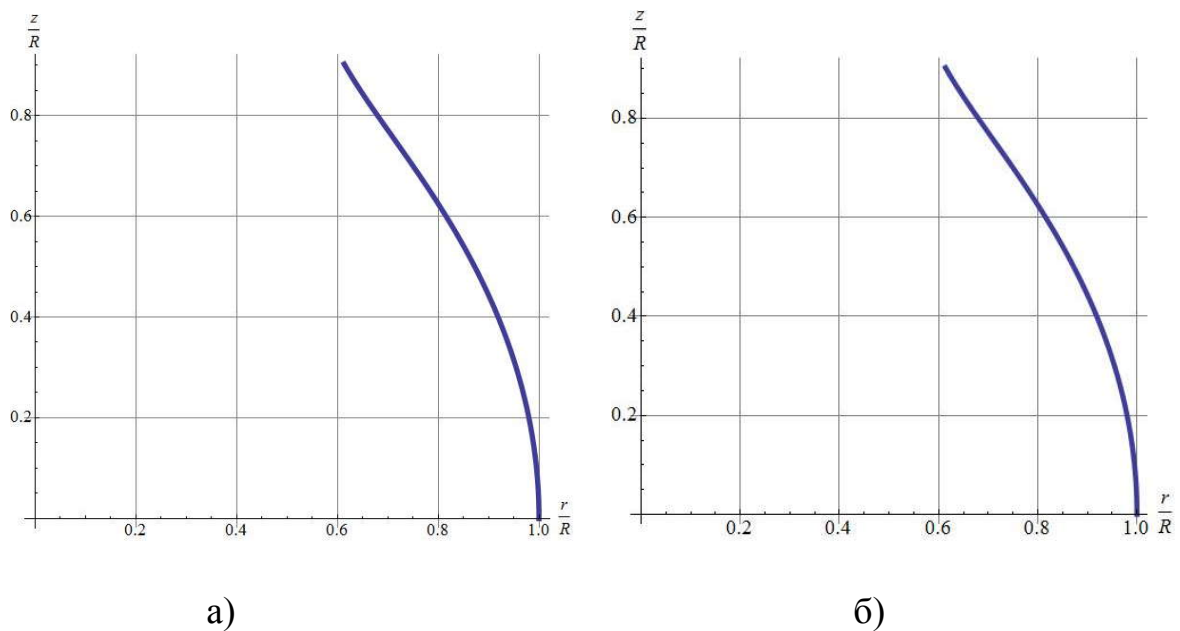


Рис. 2.13. Профили оболочки (а – несимметричная укладка $\frac{c_{II}}{R} = 0.500$; $\frac{c_{II}}{R} = 0.499$, б – симметричная укладка $\frac{c}{R} = 0.500$)

Сопоставление, выполненное на Рис. 2.13 показывает, что получаются идентичные профили.

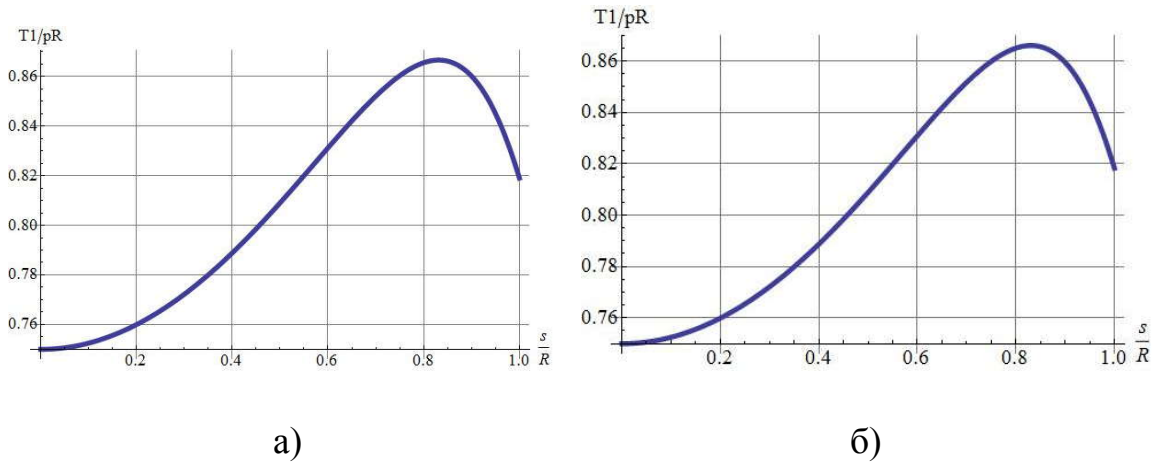


Рис. 2.14. Мембранные усилия T_1 (а – несимметричная укладка

$$\frac{c_L}{R} = 0.500; \frac{c_{II}}{R} = 0.499, \text{ б – симметричная укладка } \frac{c}{R} = 0.500)$$

Мембранные усилия, рассчитанные по методике п. 2.3 для несимметричной укладки и на основании уравнений (2.23) симметричной укладки показаны на Рис. 2.14. Графики получились также идентичными.

Наибольший интерес при сопоставлении вызывает натяжение нитей. Натяжения нитей правого и левого семейств, найденные по методике п. 2.3 показаны на Рис. 2.15 и 2.16.

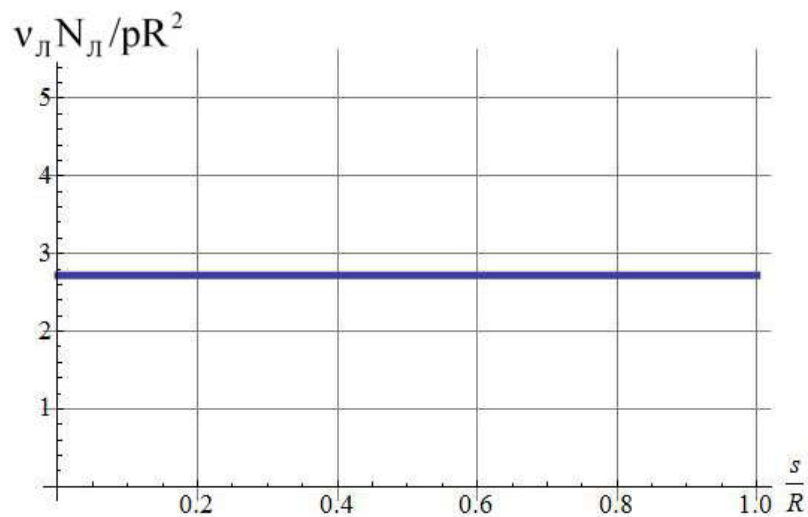


Рис. 2.15. Натяжение нитей левого семейства $N_L = 2.72252 pR^2 / v_L$

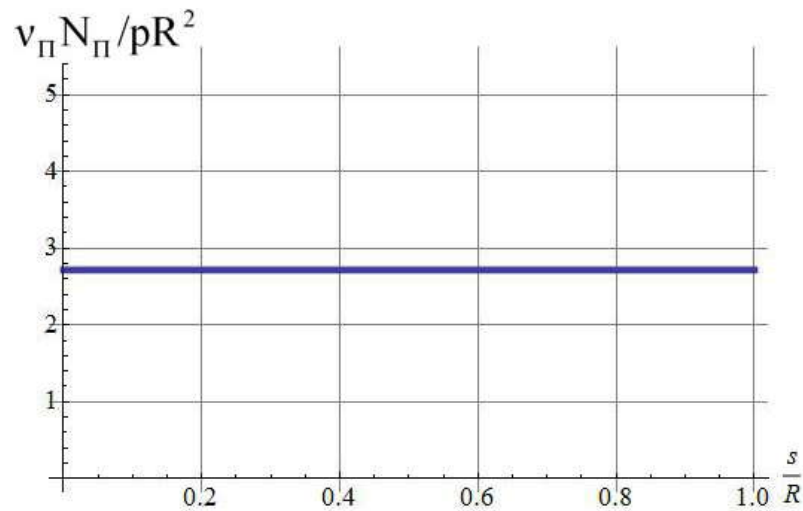


Рис. 2.16. Натяжение нитей правого семейства $N_{II} = 2.71707 pR^2 / v_{II}$

Как показывают вычисления, натяжения нитей обоих семейств отличаются в четвертом знаке, что соответствует заложенному в расчете различию в законе укладке нитей левого и правого семейства 0.2%. Расчет натяжения нитей в случае симметричной укладки по соотношениям (2.23) при $\frac{c}{R} = 0.500$ приводит к постоянному значению (Рис. 2.17)

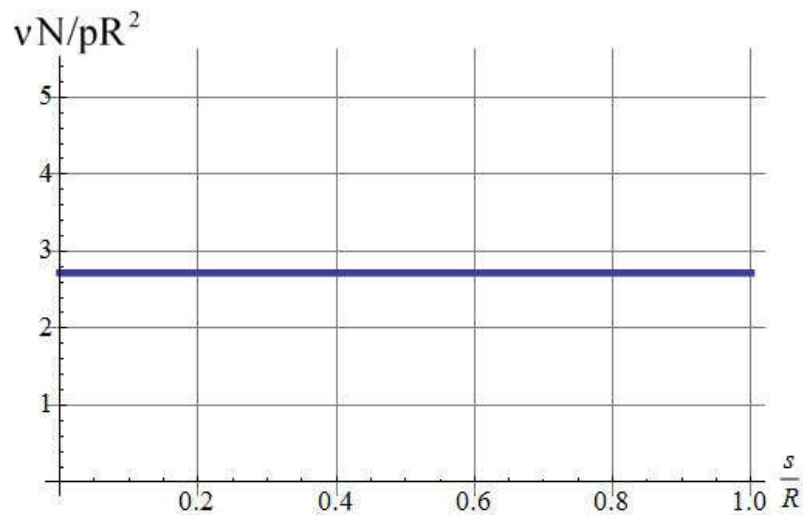


Рис. 2.17. Натяжение нитей в случае симметричной укладки $N = 2.7207 pR^2 / v$

Натяжения нитей, показанные на графиках (Рис. 2.15, 2.16 и 2.17), отличаются лишь в четвертом знаке.

Таким образом, показано, что соотношения, полученные для несимметричной укладки нитей, успешно проходят проверку на случай стремления несимметричной укладки к симметричной.

Выводы по главе 2:

1). Разработана методика расчета и построения равновесных профилей сетчатых оболочек с несимметричной укладкой нитей.

2). В случае несимметричной геодезической намотки основное уравнение, определяющее равновесную конфигурацию оболочки, проинтегрировано в аналитическом виде, что позволило свести построения равновесного профиля оболочки к вычислению квадратур.

3). Представлены примеры построения равновесных профилей сетчатых оболочек с несимметрично уложенными нитями при различных значениях безразмерных параметров, а также приведен пример расчета напряженно – деформированного состояния такой оболочки.

4). Показано, что в случае несимметричной геодезической намотки, натяжение в нитях каждого семейства остается постоянным, причем отношение натяжений равно отношению синусов углов укладки нитей.

5). Выполнено сопоставление со случаем симметричной геодезической намотки (В.Л. Бидерман и др.). Показано, что соотношения, полученные для несимметричной геодезической намотке нитей, успешно проходят численную проверку на случай стремления несимметричной укладки к симметричной.

ГЛАВА 3. БОЛЬШИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С НЕСИММЕТРИЧНО УЛОЖЕННЫМИ НИТЯМИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ И УСТРОЙСТВО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАВЛЕНИЯ В КРУТЯЩИЙ МОМЕНТ

Большие перемещения характерны для резинокордных оболочек, свойства которых хорошо изучены в случае симметричной укладки нитей. Основным деформируемым элементом такой оболочки является ромб, образованный нитями. Угол между диагоналями ромба остается прямым в процессе деформирования.

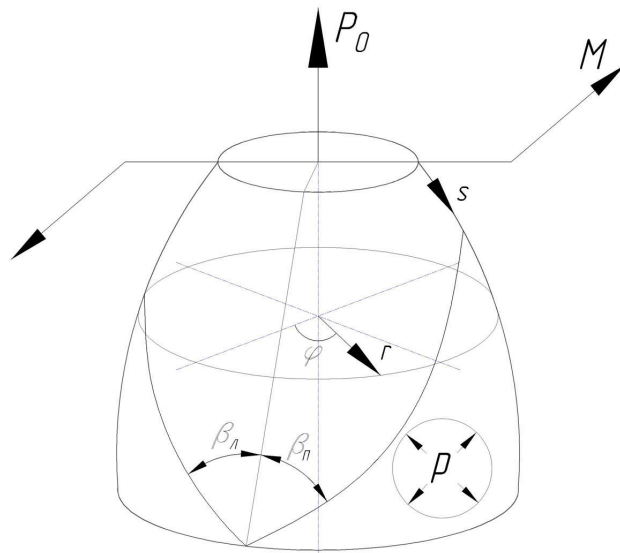


Рис. 3.1. Оболочка с несимметричным расположением нитей

под действием осесимметричных нагрузок

Существует мало изученный класс сетчатых оболочек вращения, в которых углы укладки нитей правого и левого семейств не совпадают (Рис. 3.1). Это может быть вызвано различными причинами:

- специальная укладка нитей под разными углами;
- погрешность изготовления;
- изменение углов вследствие приложения осевого крутящего момента.

При несимметричной укладке нитей вместо ромба необходимо рассматривать параллелограмм из нерастяжимых или малорастяжимых нитей. Угол между диагоналями параллелограмма, образованного нитями, меняется в процессе деформирования, что приводит к новому эффекту – оболочка закручивается. Этот эффект может оказаться полезным, например, для преобразования давления в угол закручивания или в крутящий момент. Кроме того, связь изменения углов наклона нитей с изменением радиуса становится существенно более сложной, чем в случае $\beta_{II} = \beta_{II}$.

В данной главе разработана методика расчета перемещений и мембранных усилий при больших перемещениях для безмоментных сетчатых оболочек вращения произвольной формы меридиана с несимметрично уложенными нитями. Выводятся геометрические соотношения для этого класса оболочек. Нелинейная краевая задача для системы дифференциальных уравнений сетчатой оболочки решена методом пристрелки. Приведены примеры построения равновесных профилей и определения мембранных усилий для рассмотренного класса сетчатых оболочек при различных сочетаниях внешних нагрузок и их изменения. Получены формулы для учета растяжимости нитей и предложен функционал, учитывающий жесткость связующего.

3.1. Геометрические соотношения сетчатой оболочки с несимметрично уложенными нитями

Стенка сетчатой оболочки вращения образована сетью из двух несимметрично расположенных систем нитей (Рис. 3.1). В случае нерастяжимых нитей для описания геометрии такой оболочки достаточно всего трех функций

$$\begin{aligned} r_0 &= r_0(s_0), \\ \beta_{II0} &= \beta_{II0}(s_0), \\ \beta_{II0} &= \beta_{II0}(s_0), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где индексом «0» помечены величины, относящиеся к исходному недеформированному состоянию. Для резинокордной оболочки к исходному можно отнести состояние после вулканизации, но можно и более раннее состояние до вулканизации при сборке оболочки на барабане (обычно цилиндрическом).

Исследуем геометрию деформирования сетчатой оболочки с несимметричной укладкой нитей, при которой срединная поверхность оболочки остается поверхностью вращения. Для этого рассмотрим бесконечно малый треугольный элемент оболочки, образованный нерастяжимыми нитями и дугой окружности поперечного сечения (Рис. 3.2).

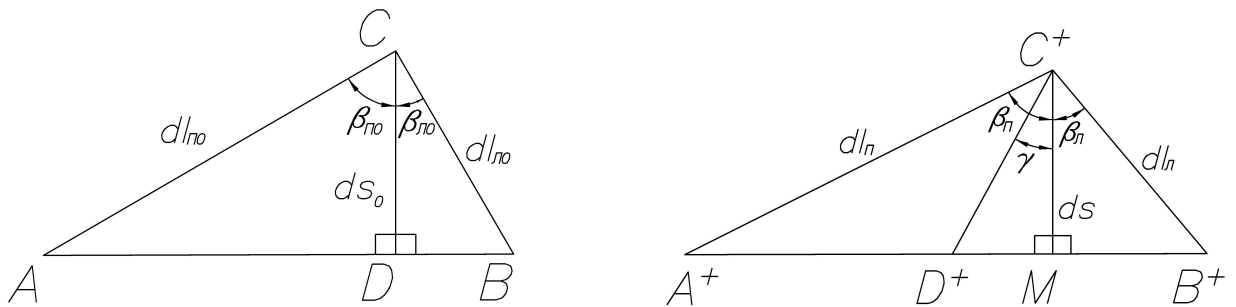


Рис. 3.2. Треугольный элемент до и после деформации

(левый - до деформации; правой - после деформации)

Нижняя сторона треугольника представляет собой элемент длины окружности, на который приходится полярный угол $d\varphi$. Из Рис. 3.2. следуют геометрические соотношения для основания и высоты треугольника в исходном и актуальном состояниях:

$$\begin{aligned}
 ds_0 &= dl_{n0} \cos \beta_{n0} = dl_{л0} \cos \beta_{л0} \\
 r_0 d\varphi &= dl_{n0} \sin \beta_{n0} + dl_{л0} \sin \beta_{л0} \\
 ds &= dl_{n0} \cos \beta_{n0} = dl_{л0} \cos \beta_{л0} \\
 r d\varphi &= dl_{n0} \sin \beta_{n0} + dl_{л0} \sin \beta_{л0}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Из соотношений (3.2) следует, что углы наклона нитей при любых деформациях должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{cases} \frac{\cos \beta_{II}}{\cos \beta_{II}} = \alpha(s_0) \\ \frac{\sin \beta_{II} + \alpha(s_0) \sin \beta_{II}}{r} = 2\chi(s_0) \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\alpha(s_0)$ и $\chi(s_0)$ – известные функции, определяемые по исходной конфигурации оболочки (3.1) с помощью соотношений (3.4):

$$\begin{cases} \alpha(s_0) = \frac{\cos \beta_{II0}(s_0)}{\cos \beta_{II0}(s_0)} \\ \chi(s_0) = \frac{\sin \beta_{II0}(s_0) + \alpha(s_0) \sin \beta_{II0}(s_0)}{2r_0(s_0)} = \frac{\sin(\beta_{II0}(s_0) + \beta_{II0}(s_0))}{2r_0(s_0) \cos \beta_{II0}(s_0)} \end{cases} \quad (3.4)$$

Для оболочки, собранной на цилиндрическом барабане, величины определяемые соотношениями (3.4) являются постоянными. В этом случае соотношения (3.3) упрощаются

$$\begin{cases} \frac{\cos \beta_{II}}{\cos \beta_{II}} = \alpha = const \\ \frac{\sin \beta_{II} + \alpha \sin \beta_{II}}{r} = 2\chi = const \end{cases} \quad (3.5)$$

Соотношения (3.5) обобщают так называемую «шинную» геометрию нитей на случай несимметричной укладки нитей. Именно в связи с этим для преемственности с [22] параметр в (3.5) обозначен 2χ . Тогда в случае симметричной укладки из (3.5) следует обычное для шинной геометрии нитей соотношение $\sin \beta = \chi r$, точно совпадающее с [22].

Для перехода от исходной конфигурации к деформированной удобно ввести параметр Ламе A – местный масштаб меридиональной координаты:

$$A = \frac{ds}{ds_0} = \frac{\cos \beta_{II}}{\cos \beta_{II0}} = \frac{\cos \beta_{II}}{\cos \beta_{II0}} \quad (3.6)$$

Полезное геометрическое соотношение получается из сопоставления площадей треугольников. Площади треугольников на Рис. 3.2 могут быть

найлены либо через высоту и основание, либо через длины нитей и углы между ними:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} r_0 d\varphi ds_0 &= \frac{1}{2} dl_{\Pi 0} dl_{\mathcal{L} 0} \sin(\beta_{\Pi 0} + \beta_{\mathcal{L} 0}) \\ \frac{1}{2} r d\varphi ds &= \frac{1}{2} dl_{\Pi} dl_{\mathcal{L}} \sin(\beta_{\Pi} + \beta_{\mathcal{L}}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из соотношений (3.6) и (3.7) следует система трех уравнений (3.8), которая связывает три неизвестных параметра $\beta_{\Pi}, \beta_{\mathcal{L}}$ и A между собой:

$$\begin{cases} \frac{\cos \beta_{\Pi}}{\cos \beta_{\Pi 0}} = A \\ \frac{\cos \beta_{\mathcal{L}}}{\cos \beta_{\mathcal{L} 0}} = A \\ \frac{r}{r_0} = \frac{1}{A} \frac{\sin(\beta_{\Pi} + \beta_{\mathcal{L}})}{\sin(\beta_{\Pi 0} + \beta_{\mathcal{L} 0})} \end{cases} \quad (3.8)$$

Система (3.8) может быть решена аналитически, т. е., параметры $\beta_{\Pi}, \beta_{\mathcal{L}}$ и A могут быть явно выражены через r с помощью тригонометрических тождеств. Из системы (3.3), которая равносильна (3.8), следует

$$\begin{cases} \cos \beta_{\Pi} - \alpha \cos \beta_{\mathcal{L}} = 0 \\ \sin \beta_{\Pi} + \alpha \sin \beta_{\mathcal{L}} = 2\chi r \end{cases} \quad (3.9)$$

Возводя в квадрат и суммируя уравнения (3.9) друг с другом получим

$$\cos(\beta_{\Pi} + \beta_{\mathcal{L}}) = \frac{1}{2\alpha} (1 + \alpha^2 - 4\chi^2 r^2) \quad (3.10)$$

Аналогичное выражение может быть записано и для величин с индексом «0». Далее $\sin(\beta_{\Pi} + \beta_{\mathcal{L}})$ в (3.8) выражаются через $\cos(\beta_{\Pi} + \beta_{\mathcal{L}})$ из (3.10), в результате получаются явные выражения для $\beta_{\Pi}, \beta_{\mathcal{L}}$ и A через r

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{r_0 \sqrt{4\alpha^2 - (1 + \alpha^2 - 4\chi^2 r^2)^2}}{r \sqrt{4\alpha^2 - (1 + \alpha^2 - 4\chi^2 r_0^2)^2}} \\ \beta_{II} = \arccos(A \cos \beta_{II0}) \\ \beta_{II} = \arccos(A \cos \beta_{II0}) \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Отметим, что при выводе (3.11) не предполагалось, что параметры $r_0, \beta_{II0}, \beta_{II0}$ постоянны, т.е. выражения (3.11) пригодны для произвольной начальной формы сетчатой оболочки (не обязательно цилиндрической) и для произвольных законов укладки нитей.

Из геометрических величин большой интерес представляет также угол закручивания поперечных сечений оболочки. Для его определения найдем наклон линии, которая в исходном состоянии была меридианом. Для этого вычислим длины отрезков на Рис. 3.2.

$$\begin{aligned} |AD| &= ds_0 \operatorname{tg} \beta_{II0} \\ |DB| &= ds_0 \operatorname{tg} \beta_{II0} \end{aligned} \quad (3.12)$$

При деформациях меняется радиус окружности и отрезки, лежащие на окружности, изменяются пропорционально увеличению радиуса:

$$\begin{aligned} |A^+ D^+| &= \frac{r}{r_0} ds_0 \operatorname{tg} \beta_{II0} \\ |D^+ B^+| &= \frac{r}{r_0} ds_0 \operatorname{tg} \beta_{II0} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Тангенс угла наклона линии меридиана равен

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{|D^+ M|}{ds} = \frac{|D^+ B^+| - |MB^+|}{ds} = \frac{\frac{r}{r_0} ds_0 \operatorname{tg} \beta_{II0} - ds \operatorname{tg} \beta_{II}}{ds} = \frac{r}{Ar_0} \operatorname{tg} \beta_{II0} - \operatorname{tg} \beta_{II} \quad (3.14)$$

Если использовать для определения угла γ другую сторону треугольника, то получится (3.15)

$$tg\gamma = tg\beta_{II} - \frac{1}{A} \frac{r}{r_0} tg\beta_{II0} \quad (3.15)$$

Очевидно, что соотношения (3.14) и (3.15) являются тождественными в силу полученных ранее геометрических соотношений. Покажем это

$$\begin{aligned} tg\gamma - tg\gamma' &= tg\beta_{II} - \frac{1}{A} \frac{r}{r_0} tg\beta_{II0} - \left(\frac{r}{Ar_0} tg\beta_{II0} - tg\beta_{II} \right) = \\ &= \frac{\sin(\beta_{II} + \beta_{II})}{\cos\beta_{II} \cos\beta_{II}} - \frac{r \sin(\beta_{II0} + \beta_{II0})}{Ar_0 \cos\beta_{II0} \cos\beta_{II0}} \equiv 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Тождественное равенство нулю в (3.16) следует из (3.8).

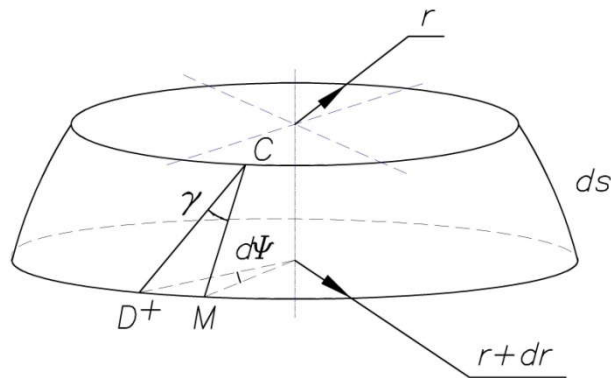


Рис. 3.3. Относительный поворот сечений оболочки

По найденному углу наклона меридиана и Рис. 3.3 находится дифференциальное уравнение для угла закручивания сечения оболочки вокруг оси симметрии:

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{tg\gamma}{r} = \frac{tg\beta_{II}}{r} - \frac{tg\beta_{II0}}{Ar_0} = \frac{tg\beta_{II0}}{Ar_0} - \frac{tg\beta_{II}}{r} \quad (3.17)$$

3.2. Система дифференциальных уравнений для расчета больших перемещений сетчатых оболочек с несимметрично уложенными нитями

Напряженно-деформированное состояние сетчатой оболочки описывается известными уравнениями равновесия безмоментной оболочки,

записанными для актуального состояния, и известными геометрическими соотношениями [22]:

$$\begin{cases} \frac{d(T_1 r)}{r ds} - \frac{T_2}{r} \cos \theta = 0 \\ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = p \\ \frac{dr}{ds} = \cos \theta \\ \frac{dz}{ds} = \sin \theta \end{cases} \quad (3.18)$$

где T_1 , T_2 - мембранные силы в меридиональном и окружном направлениях (Рис. 2.3), z - осевая координата, R_1 , R_2 - главные радиусы кривизны, θ - угол наклона нормали к оси.

Главные кривизны удобно выразить через угол наклона нормали, согласно [22]:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\sin \theta}{r} \quad (3.19)$$

Мембранные усилия связаны соотношением, полученным в первой главе

$$T_2 = S(\operatorname{tg} \beta_{II} - \operatorname{tg} \beta_{II}) + T_1 \operatorname{tg} \beta_{II} \operatorname{tg} \beta_{II} \quad (3.20)$$

При этом сдвигающая сила элементарно выражается через крутящий момент

$$S = \frac{M}{2\pi r^2} \quad (3.21)$$

Соотношения (3.18)-(3.21) совместно с (3.6) и (3.11) образуют следующую замкнутую систему дифференциальных и алгебраических уравнений (3.22):

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{d(T_1 r)}{ds_0} = AT_2 \cos \theta \\
\frac{d\theta}{ds_0} = \frac{A}{T_1} \left(p - \frac{\sin \theta}{r} T_2 \right) \\
\frac{dr}{ds_0} = A \cos \theta \\
\frac{dz}{ds_0} = A \sin \theta \\
T_2 = S(\operatorname{tg} \beta_{II} - \operatorname{tg} \beta_{II}) + T_1 \operatorname{tg} \beta_{II} \operatorname{tg} \beta_{II} \\
S = \frac{M}{2\pi r^2} \\
A = \frac{r_0 \sqrt{4\alpha^2 - (1 + \alpha^2 - 4\chi^2 r^2)^2}}{r \sqrt{4\alpha^2 - (1 + \alpha^2 - 4\chi^2 r_0^2)^2}} \\
\beta_{II} = \arccos(A \cos \beta_{II0}) \\
\beta_{II} = \arccos(A \cos \beta_{II0})
\end{array} \right. \quad (3.22)$$

Последние пять алгебраических соотношений фактически выражают дополнительные переменные β_{II} , β_{II} , A , S , T_2 через основные r и T_1 . Дополнительные переменные с помощью этих соотношений могут быть исключены из системы, что целесообразно делать непосредственно на этапе программирования (см. приложение 2). Так как система уравнений (3.22) фактически приведена к канонической форме Коши (после исключения дополнительных неизвестных), то для ее решения подходит любая программа численного интегрирования дифференциальных уравнений из любого математического пакета.

Дифференциальное уравнение для угла закручивания (3.23)

$$\frac{d\psi}{ds_0} = A \frac{\operatorname{tg} \beta_{II}}{r} - \frac{\operatorname{tg} \beta_{II0}}{r_0} = \frac{\operatorname{tg} \beta_{II0}}{r_0} - A \frac{\operatorname{tg} \beta_{II}}{r} \quad (3.23)$$

целесообразно интегрировать после решения системы (3.22), так как это уравнение является независимым. Фактически вычисление угла закручивания свелось к квадратуре.

3.3. Учет растяжимости нитей

Для растяжимых нитей соотношения (3.2) для деформированного состояния заменяются следующими

$$\begin{aligned} ds &= (1 + \varepsilon_{II}) dl_{II0} \cos \beta_{II} = (1 + \varepsilon_{LI}) dl_{LI0} \cos \beta_{LI} \\ rd\varphi &= (1 + \varepsilon_{II}) dl_{II0} \sin \beta_{II} + (1 + \varepsilon_{LI}) dl_{LI0} \sin \beta_{LI} \end{aligned} \quad (3.24)$$

где ε_{II} , ε_{LI} - деформации нитей.

С учетом (3.2) и определения для масштаба A это приводит к системе, аналогичной (3.8)

$$\begin{cases} (1 + \varepsilon_{II}) \frac{\cos \beta_{II}}{\cos \beta_{II0}} = A \\ (1 + \varepsilon_{LI}) \frac{\cos \beta_{LI}}{\cos \beta_{LI0}} = A \\ \frac{r}{r_0} = \frac{(1 + \varepsilon_{II})(1 + \varepsilon_{LI}) \sin(\beta_{II} + \beta_{LI})}{A \sin(\beta_{II0} + \beta_{LI0})} \end{cases} \quad (3.25)$$

Если считать, что деформации нитей известны, то из (3.25) или (3.24) можно получить соотношения аналогичные (3.26)

$$\begin{cases} \frac{\cos \beta_{II}}{\cos \beta_{LI}} = \alpha_\varepsilon \\ \frac{\sin \beta_{II} + \alpha_\varepsilon \sin \beta_{LI}}{r} = 2\chi_\varepsilon \end{cases} \quad (3.26)$$

где α_ε и χ_ε – функции, определяемые по исходной конфигурации оболочки и деформациям нитей:

$$\begin{cases} \alpha_\varepsilon = \frac{(1+\varepsilon_L) \cos \beta_{L0}}{(1+\varepsilon_H) \cos \beta_{H0}} \\ \chi_\varepsilon = \frac{\sin(\beta_{H0} + \beta_{L0})}{2(1+\varepsilon_H)r_0 \cos \beta_{L0}} \end{cases} \quad (3.27)$$

причем все величины в (3.27) в общем случае переменны, т.е. являются функциями координаты s_0 . Так как (3.26) по форме полностью совпадает с (3.3), то и решение будет аналогичным (за исключением мелких деталей)

$$\begin{cases} A = \frac{(1+\varepsilon_H)(1+\varepsilon_L) r_0}{\sin(\beta_{H0} + \beta_{L0}) r} \sqrt{1 - \frac{(1+\alpha_\varepsilon^2 - 4\chi_\varepsilon^2 r^2)^2}{4\alpha_\varepsilon^2}} \\ \beta_H = \arccos\left(\frac{A}{(1+\varepsilon_H)} \cos \beta_{H0}\right) \\ \beta_L = \arccos\left(\frac{A}{(1+\varepsilon_L)} \cos \beta_{L0}\right) \end{cases} \quad (3.28)$$

Таким образом, для учета растяжимости нитей достаточно в разрешающей системе уравнений (3.22) заменить последние 3 уравнения на (3.28).

Деформации нитей обычно невелики и связаны с натяжениями нитей линейными соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_H &= \frac{N_H}{E_n F} \\ \varepsilon_L &= \frac{N_L}{E_n F} \end{aligned} \quad (3.29)$$

где $E_n F$ - жесткость нити на растяжение. Натяжение нитей при этом находятся из системы

$$\begin{aligned} N_H \nu_H \cos \beta_H + N_L \nu_L \cos \beta_L &= 2\pi r T_1 \\ N_H \nu_H \sin \beta_H - N_L \nu_L \sin \beta_L &= 2\pi r S \end{aligned} \quad (3.30)$$

Учет растяжимости нитей можно выполнить за один раз: подставить (3.30) в (3.29), затем (3.29) в (3.27), (3.27) в (3.28) и, наконец (3.28) в (3.22). Эти подстановки уместно делать на этапе программирования. Процедура

NDSolve из пакета Mathematica допускает сочетание дифференциальных и алгебраических уравнений, что делает явные подстановки не нужными.

Другим вариантом является итерационный процесс. На первой итерации считаем нити нерастяжимыми. Далее по (3.29) и (3.30) находим деформации нитей и по (3.27) новые параметры α_ε , χ_ε . Затем выполняем следующую итерацию и так до тех пор, пока итерации не сойдутся. Опыт показывает, что при уровне деформаций нитей порядка 20% хватает обычно 3х - 4х итераций. При меньшем уровне деформаций уже 2я итерация является окончательной.

3.4. Пример расчета сетчатой оболочки

Система дифференциальных уравнений (3.22) решается сравнительно несложно. Ниже приводится пример расчета напряженно-деформированного состояния сетчатой оболочки шинной геометрии со следующими параметрами:

радиус цилиндрического барабана $r_0 = 90\text{мм}$,

исходная длина меридиана $l = 100\text{мм}$,

углы укладки нитей на барабане $\beta_{l0} = \frac{\pi}{6}$, $\beta_{\lambda 0} = \frac{\pi}{3}$ (и другие),

внутреннее давление $p = 0.2\text{МПа}$

$\alpha = \sqrt{3}$, $\chi = \frac{1}{r_0}$ (следует из (3.3)).

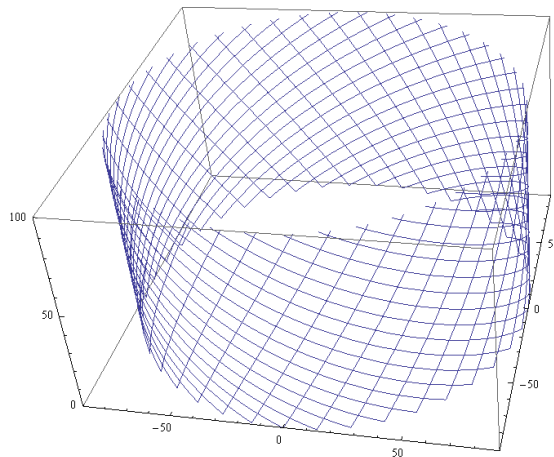


Рис. 3.4. Исходная конфигурация цилиндрической оболочки

Края оболочки $s_0 = 0$ и $s_0 = l$ соединяются с жесткими торцами радиуса r_0 . Кроме внутреннего давления оболочка нагружалась также крутящим моментом M или осевой силой P_0 (Рис. 3.1). Осевая сила задавалась в долях равнодействующей сил давления на торцы

$$P_0 = k \cdot p \pi r_0^2 \quad (3.31)$$

Нелинейная краевая задача для системы уравнений (3.22) решалась методом пристрелки. На опорном торце оболочки задавались все 4 граничных условия, необходимые для решения задачи Коши:

$$\begin{aligned} T_1(0) &= \frac{(k+1) p \pi r_0^2}{2 \pi r_0 \sin \theta_0} \\ \theta(0) &= \theta_0 \\ r(0) &= r_0 \\ z(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Единственным неизвестным параметром в (3.15) является начальный угол наклона нормали $\theta(0)$, который определялся подбором (метод пристрелки в сочетании с приемом половинного деления) из граничного условия на другом торце оболочки

$$r(l) = r_0 \quad (3.33)$$

Численное интегрирование уравнений (3.22) с начальными условиями (3.32) выполнялось методом Рунге-Кутты четвертого порядка с использованием встроенных процедур пакетов MATLAB и Mathematica.

Результаты расчёта представлены в виде графиков. На Рис. 3.5. показано изменение конфигурации сетчатой оболочки при изменении осевой силы. Равновесная конфигурация отлична от цилиндрической даже при нулевой осевой силе ($k=0$). Это говорит о том, что исходная конфигурация сетчатой оболочки не является равновесной $tg \beta_{l0} tg \beta_{l0} = tg \frac{\pi}{6} tg \frac{\pi}{3} \neq 2$.

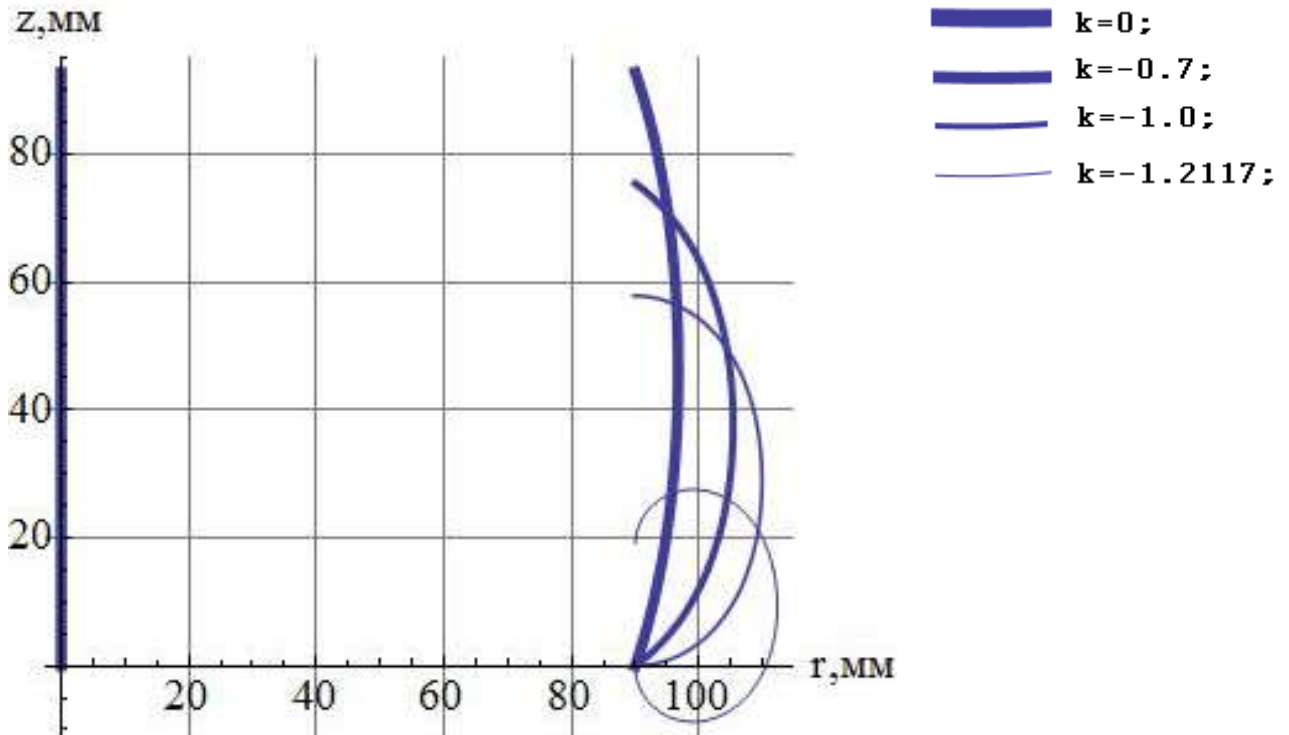


Рис. 3.5. Форма меридиана деформированной оболочки при $M=0$, $P_0=k\pi r_0^2$

На основании результатов представленных на Рис. 3.5 может быть построена *упругая характеристика* этой оболочки, если ее рассматривать как упругий элемент. Распределение мембранных усилий у углов укладки нитей для тех же случаев нагружения показано на Рис. 3.6-3.8

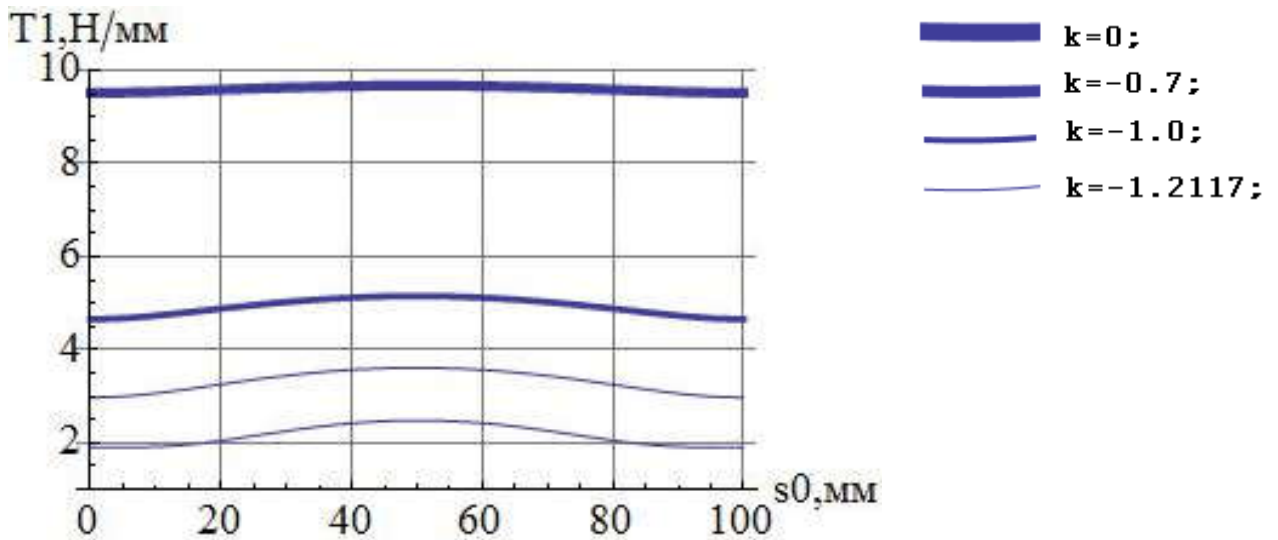


Рис. 3.6. Мембранные силы T_1 при $M=0$, $P_0=k\pi r_0^2$

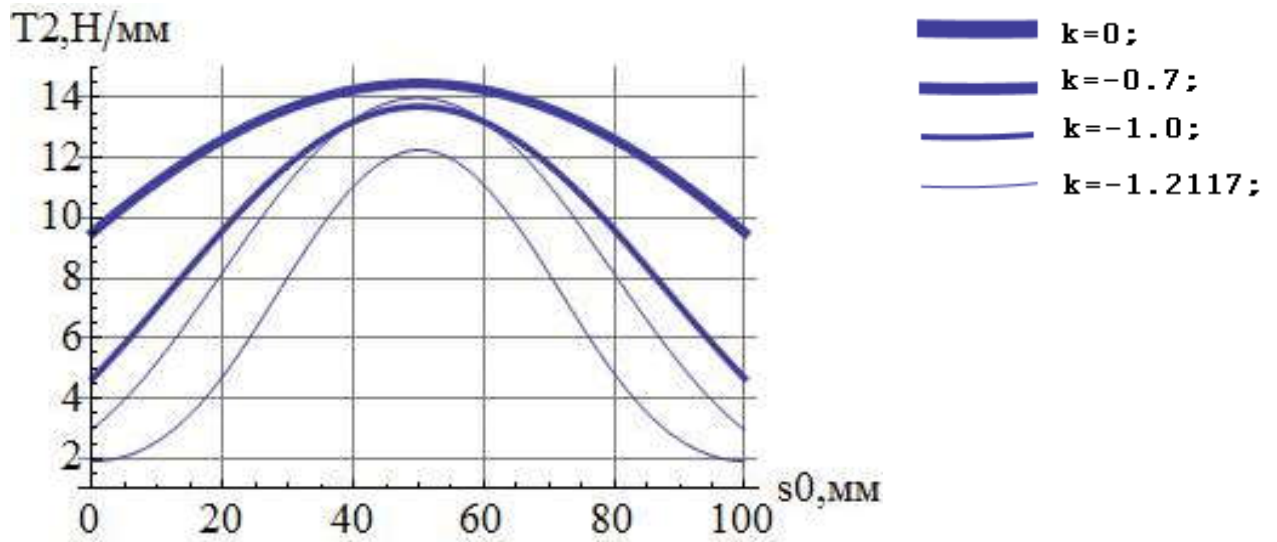


Рис. 3.7. Мембранные силы T_2 при $M=0$, $P_0=k\rho\pi r_0^2$

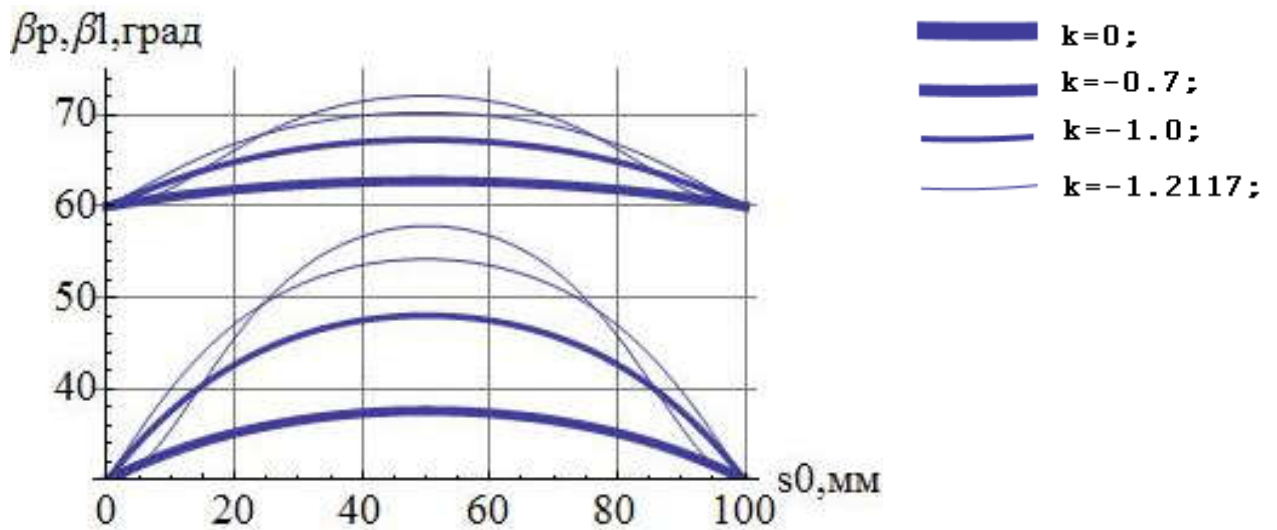


Рис. 3.8. Углы наклона нитей к меридиану при $M=0$, $P_0=k\rho\pi r_0^2$

По известному усилию T_1 и найденным углам нитей и радиусам s помощью (3.30) могут быть найдены усилия в нитях для расчета на прочность.

Интерес представляет влияние крутящего момента на конфигурацию оболочки при разных углах укладки нитей (Рис. 3.9).

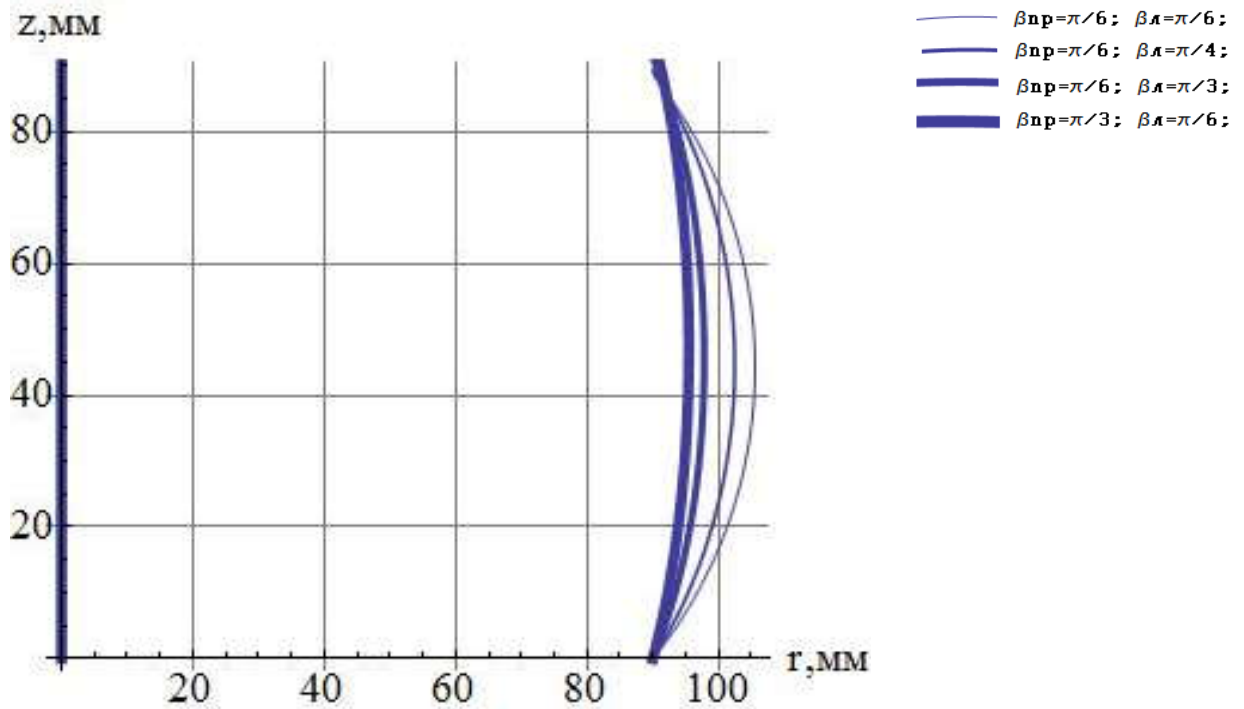


Рис. 3.9. Форма меридиана деформированной оболочки при $M=100\text{Нм}$, $P_0=0$

При одинаковых углах укладки нитей момент не оказывает никакого влияния на конфигурацию оболочки. Так для углов $\beta_{л0} = \beta_{н0} = \frac{\pi}{6}$ равновесные конфигурации при приложении крутящего момента и при его отсутствии одинаковы. При несимметричной укладке это не так, например, согласно Рис. 3.9. перестановка углов $\pi/3$ и $\pi/6$ местами меняет конфигурацию оболочки. Все же следует отметить, что для рассмотренной оболочки крутящий момент влияет на конфигурацию не очень значительно.

Если нити приняты растяжимыми, то расчет выполняется по той же схеме, но с использованием (3.27) - (3.30). Для иллюстрации учета растяжимости были приняты следующие параметры оболочки:

- радиус цилиндрического барабана $r_0 = 90\text{мм}$,
- исходная длина меридиана $l = 100\text{мм}$,
- углы укладки нитей на барабане $\beta_{л0} = \frac{\pi}{6}$, $\beta_{н0} = \frac{\pi}{3}$,
- внутреннее давление $p = 5.0\text{ МПа}$,

- площадь поперечного сечения нитей $F = 0.05 \text{ мм}^2$,
- модуль упругости $E_n = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$,
- число нитей правого и левого семейств $\nu_{\Pi} = \nu_{\text{Л}} = 200$.

Давление было существенно повышено для того, чтобы сделать деформации нитей более заметными. Распределение деформаций нитей по меридиану показано на Рис. 3.10

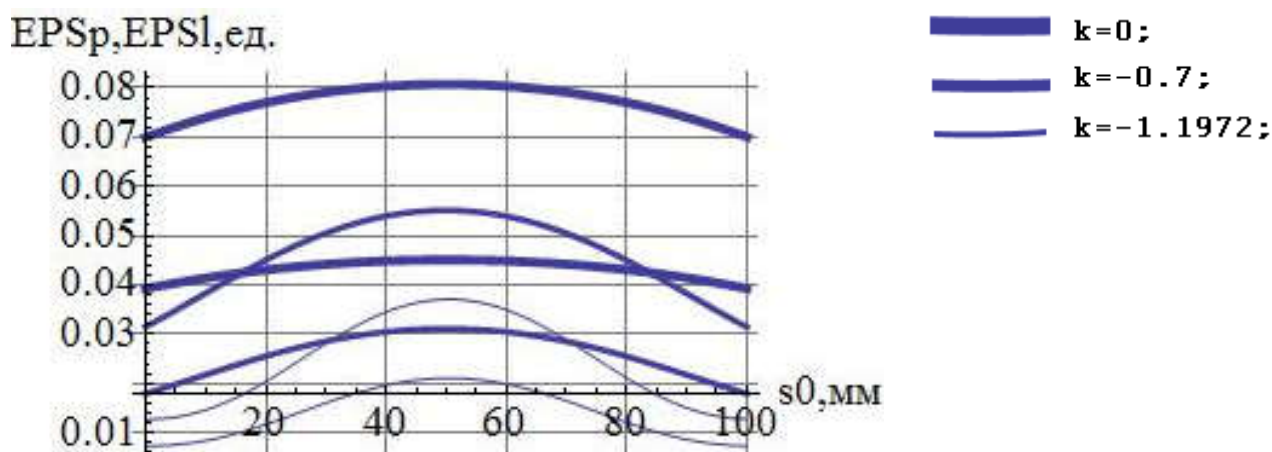


Рис. 3.10. Деформации нитей при $M=0, P_0=k\rho r_0^2$

Более деформированными оказались нити правого семейства, как и должно быть согласно (3.29) и (3.30) при $S=0$, причем при $k=0$ отношение деформаций близко к 1.7 т.е. к отношению синусов углов укладки нитей в исходном состоянии. Натяжения нитей связаны с деформациями линейными соотношениями (3.29), т.е. натяжения нитей распределены аналогично.

Конфигурация оболочки, найденной с учетом растяжимости нитей (Рис. 3.11) при данном уровне деформаций нитей визуально практически не отличается от случая нерастяжимых нитей (Рис. 3.5)

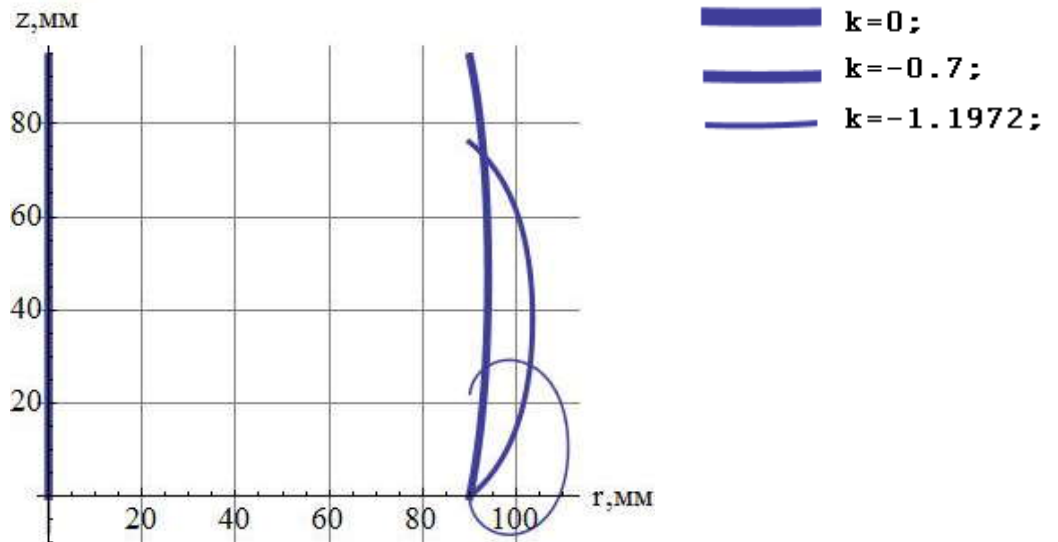


Рис. 3.11. Форма меридиана деформированной оболочки при $M=0$,

$$P_0 = k r \pi r_0^2, \text{ найденная с учетом деформаций нитей}$$

Угол закручивания оболочки при необходимости рассчитывается по (3.23), причем это соотношение не меняет вида при переходе к растяжимым нитям. На Рис. 3.12 показана конфигурация оболочки из нерастяжимых нитей и соответствующий ей угол закручивания $\psi(s_0)$, найденный по (3.23)

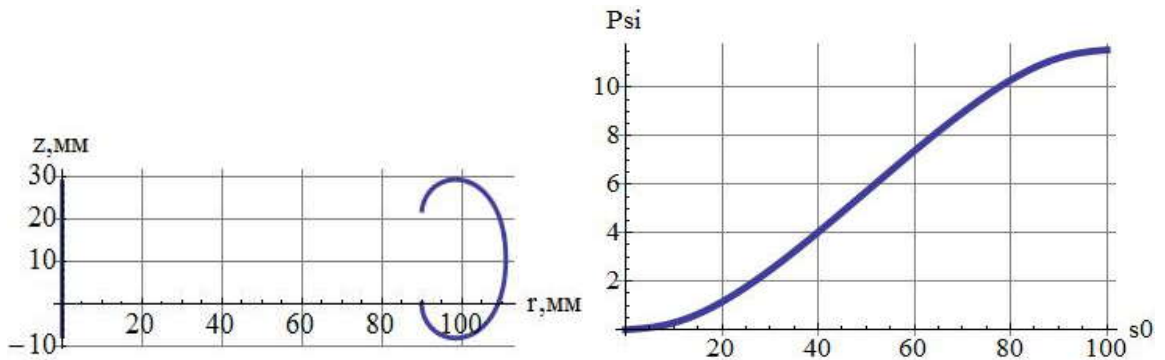


Рис. 3.12. Конфигурация оболочки из нерастяжимых нитей и угол закручивания поперечного сечения (град.) при $M=0$, $P_0 = k r \pi r_0^2$, $k = -1.1972$

Оболочка раскручивается в правом направлении, т.е. правые углы наклона нитей (они меньше) стремятся увеличиться, а левые углы (они больше) стремятся уменьшиться.

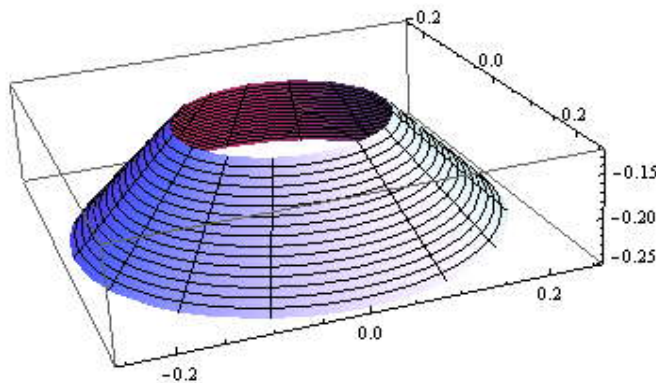
Хотя в примере был рассмотрен сравнительно простой случай сетчатой оболочки, параметры которой постоянны в исходном состоянии (это

характерно для оболочек шинной геометрии), алгоритм и программа расчета практически без изменений применима для любых сетчатых оболочек произвольной формы меридиана и произвольного закона укладки нитей обоих семейств. При другой начальной геометрии достаточно задать всего лишь набор из трех функций, характеризующих начальную конфигурацию:

$$\begin{aligned} r_0 &= r_0(s_0), \\ \beta_{\Pi 0} &= \beta_{\Pi 0}(s_0), \\ \beta_{Л 0} &= \beta_{Л 0}(s_0). \end{aligned}$$

Кроме того, если нити растяжимы, то дополнительно указывается количество нитей каждого семейства в оболочке и жесткость каждой нити. В случае нелинейно упругих нитей корда вместо жесткости должна быть задана упругая характеристика нитей.

Чтобы проиллюстрировать это, ниже приведен пример оболочки, которая в исходном состоянии была конической со следующими параметрами:



$$\begin{aligned} r_0 &= s_0 \cos \frac{\pi}{4}, \\ \beta_{\Pi 0} &= \frac{\pi s_0}{4 R}, \\ \beta_{Л 0} &= \frac{\pi s_0}{6 R}, \end{aligned}$$

Рис. 3.13. Общий вид исходной конфигураций конической оболочки где R - нижнее основание конуса, дуга s_0 отсчитывается от вершины конуса

Расчет равновесной конфигурации оболочки производился тем же алгоритмом при этом параметры $\alpha(s_0)$ и $\chi(s_0)$ были предварительно найдены по исходным 3-м заданным функциям. Радиусы днищ равны $R/2$ и R . Дуга меридиана s_0 изменялась в пределах от $R/\sqrt{2}$ до $\sqrt{2}R$. В результате была найдена равновесная конфигурация оболочки, нагруженной только давлением и закрытой непроницаемыми днищами (Рис. 3.14, 3.15).

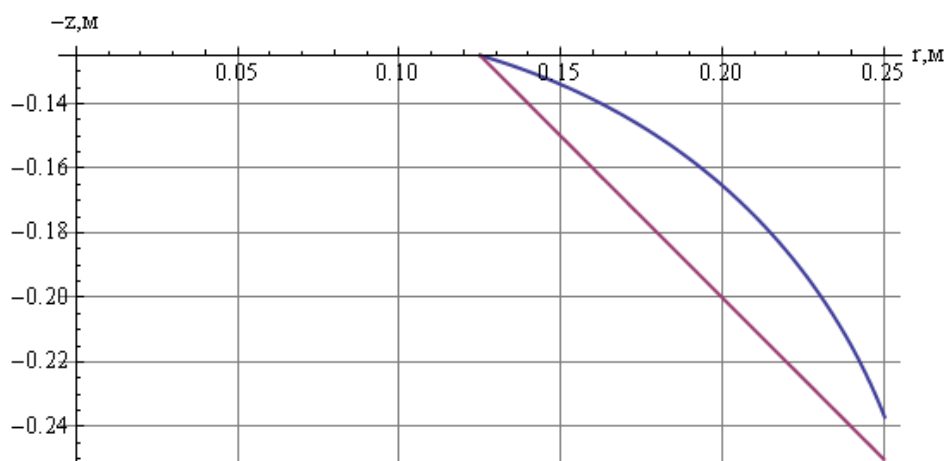


Рис. 3.14. Форма меридиана исходной и деформированной конической оболочки

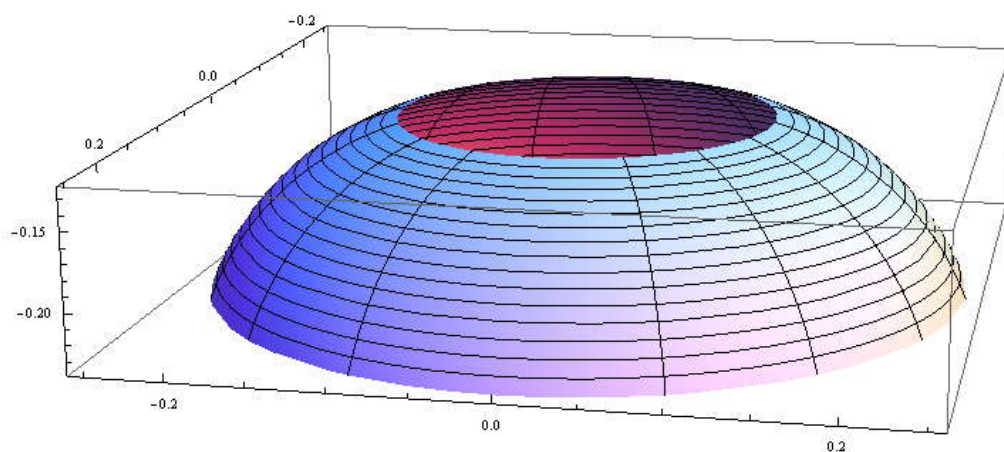
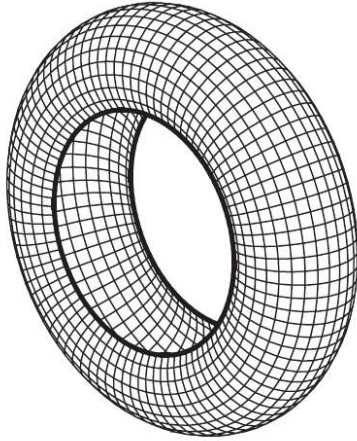


Рис. 3.15. Общий вид деформированной оболочки с исходной конической формой

Компьютерная программа расчета оболочки для этого примера приведена в приложении 2.

Приведем еще пример торовой сетчатой оболочки близкой по конфигурации и другим параметрам к реальной автомобильной шине (диагональной):



$$l = 650 \text{ мм},$$

$$r(0) = r(l) = r_0 = 295 \text{ мм},$$

$$p = 0.2 \text{ МПа},$$

$$\nu_{II} = \nu_{LI} = 1000,$$

$$1) \text{ Вариант 1: } \beta_{II}(0) = \beta_{LI}(0) = 35^\circ.$$

$$2) \text{ Вариант 2: } \beta_{II}(0) = 30^\circ, \beta_{LI}(0) = 45^\circ.$$

Рис. 3.16. Общий вид конфигураций торовой оболочки

Реальная шина многослойная. В этом примере другие слои (брекер) не учитываются, т. е. рассматривается только каркас шины. Для сопоставления случаев симметричной и несимметричной укладки осевая нагрузка на оболочку была принята одинаковой ($P_0 = k r l_0^2$, $k = -1.4$). Полученные в результате расчета конфигурации и натяжения нитей представлены на Рис. 3.17, 3.18.

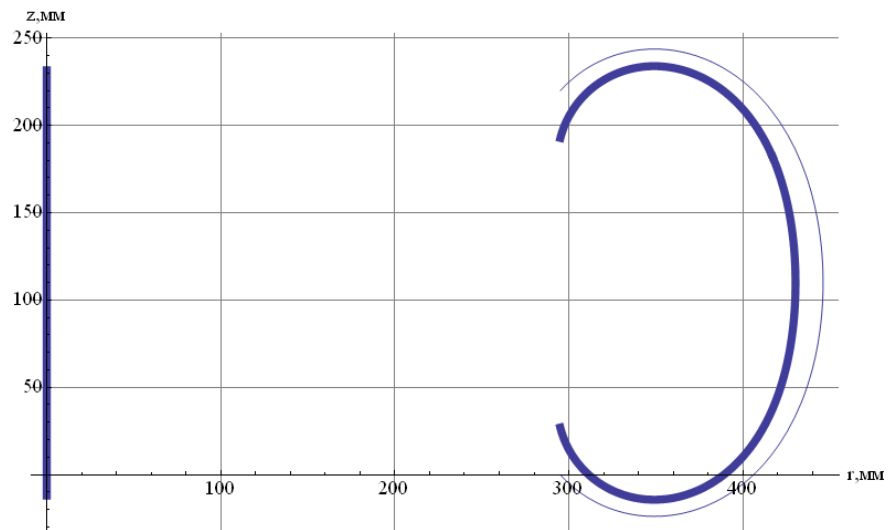


Рис. 3.17. Конфигурации торовой оболочки с симметричным (тонкая линия) и несимметричным расположением нитей

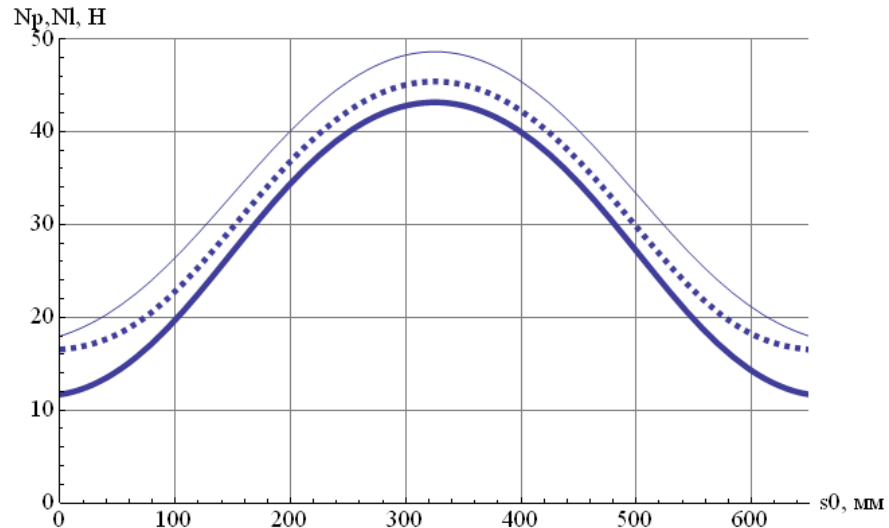


Рис. 3.18. Натяжения нитей торовой оболочки с симметричным (тонкая линия) и несимметричным расположением нитей (левое семейство – штриховая линия)

Сопоставление показывает, что переход от симметричной укладки к несимметричной при тех же нагрузках несколько снижает максимальные натяжения в нитях, т. е. повышает прочность конструкции. Аналогичный вывод сделан в [138]. Кроме того, в [138] сказано: «...*несимметричное относительно меридиана армирование позволяет реализовать значительно более широкий спектр НДС оболочки, чем армирование по симметричным схемам... Таким образом, существуют области параметров..., в которых интенсивности напряжений невелики и, в тоже время, конструкция не является столь жесткой, как при реализации соответствующих интенсивностей напряжений в симметричном случае, что, в частности, особенно важно для обеспечения необходимого сцепления с поверхностью автомобильных и авиационных шин.*».

В реальной шине осевая сила P не задается, так как это сила со стороны обода. Обращая задачу (сила P не задается, а находится) получаем, что несимметричная укладка может снизить нагрузку со стороны шины на обод.

3.5. Полный потенциал сетчатой оболочки при осесимметричных деформациях и его минимизация

Вместо интегрирования дифференциальных уравнений те же результаты можно получать на основе минимизации полного потенциала механической системы. Альтернативный способ решения открывает широкие возможности контроля уравнений и результатов. При этом удается удобно учесть и энергию деформаций резины.

Вся оболочка разбивается на небольшие конические участки (конечные элементы), границами которых являются дуги $s_{00}, s_{01}, s_{02}, \dots, s_{0n}$.

Полной потенциал каждого конического КЭ сетчатой оболочки состоит из нескольких частей: U_n - энергия деформаций нитей; U_c - энергия деформаций связующего (резины); V - потенциал внутреннего давления, приложенного к оболочке; V_q - потенциал других внешних нагрузок, приложенных к поверхности оболочки и к подвижному днищу:

$$\begin{aligned} \Pi &= U_n + U_c + V + V_q, \\ U_n &= \int_{s_{0j}}^{s_{0j+1}} \left(\frac{\nu_{II}}{\cos \beta_{II0}} E_n F \frac{\varepsilon_{II}^2}{2} + \frac{\nu_{LI}}{\cos \beta_{LI0}} E_n F \frac{\varepsilon_{LI}^2}{2} \right) ds_0, \\ U_c &= \int_{s_{0j}}^{s_{0j+1}} \frac{E h_{np}}{2(1-\mu^2)} \left(\varepsilon_1^2 + 2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1-\mu}{2} \gamma_{12}^2 \right) ds_0, \\ V &= -p \int_{s_{0j}}^{s_{0j+1}} \pi r^2 \frac{dz}{ds_0} ds_0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$ - меридиональная, окружная и угловая деформации; $E_n F$ - жесткость нитей, h_{np} - приведенная толщина по В.Л. Бидерману; E - модуль упругости резины; μ - коэффициент Пуассона резины ($\mu = 0.5$).

Степенями свободы КЭ являются u_1, u_2 - радиальные перемещения; w_1, w_2 - осевые перемещения; ψ_1, ψ_2 - осевые повороты сечений.

Для всех неизвестных величин принимается линейный закон распределения по дуге конечного элемента:

$$\begin{aligned}
 r &= r_0(s_0) + u_1 N_1 + u_2 N_2, \\
 z &= z_0(s_0) + w_1 N_1 + w_2 N_2, \\
 \psi &= \psi_1 N_1 + \psi_2 N_2, \\
 N_1 &= 1 - \frac{s_0 - s_{01}}{s_{02} - s_{01}}, \\
 N_2 &= \frac{s_0 - s_{01}}{s_{02} - s_{01}},
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

где N_1, N_2 - функции формы.

Деформации нитей, вызванные изменением геометрии, описываемым соотношениями (3.35) вычислялись по формулам (3.36)

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{II} &= \frac{1}{2} \left(g_{11} \cos^2 \beta_{II0} - 2g_{12} \cos \beta_{II0} \sin \beta_{II0} + g_{22} \sin^2 \beta_{II0} - 1 \right), \\
 \varepsilon_{JI} &= \frac{1}{2} \left(g_{11} \cos^2 \beta_{JI0} + 2g_{12} \cos \beta_{JI0} \sin \beta_{JI0} + g_{22} \sin^2 \beta_{JI0} - 1 \right), \\
 g_{11} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_0} \right)^2 = \left(\frac{dr}{ds_0} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds_0} \right)^2 + \left(r \frac{d\psi}{ds_0} \right)^2, \\
 g_{22} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{r_0 \partial \varphi} \right)^2 = \left(\frac{r}{r_0} \right)^2, \\
 g_{12} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{r_0 \partial \varphi} = \frac{r}{r_0^2} \frac{d\psi}{ds_0}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

(связь деформаций нитей с производными радиуса вектора см. в главе 4).

Минимизация функционала производилась процедурой FindMinimum пакета Mathematica, при этом интегралы в (3.34) вычислялись по формуле Симпсона (интеграл заменяется суммой значений на краях интервала и в центре интервала с весовыми коэффициентами 1/6, 4/6, 1/6).

Результат прямой минимизации функционала (3.34), вычисленного с учетом (3.35) и (3.36) приводит к форме деформированного меридиана показанной на Рис. 3.19

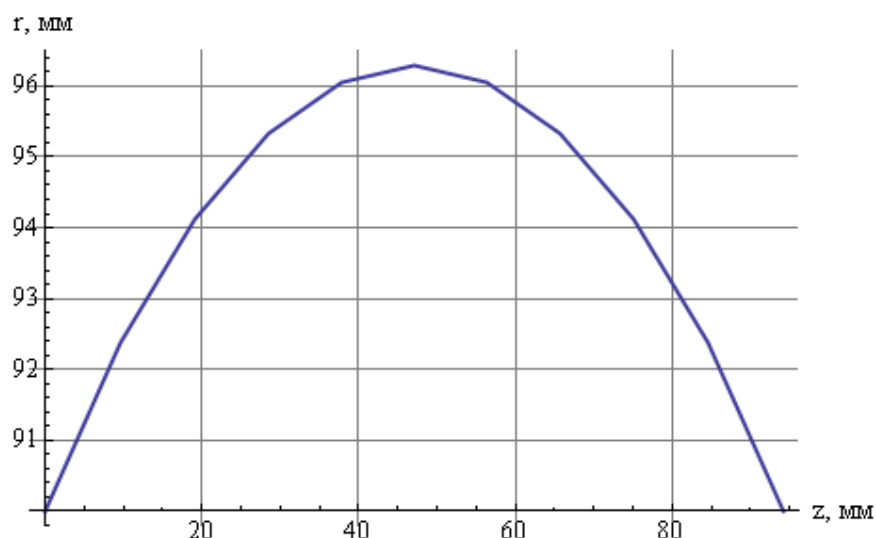


Рис. 3.19. Форма меридиана оболочки, найденная минимизацией функционала

Параметры задавались такими же, как в п. 3.4. Нагрузки при этом были равны: $p=0.2\text{МПа}$, $P_0=0\text{Н}$, $M_0=0\text{Нм}$. Деформации нитей при таком давлении составляют десятые доли процента, что практически не сказывается на форме меридиана, т. е. Рис. 3.19 соответствует Рис. 3.5 при $k=0$. Расхождение в результатах весьма незначительно. Листинг программы приведен в приложении 4.

Таким образом, подход, основанный на минимизации функционала, приводит к тем же результатам, что и интегрирование дифференциальных уравнений. Выполненное сопоставление показывает надежность полученных результатов и свидетельствует об отсутствии грубых ошибок и численных проблем в предыдущих пунктах данной главы.

3.6. Преобразование внутреннего давления в крутящий момент

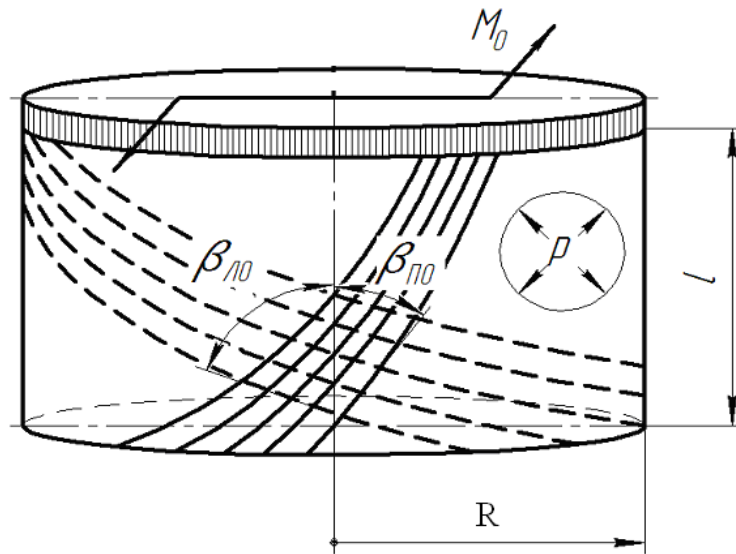


Рис. 3.20. Устройство для преобразования давления в крутящий момент

Цилиндрическая сетчатая оболочка, поворот днщ которой запрещен (осевые перемещения свободны), из нерастяжимых нитей не будет деформироваться под действием давления, так как нити расположены по кратчайшим линиям. Так как цилиндрическая форма сохраняется, то для мембранных усилий справедливы котельные формулы

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} pR, \\ T_2 &= pR. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Из основного соотношения (2.2) следует

$$S = \frac{T_2 - T_1 \operatorname{tg} \beta_{\Pi} \operatorname{tg} \beta_{\text{Л}}}{(\operatorname{tg} \beta_{\Pi} - \operatorname{tg} \beta_{\text{Л}})} = \frac{2 - \operatorname{tg} \beta_{\Pi} \operatorname{tg} \beta_{\text{Л}}}{2(\operatorname{tg} \beta_{\Pi} - \operatorname{tg} \beta_{\text{Л}})} pR \quad (3.38)$$

и

$$M_0 = 2\pi R^2 S = \frac{2 - \operatorname{tg} \beta_{\Pi} \operatorname{tg} \beta_{\text{Л}}}{(\operatorname{tg} \beta_{\Pi} - \operatorname{tg} \beta_{\text{Л}})} pR^3 \quad (3.39)$$

Обращение в нуль знаменателя не означает обращение крутящего момента в бесконечность. Скорее это означает, что система приобретает бесконечную жесткость по отношению к вращению вокруг оси.

Обнаруженная возможность применения сетчатых оболочек для создания крутящего момента может быть использована для страгивания приржавевшего крепежа и т.п. При необходимости по разработанной в этой главе методике может быть построена упругая характеристика такого устройства $M = M(\psi)$. Для упомянутой характеристики существенно то, что крутящий момент не будет равен нулю при нулевом угле закручивания $M(0)=M_0$.

Выводы по главе 3:

1). Разработана методика расчета напряженно - деформированного состояния сетчатых оболочек вращения с несимметрично уложенными нитями при произвольной начальной форме меридиана, произвольном законе укладки нитей обоих семейств и произвольных осесимметричных нагрузках.

2). Методика сведена к решению краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных обыкновенных уравнений, которую удалось привести к форме Коши (цепочкой последовательных подстановок). Новизна методики заключается в аналитическом решении системы трансцендентных уравнений, связывающей радиус и углы наклона нитей.

3). Показано, что учет деформаций нитей может быть произведен несложной модификацией той же системы уравнений, которая используется в случае нерастяжимых нитей.

4). Для вычисления угла закручивания получено дифференциальное уравнение независимое от остальных уравнений. Таким образом, расчет угла закручивания сведен к вычислению квадратуры.

5). Представлены примеры численного решения нелинейной краевой задачи для полученной системы дифференциальных уравнений методом пристрелки. Напряженно - деформированное состояние сетчатой оболочки исследовано при различных сочетаниях внешних нагрузок. Продемонстрирован учет растяжимости нитей и расчет угла закручивания.

6). Показано, что за счет перехода от симметричной укладка нитей к несимметричной при сохранении нагрузок можно несколько повысить прочность конструкции.

7). Предложено использовать эффект закручивания оболочки с несимметричной укладкой нитей для создания устройств, преобразующих давление в крутящий момент.

ГЛАВА 4. БОЛЬШИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКОНОМ УКЛАДКИ НИТЕЙ

Сетчатые оболочки, как правило, в исходном состоянии имеют форму оболочки вращения. Как показано в предыдущей главе, при основных видах нагружения – осевой силе и внутреннем давлении осесимметричная форма оболочки сохраняется, даже если углы нитей левого и правого семейства не одинаковы (каждый из углов при этом не меняется в окружном направлении).

Это положение резко меняется, если допустить переменные по окружности углы. В этом случае осесимметричная форма оболочки больше не будет равновесной. При приложении внутреннего давления оболочка может получить значительные поперечные перемещения.

Существенные отклонения от осевой симметрии получит даже оболочка вращения с симметрично уложенными нитями, если нагрузки на нее не обладают осевой симметрией (Рис. 4.1). Очевидными примерами таких нагрузок являются поперечная сила и изгибающий момент.

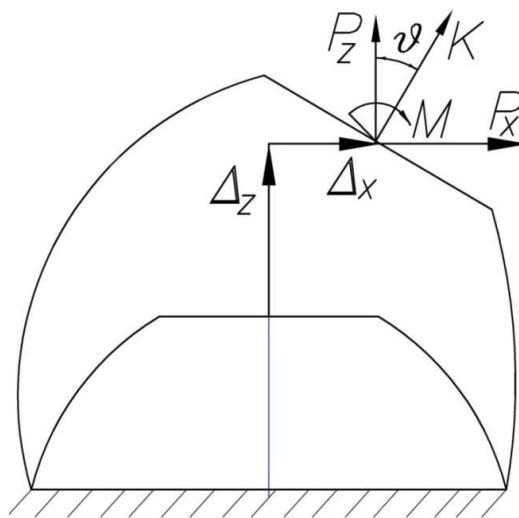


Рис. 4.1. Исходная и деформированная сетчатые оболочки

с приложенными к торцу внешними силами

Методика расчета таких оболочек на основе минимизации полного потенциала механической системы разработана в данной главе. В качестве приложений рассмотрены устройства управляемой упругой деформации на основе сетчатых оболочек и шинно - баллонная муфта.

4.1. Полный потенциал сетчатой оболочки вращения с переменными по меридиану и по окружной координате углами наклона нитей

Если в исходном состоянии сетчатая оболочка является оболочкой вращения, то удастся построить функционал с использованием обычных гауссовых координат s, φ .

Полной потенциал сетчатой оболочки состоит из нескольких частей: U_n - энергия деформаций нитей; U_c - энергия деформаций связующего (резины); V - потенциал внутреннего давления, приложенного к оболочке; Π_1 - потенциал сил давления и других нагрузок, приложенных к подвижному днищу:

$$\begin{aligned} \Pi &= U_n + U_c + V + \Pi_1, \\ U_n &= \int \int_{s_0 \varphi} \left(\frac{v_{II}}{2\pi \cos \beta_{II0}} E_n F \frac{\varepsilon_{II}^2}{2} + \frac{v_{LI}}{2\pi \cos \beta_{LI0}} E_n F \frac{\varepsilon_{LI}^2}{2} \right) ds_0 d\varphi, \\ U_c &= \int \int_{s_0 \varphi} \frac{E h_{np}}{2(1-\mu^2)} \left(\varepsilon_1^2 + 2\mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1-\mu}{2} \gamma_{12}^2 \right) ds_0 r_0 d\varphi, \\ V &= -p \int \int_{s_0 \varphi} \left(\frac{1}{3} \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_0} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right) ds_0 d\varphi. \end{aligned} \quad (4.1)$$

где \mathbf{r} - радиус - вектор деформированной поверхности оболочки; $\varepsilon_{II}, \varepsilon_{LI}$ - деформации нитей; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$ - меридиональная, окружная и угловая деформации; $E_n F$ - жесткость сечения нитей; E - модуль упругости резины; h_{np} - приведенная толщина по В.Л. Бидерману; μ - коэффициент Пуассона резины ($\mu = 0.5$).

Смешанное произведение $\frac{1}{3} \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_0} ds_0 \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\varphi$ в (4.1) представляет собой объем элементарной пирамиды, опирающейся на параллелограмм со сторонами $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_0} ds_0$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\varphi$.

Для вычисления деформаций составим градиент радиуса - вектора деформированной срединной поверхности оболочки

$$\nabla_0 \mathbf{r} = \mathbf{t}_{10} \otimes \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_0} + \mathbf{t}_{20} \otimes \frac{\partial \mathbf{r}}{r_0 \partial \varphi} \quad (4.2)$$

где \mathbf{t}_{10} , \mathbf{t}_{20} - орты координатных линий на осесимметричной равновесной конфигурации оболочки; \otimes - символ диадного (тензорного) произведения.

Важно заметить, что вектор ∇_0 , единичные орты и масштабы принадлежат исходной поверхности, т.е. являются известными. Через тензор $\nabla_0 \mathbf{r}$ может быть выражена мера деформации, известная в нелинейной теории упругости (см., например, [86]), как мера Коши-Грина $\mathbf{G} = \nabla_0 \mathbf{r} \cdot (\nabla_0 \mathbf{r})^T$.

По определению проекции градиента являются производными по направлению, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_{\Pi 0}} &= \mathbf{e}_{\Pi 0} \cdot \nabla_0 \mathbf{r} = \cos \beta_{\Pi 0} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_0} - \sin \beta_{\Pi 0} \frac{\partial \mathbf{r}}{r_0 \partial \varphi} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_{\Lambda 0}} &= \mathbf{e}_{\Lambda 0} \cdot \nabla_0 \mathbf{r} = \cos \beta_{\Lambda 0} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_0} + \sin \beta_{\Lambda 0} \frac{\partial \mathbf{r}}{r_0 \partial \varphi} \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $s_{\Pi 0}$, $s_{\Lambda 0}$ - дуги нитей левого и правого семейств в исходном состоянии; $\mathbf{e}_{\Pi 0}$, $\mathbf{e}_{\Lambda 0}$ - орты касательных к нитям в исходном состоянии.

Модули векторов (4.3) представляют собой кратности удлинений нитей. Деформации нитей вследствие малости могут быть вычислены через квадраты кратностей $(\lambda^2 - 1)/2 = ((1 + \varepsilon)^2 - 1)/2 = \varepsilon^2/2 + \varepsilon \approx \varepsilon$. Если нити нерастяжимы, то такой прием тем более справедлив (в сочетании с

использованием множителей Лагранжа). Представление деформаций нитей через квадраты кратностей приводит к выражениям:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{II} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_{II0}} \right)^2 - 1 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\cos^2 \beta_{II0} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_0} \right)^2 - 2 \cos \beta_{II0} \sin \beta_{II0} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{r_0 \partial \varphi} + \sin^2 \beta_{II0} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{r_0 \partial \varphi} \right)^2 - 1 \right) \\
 \varepsilon_{JI} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_{JI0}} \right)^2 - 1 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\cos^2 \beta_{JI0} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_0} \right)^2 + 2 \cos \beta_{JI0} \sin \beta_{JI0} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{r_0 \partial \varphi} + \sin^2 \beta_{JI0} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{r_0 \partial \varphi} \right)^2 - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Эти выкладки представлены только для примера, так как при вычислениях с использованием пакета Mathematica аналитические операции программируются наравне с численными.

Полученный функционал может использоваться с различными целями. В частности на основе него можно строить геометрически нелинейные конечные элементы, аналогично п. 3.5. В данной диссертации он был использован для вывода линейных дифференциальных уравнений малых деформаций сетчатой оболочки, которые использованы в следующей главе диссертации. Ниже по сути такой же (но другой по форме) функционал строится и минимизируется для оболочки, составленной из дискретного набора растяжимых нитей.

4.2. Расчет больших перемещений сетчатых оболочек произвольной формы на основе принципа минимума полного потенциала системы

Рассмотрим расчет равновесной конфигурации сетчатой оболочки произвольной формы с произвольным законом укладки нитей (Рис. 4.2).

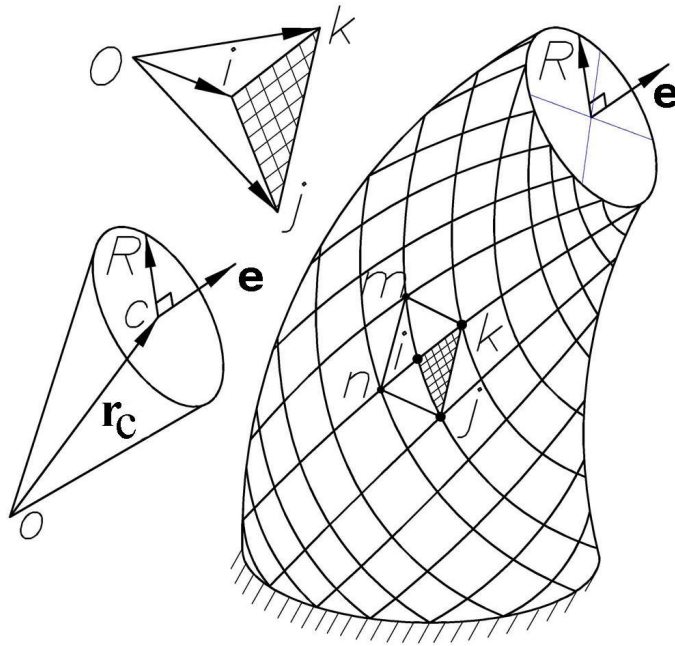


Рис. 4.2. Сетчатая оболочка в деформированном состоянии

Наиболее просто напряженно – деформированное состояние сетчатой оболочки удастся найти на основе прямой минимизации полного потенциала механической системы. Механическая система включает упругие нити корда, жесткие торцы оболочки и внутреннее давление в оболочке. Оболочка (сетка) разбивается на отдельные прямолинейные упругие элементы – стерженьки, упругие свойства которых объединяют сразу несколько нитей одноименного направления. Жесткость сечения таких стерженьков K вычисляется сложением жесткостей, заменяемых ими нитей:

$$K = nE_n F \quad (4.5)$$

где n – количество нитей, приходящихся на один, заменяющий их стержневой элемент.

Энергия деформаций стержневого элемента с номерами узлов i и j равна

$$U_{ij} = \frac{K\Delta l^2}{2l_0} = K \frac{(l-l_0)^2}{2l_0} \quad (4.6)$$

где l_0 , l – длины нитей (стержневых элементов) в исходном и деформированном состояниях.

Длины l_0 , l вычисляются по обычным формулам через координаты узлов элемента (Рис. 4.2)

$$\begin{aligned} l_0 &= \sqrt{(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2 + (z_{j0} - z_{i0})^2} \\ l &= \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

где x, y, z – декартовы координаты; i, j – номера узлов стержневого элемента; индексом «0» помечено исходное состояние.

Потенциал сил давления равен произведению давления на объем внутренней полости оболочки взятый с обратным знаком:

$$W = -pV \quad (4.8)$$

Для вычисления объема поверхность оболочки разбивалась на группы из 4-х треугольников (Рис. 4.2). Объем тетраэдра с вершиной в начале координат находился через определитель

$$V_{ijk} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}$$

Объем конуса с вершиной в начале координат, опирающегося на верхнее днище, равен

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \pi R^2 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_C)$$

где R – радиус верхнего днища, \mathbf{e} – нормаль к плоскости днища, \mathbf{r}_C – радиус-вектор центра днища.

Полный потенциал системы складывается из упругой энергии всех нитей и потенциала сил давления

$$\Pi = \sum_{i,j} U_{ij} - p \left(V_{cone} + \sum_{i,j,k} V_{ijk} \right) \quad (4.9)$$

Граничными условиями являются условия жесткого закрепления нитей к нижнему неподвижному днищу и верхнему подвижному днищу. Координаты узлов на нижнем днище определяются исходной конфигурацией сетки и исключаются из списка неизвестных. Радиусы - векторы \mathbf{r}_i узлов на верхнем днище выражаются через радиус - вектор \mathbf{r}_C центра тяжести и тензор поворота

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{L}(\vartheta) \cdot (\mathbf{r}_{i0} - \mathbf{r}_{C0}) \quad (4.10)$$

где $\mathbf{L}(\vartheta)$ - тензор поворота в зависимости от вектора поворота ϑ верхнего днища (вектор Эйлера [65], [118], [142], [145]).

В декартовых координатах компоненты вектора Эйлера и тензора поворота равны [65], [118], [142], [145]:

$$\begin{aligned} \{\vartheta\} &= (\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z)^T \\ [\mathbf{L}(\vartheta)] &= \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} \begin{pmatrix} \vartheta_x^2 & \vartheta_x \vartheta_y & \vartheta_x \vartheta_z \\ \vartheta_y \vartheta_x & \vartheta_y^2 & \vartheta_y \vartheta_z \\ \vartheta_z \vartheta_x & \vartheta_z \vartheta_y & \vartheta_z^2 \end{pmatrix} + \frac{\sin\theta}{\theta} \begin{pmatrix} 0 & -\vartheta_z & \vartheta_y \\ \vartheta_z & 0 & -\vartheta_x \\ -\vartheta_y & \vartheta_x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $\theta = |\vartheta| = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2}$ - длина вектора Эйлера (величина угла поворота в радианах).

Согласно (4.10)-(4.11) координаты всех узлов верхнего днища оказываются выраженными через 6 переменных $x_C, y_C, z_C, \vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ - трех координат центра верхнего днища и трех проекций вектора Эйлера. Таким образом, полный потенциал механической системы оказывается функцией координат свободных узлов и 6-ти степеней свободы верхнего днища:

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N, x_C, y_C, z_C, \vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z)$$

Положение равновесия сетчатой оболочки определялось прямой минимизацией полного потенциала

$$\Pi \rightarrow \min$$

Минимизация выполнялась встроенной процедурой FindMinimum пакета Mathematica [154].

Следует отметить, что предлагаемая методика расчета сетчатых оболочек мало отличается от МКЭ по сути, так как МКЭ допускают вариационную формулировку. Однако при прямой минимизации удается избежать громоздких процедур составления матриц жесткости конечных элементов и итерационного решения нелинейной системы алгебраических уравнений равновесия узлов. Таким образом, по форме прямая минимизация гораздо проще МКЭ, особенно, на этапе программирования.

При численной реализации описанной методики обнаруживается, что процедура поиска минимума работает тем дольше, чем жестче нити. Для очень жестких нитей минимум полного потенциала не удается найти совсем. Чтобы обойти эту численную проблему применяется итерационный процесс. Растяжимость нитей принимается такой, чтобы при приложении основной нагрузки – давления деформации нитей были довольно заметными, т.е. составляли 10-20%. При такой растяжимости нитей минимум полного потенциала находится сравнительно быстро, т. е. процедуре FindMinimum не приходится существенно дробить шаг при приближении к минимуму. После нахождения минимума длина каждой нити в исходных данных уменьшается ровно на величину удлинения нити и выполняется следующая итерация. Нити как бы охлаждаются и становятся короче. При этом минимум ищется в окрестности предыдущего состояния, что ускоряет расчет. После нескольких таких итераций длина нити в деформированном состоянии оказывается равной длине нити в исходном состоянии. Этим приемом удастся рассчитать

оболочку с нерастяжимыми нитями, не сталкиваясь с численными проблемами.

4.3. Устройства управляемой упругой деформации (УУД) на основе сетчатых оболочек

Традиционные приводы машин, составленные из зубчатых передач, подшипников, муфт и других деталей, в ряде случаев оказываются непригодными в условиях сверхчистого вакуума, тонких химических, электронных и медицинских технологий. Причиной являются микрочастицы загрязнений, порождаемые парами трения контактирующих деталей машин. Очевидно, что в рассматриваемых случаях должны применяться приводы не подверженные износу, т.е. не содержащие пар трения.

Повышенные требования к отсутствию частиц загрязнений в устройствах, применяемых в условиях сверхчистого вакуума, тонких химических, электронных и медицинских технологий, могут быть выполнены применением приводов с разделением «чистой» и рабочей полостей. В работах [2, 3] рассматриваются приводы УУД на основе гибких сплошных тонкостенных оболочек несимметричной формы.

Известны также захваты промышленных роботов на основе эластичных оболочек, показанные на приведенных ниже рисунках [75]

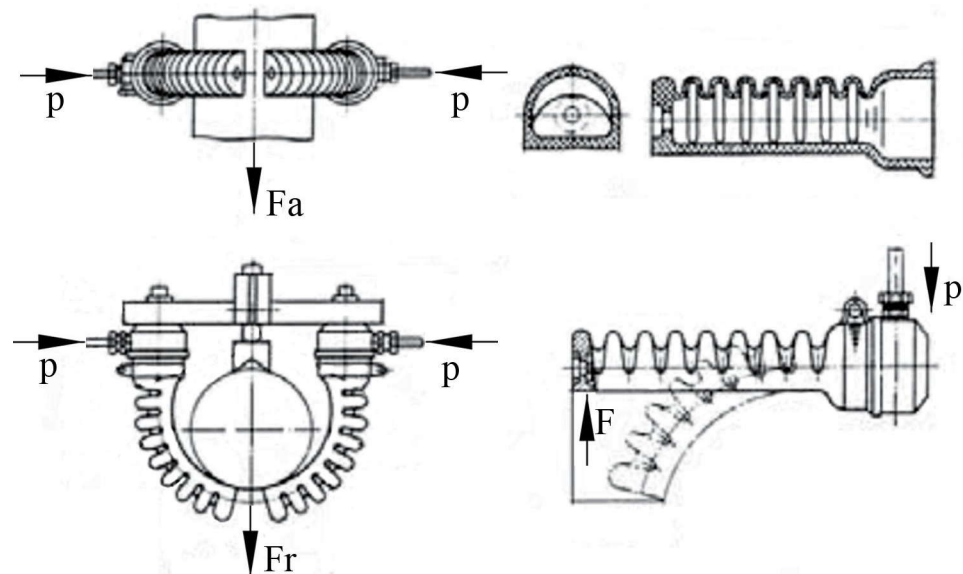


Рис. 4.3. Примеры захватов роботов на основе эластичных оболочек

В данной диссертации предлагается новый вид таких приводов на основе сетчатых оболочек с неравновесной исходной конфигурацией.

Равновесную конфигурацию, к которой стремится оболочка при подаче внутреннего давления, удастся сравнительно несложно находить прямой минимизацией полного потенциала системы. Приведен пример цилиндрической сетчатой оболочки, принимающей форму тора при нагружении внутренним давлением, что дает возможность разработки на ее основе захватов и других устройств. Управление величиной жесткости такого устройства сводится к простому изменению давления.

Если ставится задача использовать сетчатые оболочки в качестве приводов, то исходная конфигурация оболочки должна быть неравновесной, тогда при подаче внутреннего давления такая оболочка будет стремиться к равновесной конфигурации и совершать при этом требуемое движение. На Рис. 4.4 приведен пример использования 3-х таких оболочек в качестве захвата робота.

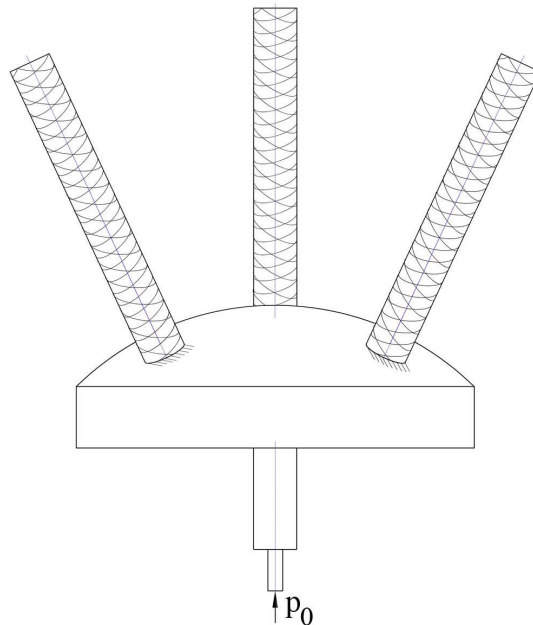


Рис. 4.4. Устройство захвата на основе цилиндрических сетчатых оболочек с несимметрично уложенными нитями

Нити уложены таким образом, что при подаче давления «пальцы» изгибаются и могут удерживать предмет (Рис. 4.5).

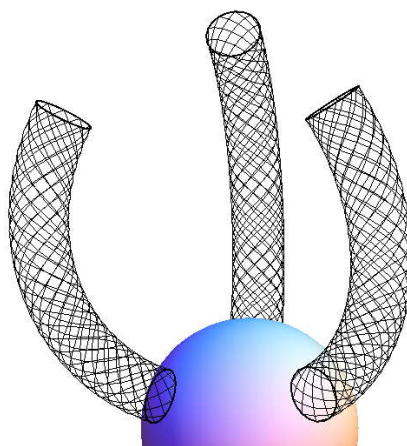


Рис. 4.5. Захват в рабочем положении

Расчет описанных устройств может быть выполнен на основе описанной выше методики. Рассмотрим цилиндрическую сетчатую оболочку с углами укладки нитей, зависящими от окружной координаты, но не зависящими от продольной координаты (Рис. 4.6).

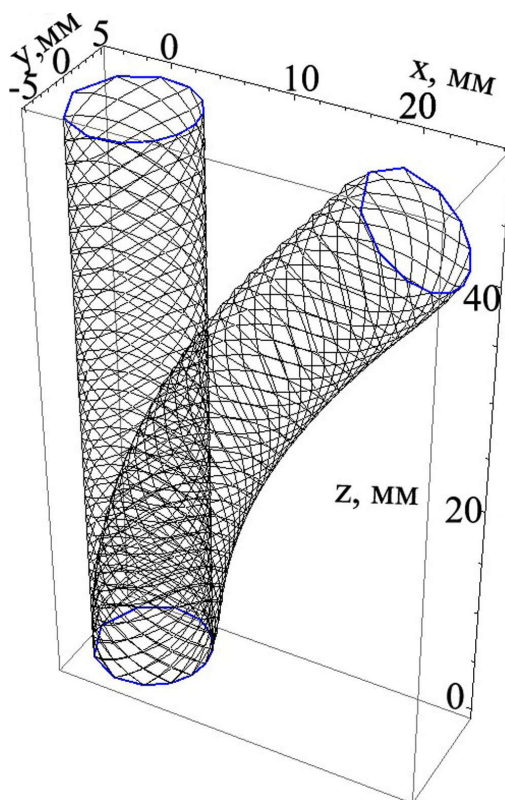


Рис. 4.6. Конфигурация сетчатой оболочки до и после подачи
внутреннего давления

Исходная конфигурация оболочки – цилиндр радиуса 5мм и длины 50мм. Для создания неравновесной укладки нитей была взята равновесная укладка с углом наклона нити к меридиану $\beta = \arctg(\sqrt{2}) \approx 54,7^\circ$ и модифицирована (Рис. 4.7) таким образом, что полярный угол каждой точки изменился по закону

$$\varphi^* = \pi \cdot f\left(\frac{\varphi - \pi}{\pi}\right) \quad (4.12)$$

$$f(t) = \frac{2}{3}\left(t + \frac{t^3}{2}\right)$$

При разбиении окружности на 12 частей указанное преобразование полярного угла приводит к показанному на Рис. 4.7 расположению узлов в основании оболочки

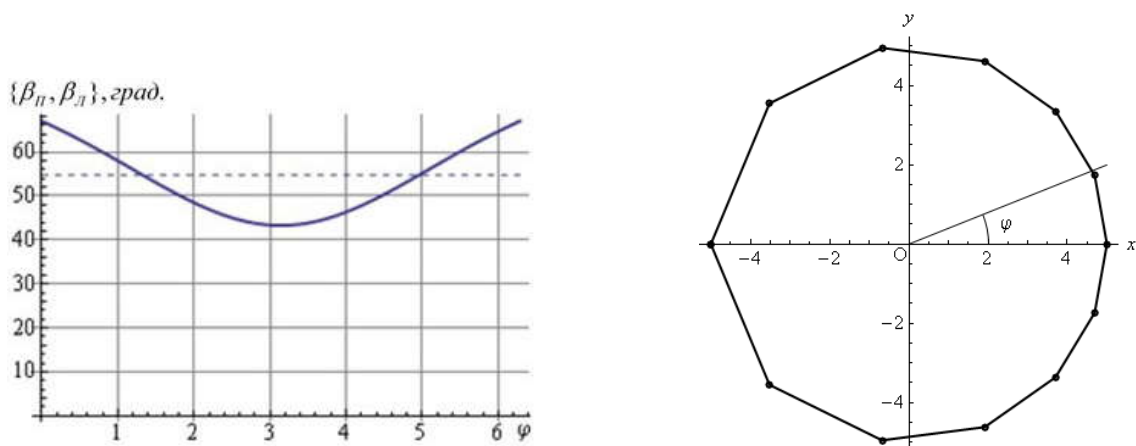


Рис. 4.7. Углы укладки нитей в элементе захвата и

расположение узлов в основании оболочки и на верхнем днище.

Узлы оказываются более плотно расположенными при положительных значениях координаты x и менее плотно расположенными при отрицательных ее значениях. Полученная исходная конфигурация является симметричной относительно нулевого меридиана ($\varphi=0$), поэтому ожидается сохранение симметрии относительно координатной плоскости xOz также и в деформированном состоянии.

При подаче внутреннего давления сетчатая оболочка перескакивает из цилиндрического в торообразное состояние (Рис. 4.6). Верхнее жесткое днище при этом поворачивается на 42.4° вокруг оси y . Величина давления и жесткость сечения нитей выбирались так, чтобы деформации нитей составляли единицы процентов ($K=500\text{Н}$, $p = 7\text{МПа}$) – это довольно условный выбор. При малорастяжимых нитях деформированная конфигурация оболочки в основном определяется не жесткостью нитей и давлением, а исходной неравновесной укладкой нитей. Однако скорость вычислительного процесса при нахождении минимума полного потенциала довольно существенно зависит от величин K и p , а также от густоты сетки. При выбранных параметрах описанный выше итерационный процесс, связанный с укорачиванием нитей, практически ничего не уточняет, т. е. окончательный результат получается всего за одну итерацию.

Рассмотренная сетчатая оболочка, которая при подаче внутреннего давления стремится принять форму тора (Рис. 4.6), может быть использована при создании захвата (Рис. 4.4, 4.5), а также других устройств УУД. Следует отметить, что движение оболочки при подаче давления ограничено равновесной конфигурацией, т.е. такой захват не раздавит предмет, а только зафиксирует его. В то же время усилие, которое необходимо приложить для того, чтобы вырвать предмет из захвата зависит от давления. От давления также зависит жесткость «пальцев» захвата. Таким образом, меняя величину внутреннего давления можно очень просто управлять свойствами такого захвата.

Еще одно преимущество предлагаемых приводов УУД, построенных на основе сетчатых оболочек, состоит в том, что усталостные явления будут возникать не в нитях, а в эластичном связующем. Т. е., с точки зрения циклической прочности, предлагаемые устройства УУД аналогичны автомобильным шинам, которые, как известно, испытывают не один миллион циклов при качении.

Если оба торца заделать, то при подаче внутреннего давления вследствие стремления оболочки изогнуться в ее торцах возникнут изгибающие моменты. Таким образом, сетчатые оболочки рассматриваемого вида могут еще использоваться как нагружающие устройства, *преобразующие внутреннее давление в изгибающий момент*. Аналогичное устройство для преобразования давления в крутящий момент обсуждалось в п. 3.6.

4.4. Вычисление тягового момента оболочки и контроль результатов на основе механики гибких стержней

Вместо заделки торцов можно задать на краях оболочки такие краевые нагрузки (мембранные силы T_1 сдвигающие силы S), что исходная конфигурация оболочки с несимметрично уложенными нитями станет равновесной.

Задача расчета напряженного состояния безмоментной оболочки с заданной конфигурацией является статически определимой и ее можно решить, не привлекая уравнений для перемещений и деформаций. Для цилиндрической оболочки уравнения равновесия имеют вид [22]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\partial S}{R \partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{\partial T_2}{R \partial \varphi} &= 0 \\ T_2 &= pR \end{aligned} \quad (4.13)$$

Предположив, что напряженное состояние не меняется вдоль продольной координаты, получим, что сдвигающая сила отсутствует (иначе появляется неуравновешенный крутящий момент), а усилие T_1 является неизвестной функцией координаты φ . С учетом связи мембранных усилий (2.3) получим

$$T_1 = T_2 \operatorname{ctg} \beta_{II} \operatorname{ctg} \beta_{II} = pR \operatorname{ctg} \beta_{II} \operatorname{ctg} \beta_{II} \quad (4.14)$$

т. е. для того, чтобы исходная цилиндрическая форма оболочки была бы равновесной, необходимо приложить к краям оболочки мембранные усилия T_1 вида (4.14). Так как усилия получились не постоянные, то это означает, что к торцам оболочки приложен изгибающий момент и осевая сила, вычисляемые по (4.15)

$$\begin{aligned} M_* &= \int_0^{2\pi} T_1 R^2 \cos\varphi d\varphi = pR^3 \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\beta_{II} \operatorname{ctg}\beta_{LI} \cos\varphi d\varphi \\ F_* &= \int_0^{2\pi} T_1 R d\varphi - p\pi R^2 = pR^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\beta_{II} \operatorname{ctg}\beta_{LI} \cos\varphi d\varphi - p\pi R^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Так как тангенс углов укладки нитей связывает элемент дуги окружности и элемент продольной координаты $\operatorname{tg}\beta = \frac{Rd\varphi}{ds}$, то изменение углового положения нитей по окружности, согласно (4.12), приводит к соответствующему изменению углов укладки нитей

$$\beta_{II} = \beta_{LI} = \operatorname{arctg}\left(\frac{d\varphi^*}{d\varphi} \operatorname{tg}\beta_0\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} \frac{d\varphi^*}{d\varphi}\right) \quad (4.16)$$

Из (4.15) и (4.16) следует, что момент и осевая сила, действующие на краю оболочки равны

$$\begin{aligned} M_* &= \int_0^{2\pi} T_1 R^2 \cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2} pR^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\varphi^*}{d\varphi}\right)^{-2} \cos\varphi d\varphi \\ F_* &= \int_0^{2\pi} T_1 R d\varphi - p\pi R^2 = pR^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\varphi^*}{d\varphi}\right)^{-2} d\varphi - \pi \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Подстановки (4.12) в (4.17) дают

$$\begin{aligned} M_* &= -1.405 pR^3 \\ F_* &= +0.8291 pR^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Таким образом, согласно (4.18) для того, чтобы удержать оболочку в исходном цилиндрическом состоянии к ее торцам необходимо приложить растягивающую силу F_* и изгибающий момент M_* , найденные по (4.18). Эти

усилия могут быть названы тяговыми усилиями по аналогии с терминологией, применяемой в теории трубок Бурдона.

В линейной теории сетчатых оболочек известно [22], что цилиндрическая сетчатая оболочка с равновесным углом наклона нитей корда 54.7° ведет себя как сплошной стержень с таким же радиусом поперечного сечения и модулем упругости $E=5\rho$. Т. е., жесткость сечения эквивалентной балки равна

$$EJ = 5\rho \frac{\pi (2R)^4}{64} = \frac{5\pi}{4} \rho R^4 \quad (4.19)$$

Обращая задачу, получаем, что с точки зрения линейной теории сетчатых оболочек рассмотренная оболочка должна вести себя как консольная балка с жесткостью сечения (4.19) и с приложенными на краю моментом M_* и продольной растягивающей силой F_* (Рис. 4.8).

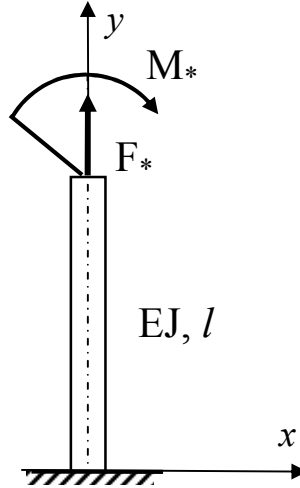


Рис. 4.8. Схема нагружения эквивалентного стержня

Для стержня, показанного на Рис. 4.8. поперечные перемещения определяются дифференциальными уравнениями механики стержней [116]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{ds} = \cos\theta, \\ \frac{dy}{ds} = \sin\theta, \\ \frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EJ}, \\ \frac{dQ_x}{ds} = q_x, \\ \frac{dQ_y}{ds} = q_y, \\ \frac{dM}{ds} = Q_x \sin\theta - Q_y \cos\theta. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

где x, y - декартовы координаты деформированной оси стержня; θ - наклон касательной к оси x ; Q_x, Q_y - проекции вектора внутренних сил на декартовы оси; M - изгибающий момент в сечении стержня.

В заделанном сечении балки при $s=0$ должны выполняться следующие граничные условия

$$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0, \\ y(0) = 0, \\ \theta(0) = \frac{\pi}{2}, \\ Q_x(0) = 0, \\ Q_y(0) = \frac{F_*}{pR^2} = 0.8291, \\ M(0) = \frac{M_0}{pR^3}. \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Знаменатели в граничных условиях означают, что задача решалась в безразмерном виде, при этом интегрирование велось от 0 до $l/R=10$. Единственной неизвестной в условиях (4.21) является M_0 - неизвестный момент в заделке, он был найден методом пристрелки, так чтобы выполнялось условие $M(l)=M_*$ в сечении $s=l$ стержня.

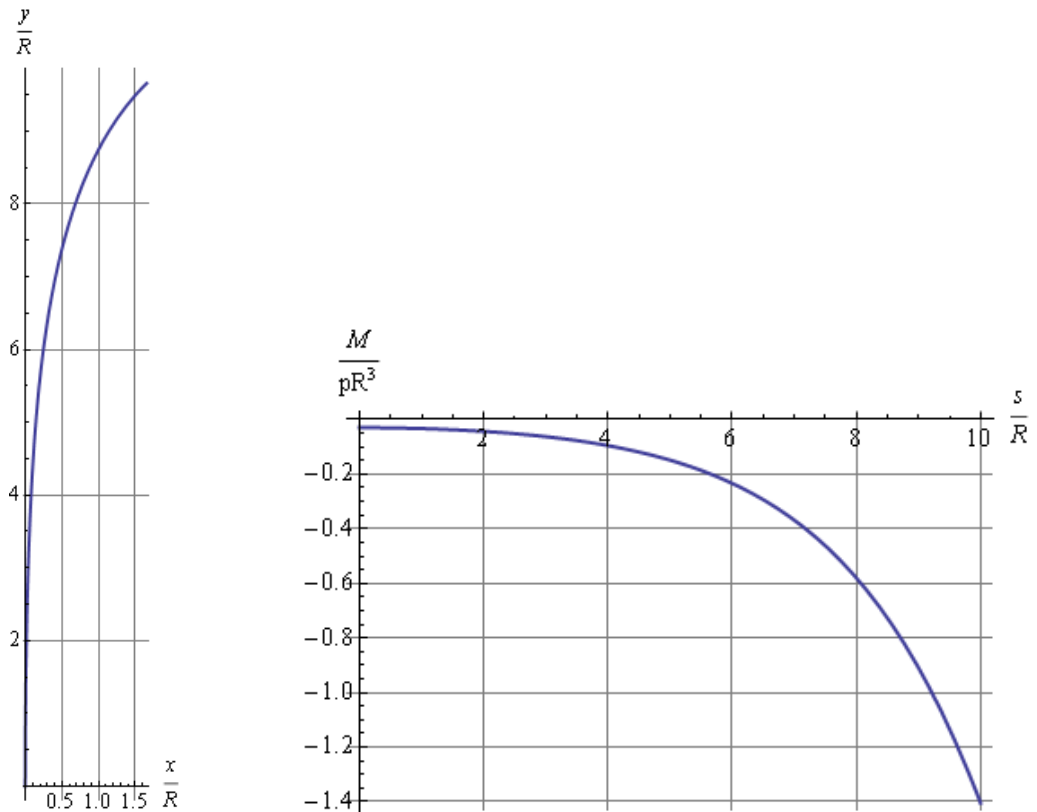


Рис. 4.9. Конфигурация эквивалентного стержня и
внутренний изгибающий момент в стержне

Граничное условие $M(l)=M_*$ выполняется при $M(0) = -0,02955pR^3$. Форма деформированного стержня и распределение изгибающих моментов вдоль оси стержня показаны на Рис. 4.9. Максимальный поворот, полученный при интегрировании системы (4.20) с указанными граничными условиями равен

$$\vartheta_{\max} = \frac{\pi}{2} - \theta(l) = 0.7996 = 45.8^\circ$$

Полученное выше решение на основе минимизации полного функционала системы дает поворот торца 42.4° . С учетом множества предположений и упрощений соответствие результатов следует признать очень хорошим.

Выполненное сопоставление подтверждает правильность алгоритма основанного на минимизации полного функционала механической системы и его применимость для решения аналогичных задач.

4.5. Расчет упругой характеристики упругого элемента пневмобаллонной муфты

Пневматические баллоны с резинокордными оболочками могут использоваться не только как упругие элементы, подвески и домкраты, но также как составные элементы муфт (Рис. 4.10).

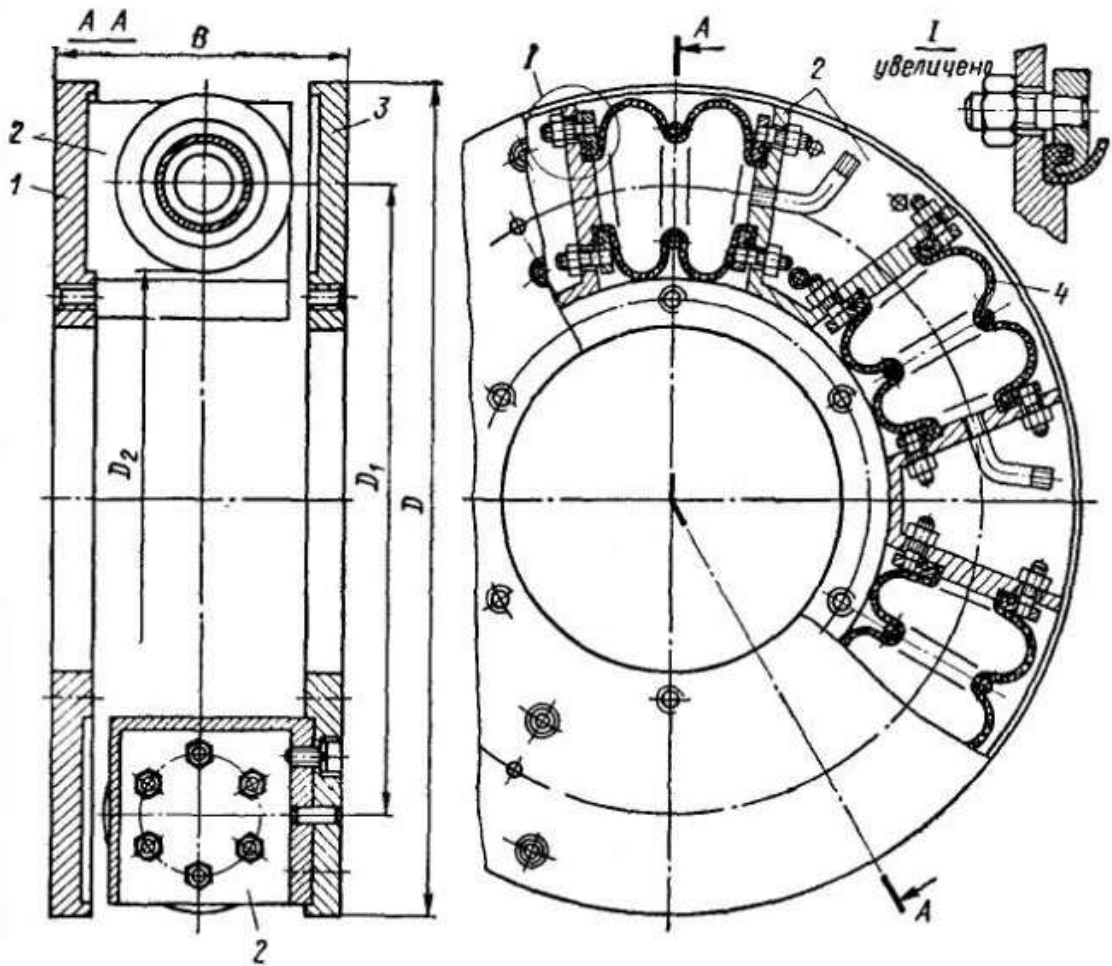


Рис. 4.10. Пневмобаллонная муфта [113]

В Таблице 1 показана взаимосвязь размеров муфт и крутящего момента, передаваемого муфтами.

Параметры пневмобаллонных муфт [113]

Обозначение	$M_{кр}$ в кгс·м при среднем давлении в кгс/см ²								D	D_1	D_2	B
	2		4		6		8					
	норм.	наиб.	норм.	наиб.	норм.	наиб.	норм.	наиб.				
$L4/104-320$ $L6/104-400$ $L8/104-450$	260 485 740	635 1 210 1 850	370 705 1 070	920 1 760 2 670	480 920 1 395	1 200 2 300 3 490	600 1135 1725	1 500 2 820 4 320	500 590 640	320 400 450	160 240 290	240 316 326
$L4/107-355$ $L6/107-435$ $L8/107-500$	296 585 780	740 1 460 1 950	465 900 1 225	1 160 2 250 3 060	625 1 220 1 650	1 570 3 050 4 120	760 1490 2000	1 900 3 720 5 000	530 655 760	335 435 394	115 215 280	320 384 394
$L4/204-380$ $L6/204-450$ $L8/204-640$	225 396 750	560 990 1 180	380 670 1 275	945 1 680 3 185	535 950 1 800	1 335 2 370 4 490	690 1225 2370	1 720 3 060 5 800	550 650 820	380 450 640	220 290 480	306 316 326
$L4/207-375$ $L6/207-515$ $L8/207-647$	420 880 1 200	1 050 2 200 3 000	700 1 400 2 000	1 740 3 500 5 000	960 1 980 2 800	2 400 4 950 7 000	1230 2540 3600	3 080 6 350 9 000	600 750 870	375 515 647	140 280 412	388 400 410
$L6/212-565$ $L10/212-945$ $L20/212-1800$	1 230 3 440 13 120	3 080 8 600 32 800	1 970 5 500 20 960	4 930 13 750 52 400	2 710 7 560 2 880	6 780 18 900 72 000	3440 9600 3660	8 600 24 000 91 500	800 1210 2400	565 945 1800	290 670 1530	460 485 525

Хотя внешне задача расчета пневмобаллонной муфты выглядит мало похожей на рассмотренную выше задачу определения равновесной конфигурации сетчатой оболочки захвата, однако с математической точки зрения постановка этих задач практически не отличается.

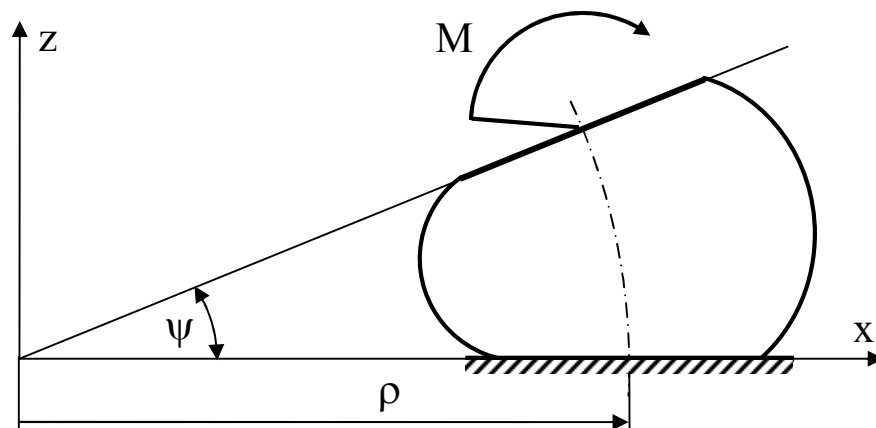


Рис. 4.11. Схема нагружения упругого элемента пневмобаллонной муфты

Отличие заключается в записи граничных условий. Вектор поворота ϑ и радиус-вектор центра тяжести подвижного днища \mathbf{r}_c , через которые и записываются граничные условия (4.10), определяются всего лишь через единственный неизвестный параметр – угол поворота подвижного днища ψ (Рис. 4.11). В системе координат, показанной на Рис. 4.11 указанные векторы представляются в виде

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_c = \rho \begin{pmatrix} 1 - \cos\psi \\ 0 \\ \sin\psi \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Внешний момент, приложенный к баллону, учитывается в полном потенциале системы как дополнительная нагрузка

$$\Pi = \sum_{i,j} U_{ij} - p \left(V_{cone} + \sum_{i,j,k} V_{ijk} \right) + M\psi \quad (4.23)$$

Знак «+» перед слагаемым, учитывающим момент объясняется тем, что направления момента и угла на Рис. 4.11 противоположны.

Прямая минимизация полного потенциала (4.23) позволяет найти упругую характеристику одного из пневмобаллонов, т.е зависимость внешнего момента от приращения угла поворота подвижного днища. При минимизации угол ψ входит в число свободно варьируемых параметров вместе с координатами узлов. Для муфты с внешним диаметром 820 мм (см. Таблица 1) упругая характеристика одного из баллонов при рабочем давлении 0.8МПа имеет вид

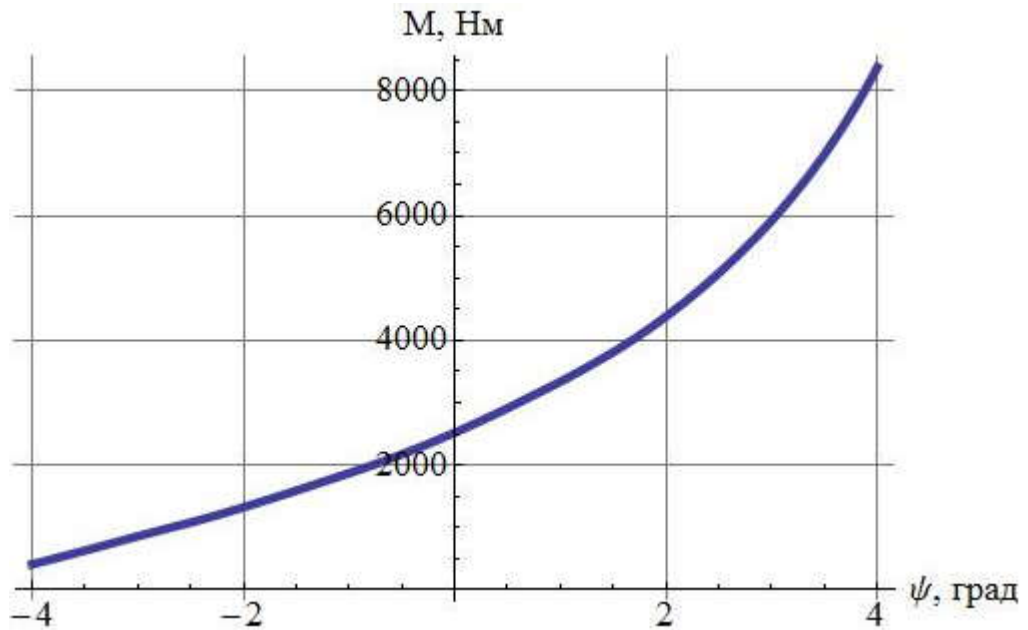


Рис. 4.12. Упругая характеристика одного из упругих элементов муфты – половины пневмобаллона

Подчеркнем, что рассчитана упругая характеристика только одной половины одного из баллонов. Баллоны в пневмобаллонной муфте установлены таким образом, что в исходном состоянии уравновешивают друг друга, то есть момент на валу муфты в исходном состоянии (при отсутствии относительного поворота валов) равен нулю. При относительном повороте валов муфты три из шести баллонов нагружаются, а три разгружаются. Очевидно, что относительный поворот валов приводит к тому, что баллоны больше не уравновешивают друг друга, т.е. конфигурация всей муфты, состоящей из 6-ти баллонов перестает быть равновесной.

Для получения характеристики всей муфты достаточно скомбинировать из зависимости $M(\psi)$, представленной на Рис. 4.12, полную зависимость момента муфты от угла относительного поворота валов муфты

$$M_{\text{муфты}}(\psi) = 3 \left(M\left(\frac{\psi}{2}\right) - M\left(-\frac{\psi}{2}\right) \right) \quad (4.24)$$

Коэффициент $1/2$ объясняется тем, что половина баллона поворачивается на угол в два раза меньший, чем весь баллон. Полученная зависимость – упругая характеристика всей муфты, состоящей из 6 баллонов, представлена на Рис. 4.13

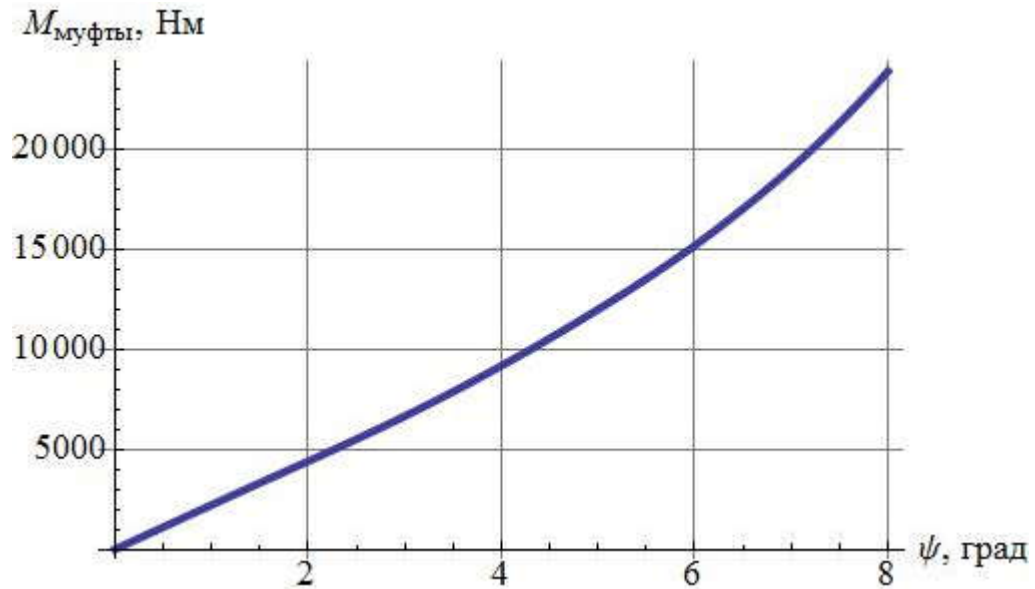


Рис. 4.13. Упругая характеристика пневмобаллонной муфты

На рисунке заметна нелинейность упругой характеристики. Однако более существенно то, что эта характеристика легко управляется изменением давления в баллонах. При необходимости отстроится от резонансных режимов в приводе, в который входит рассматриваемая муфта, достаточно увеличить или уменьшить давление в баллонах, что увеличивает или уменьшает жесткость муфты.

Выводы по главе 4:

1). Для сетчатых оболочек произвольной формы с произвольным законом укладки нитей разработана и реализована методика расчета на основе прямой минимизации полного потенциала механической системы. Приведены две формы функционала – для дискретного набора узлов и для непрерывных неизвестных функций.

2). Предложена новая концепция устройств управляемой упругой деформации с разделением «чистой» и рабочей полостей на основе сетчатых оболочек с неравновесной исходной конфигурацией.

3). Приведен пример расчета цилиндрической сетчатой оболочки с неравновесной исходной конфигурацией, которая при подаче внутреннего давления принимает торообразную форму, что позволяет использовать ее при создании захвата.

4). Указаны преимущества предлагаемых устройств: возможность отделения рабочей полости от «чистой», простота управления и малая чувствительность к циклическим явлениям. Кроме того, жесткостью таких устройств можно управлять простым изменением внутреннего давления.

5). Показано, что разработанная методика расчета сетчатых оболочек при больших перемещениях практически без изменений применима также к определению упругих характеристик пневмобаллонных муфт, что продемонстрировано на примере муфты фирмы «Vulkan».

ГЛАВА 5. РАСЧЕТ СЕТЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ ДВИЖИТЕЛЯ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА ВЫСОКОЙ ПРОХОДИМОСТИ

На основании разработанных в предыдущих главах диссертации методик рассчитано напряженно-деформированное состояние резинокордной оболочки двигателя транспортного средства высокой проходимости, предназначенного для работы в условиях крайнего Севера.

5.1. Описание транспортного средство высокой проходимости с эласто-винтовым двигателем

Наметившееся в последние годы глобальное потепление обусловило благоприятные перспективы для экономического развития приполярных областей России, Северо-Тихоокеанского побережья США и Канады, при этом Арктический регион России это огромная территория более 9 млн. квадратных километров, где находится половина от общероссийских объёмов запаса газа, 90 процентов углеводородов, 98 процентов алмазов, 90 процентов золота и другие полезные ископаемые.

Предполагаемые в ближайшее время вложения 2 трлн рублей в развитие северных территорий России, увеличат вклад арктических регионов в экономику страны более чем вдвое. К 2020 году он составит 14% в общем объеме ВВП против сегодняшних 6% [130].

В этих условиях Североморской путь между Европой и странами Азиатско-Тихоокеанского региона приобретает глобальный статус евроазиатского транспортного коридора.

Не стоит забывать, что Арктика — это государственная граница и активное освоение арктического шельфа неизбежно приведёт к конфликту интересов между странами, предъявляющими свои претензии на его ресурсы. Не исключено, что противостояние выйдет за рамки дипломатического, поэтому в Концепции национальной безопасности и Военной доктрине

Российской Федерации особое место уделяется противоборству сторон в Арктике [79], [42].

При этом основным сдерживающими фактором развития, наряду с суровый климатом и большой разбросанностью населённых пунктов, является почти полное отсутствие коммуникаций.

В этих условиях для обеспечения хозяйственной деятельности и решения оборонных задач особое внимание уделяется внедорожным транспортным средствам высокой проходимости.

В настоящее время на шасси высокой проходимости применяется несколько типов апробированных в мировой практике конструкций движителей.

Это ленточные металлические или резино-металлические гусеничные движители с несложной конструкцией обеспечивающей низкие давления машины на опорную поверхность, однако, известные конструкции металлических и резино-металлических гусениц не решают проблему проходимости транспортных средств на снежном покрове толщиной около одного метра и более, а также на некоторых типах болотных грунтов. Эти проблемы остаются пока трудно решаемыми и при использовании более совершенного объемного гусеничного движителя - пневмогусеницы.

Наибольший интерес с точки зрения простоты конструкции представляют специальные колесные и планетарно-колесные движители.

Кроме отмеченных выше движителей шасси высокой проходимости широкую известность получил роторно - винтовой движитель, теория и практика конструирования которого представлена в достаточном объеме. Обладая относительно простой конструкцией, движитель обеспечивает очень высокую проходимость транспортного средства на заснеженных и обледенелых поверхностях, заболоченных грунтах и воде [19,101].

На настоящий момент известны десятки успешных образцов машин с роторно – винтовым движителем, показавших хорошие эксплуатационные характеристики.

Экспериментальные и теоретические исследования параметров взаимодействия роторно – винтового движителя с подстилающей [19],[82,83] поверхность показали значительное влияние конструктивных параметров, например:

- соотношения массы ротора и корпуса;
- угла наклона винтовых линий;
- высоты винтовых линий.

Особо следует отметить, что эксплуатация аппаратов такой конфигурации происходит на различном грунтовом фоне:

1. Упругопластические — грунты, которые после снятия нагрузки частично восстанавливают свою первоначальную форму (сильно гумусированные почвы, торфяники и т. п.).

2. Мягкотекучие — грунты, которые после снятия нагрузки претерпевают деформацию, обусловленную некоторой текучестью массы.

3. Текучие — грунты, которые реагируют на снятие нагрузки подобно малоподвижной жидкости (водонасыщенные илы, обводненные пески, водонасыщенные торфяные массы и т. п.).

4. Жидкие — грунты, которые ведут себя аналогично жидкостям (разжиженные илы и торфы, сапрпель).

Многообразие их физико – механических свойств поражает.

Совершенно иным по природе, но таким же труднопроходимым, как и слабые минерально-органические грунты является снежный покров. По максимальной декадной толщине снежного покрова на территории России выделено пять зон [112]. В настоящее время передвижение по снежному

покрову толщиной по 0,4 м не представляет собой проблему для колесных и гусеничных машин. Однако в Арктической зоне, где снежный покров держится до 9 месяцев и превышает высоту 1 м движение возможно только на специально сконструированных транспортных средствах.

В России накоплена значительная информация по физико - механическим свойствам снега [112]. Установлено, что под влиянием различных факторов снежный покров приобретает весьма сложное слоистое строение. Плотность отдельных слоев глубокого снега (ρ) может изменяться от 10 до 300 кг/м³, а наст — в пределах $\rho = 300...550$ кг/м³.

Отмеченное выше многообразие свойств и конструктивных решений не позволяет реализовать преимущества роторно – винтового движителя во всех режимах движения на различных подстилающих поверхностях в силу ограничений наложенных (например, постоянные высота и угол наклона витков) на конкретно спроектированное шасси (Рис. 5.1). Хотя установлены и рекомендованы оптимальные углы наклона винтовых линий на разных грунтах для транспортных машин в диапазоне 26 – 38 градусов и технологических 18 – 25 градусов [19].

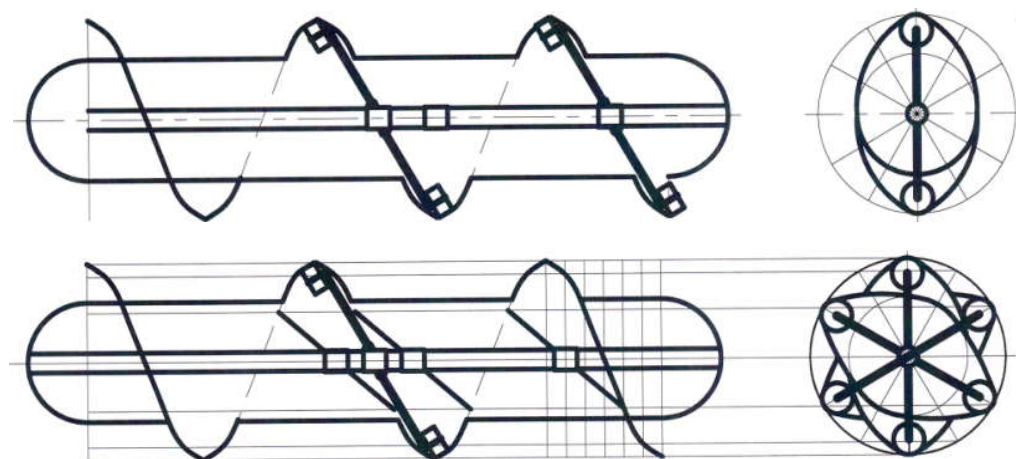


Рис. 5.1. Общий вид оболочки шасси, деформированной роликами генератора волн

Очевидно, что для реализации в полной мере тяговых преимуществ роторно – винтового движителя необходимо иметь адаптивную систему

позволяющую менять определённые конструктивные параметры в процессе движения в зависимости от текущих грунтовых условий и режимов движения.

Одним из таких решений является создание транспортного средство высокой проходимости с эласто - винтовым движителем (Рис. 5.2), где высота и углы наклона бегущих винтовых линий формируется за счёт деформации неподвижной оболочки.

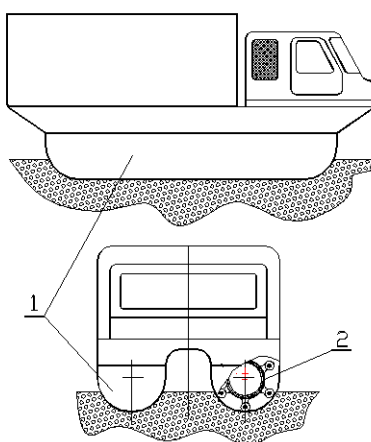


Рис. 5.2. Транспортное средство с эласто-винтовым движителем

Конструкция эласто-винтового движителя состоит из герметичной, неподвижной полости (1) с избыточным давлением (порядка 0,05 – 0,1 атм), обеспечивающим достаточную несущую способность ходового модуля, реактора (2), формирующего бегущую волну необходимых высоты и угла уклона, и системы управления, оптимизирующей эти параметры в зависимости от грунтовых условий и режимов движения.

Конструкция ходового модуля может быть полностью эластичной или частично. На рисунке 5.3 представлен ходовой модуль, где неподвижная полость наполовину выполнена из эластичного материала.

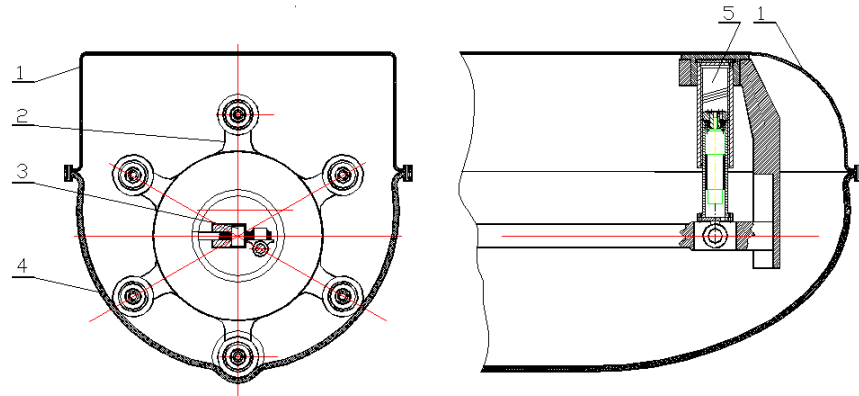


Рис. 5.3. Вариант конструкции ходовой модуль

Конструкция модуля состоит из жёсткого корпуса (1), обеспечивающего крепление к шасси транспортного средства, эластичной части (4), где формируется бегущая полуволна, реактора полуволны (2), механизма перекоса (3), формирующего угол наклона бегущей волны в необходимых пределах, и механизма установки высоты волны (5).

5.2. Начальное напряженное состояние резинокордной оболочки

При исследовании начального напряженного состояния оболочка считается нагруженной только внутренним давлением, т. е. не учитываются давление снега и локальные нагрузки от генератора волн. Оболочка при этом имеет сигарообразную форму (Рис. 5.4).

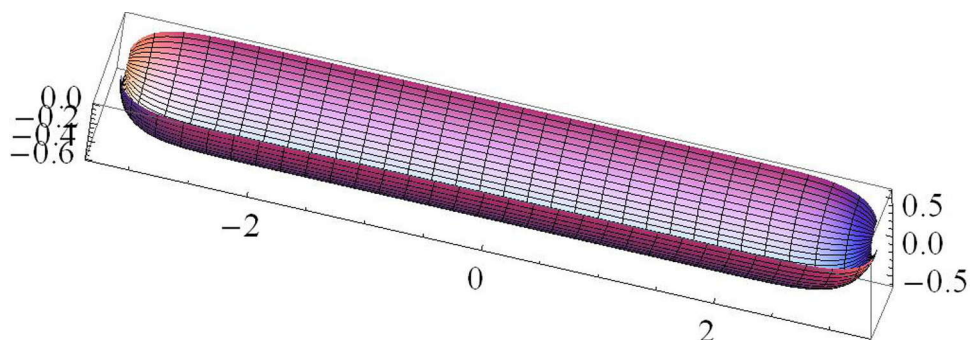


Рис. 5.4. Резинокордная оболочка в исходном состоянии
(длина $l=6.5$ м, радиус $R = 0.6$ м)

Оболочку эласто – винтового движителя целесообразно изготовить резинокордной с двумя направлениями корда $\pm\beta_0$, что обеспечит как геометрическую изменяемость, так и прочность оболочки. При отсутствии нагрузок большая часть оболочки имеет форму цилиндра. Очевидно, что для такого состояния оболочки должны выполняться такие же соотношения как для цилиндрических резинокордных напорных рукавов, поэтому угол наклона корда к меридиану необходимо принять равным $\beta_0=54,7^\circ$ (так называемый равновесный угол). Возможны варианты и с несимметричной укладкой нитей ($+\beta_{п}, -\beta_{л}$), позволяющие разгружать нити правого или левого семейства по конструктивным соображениям либо по соображениям прочности.

Осесимметричное напряженно – деформированное состояние резинокордной оболочки было рассчитано по методике, описанной в третьей главе. Было принято, что оболочка имеет шинную геометрию нитей с параметром

$$\chi = \frac{\sin(\beta_0)}{R} = \frac{\sin(54.7^\circ)}{0.6} = 1.36 \frac{1}{м} \quad (5.1)$$

Краевая задача для полученной системы решалась методом стрельбы процедурой NDSolve из пакета Mathematica. В среднем сечении $s_0=0$ задавались следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} z(0) &= 0, \\ r(0) &= R - \Delta, \\ \theta(0) &= \frac{\pi}{2}, \\ T_1(0) &= \frac{p(R - \Delta)}{2}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где Δ - очень малое число, имеющее смысл радиального отклонения. Параметр Δ полностью определяет начальные условия в среднем сечении, что позволило проинтегрировать численно систему дифференциальных

уравнений и найти все компоненты напряженно - деформированного состояния оболочки. В связи с наличием нелинейных краевых эффектов решение удалось получить только при задании чрезвычайно высокой точности – 60 значащих цифр и более для всех чисел в задаче. Параметр Δ был найден подбором так, чтобы на краю оболочки выполнилось граничное условие, наложенное на радиус: $r(l/2) = b$,

где $b = 250\text{мм}$ – радиус опорного диска, на котором закреплен край оболочки. В результате были рассчитаны функции $r(s_0)$ и $z(s_0)$, по которым был построен профиль меридиана оболочки (Рис. 5.5, 5.6)

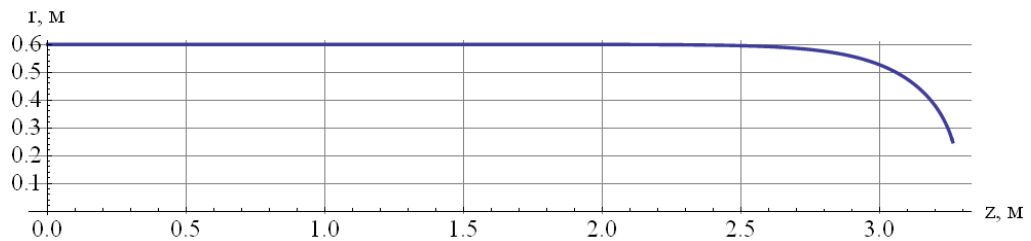


Рис. 5.5. Форма меридиана оболочки в исходном состоянии

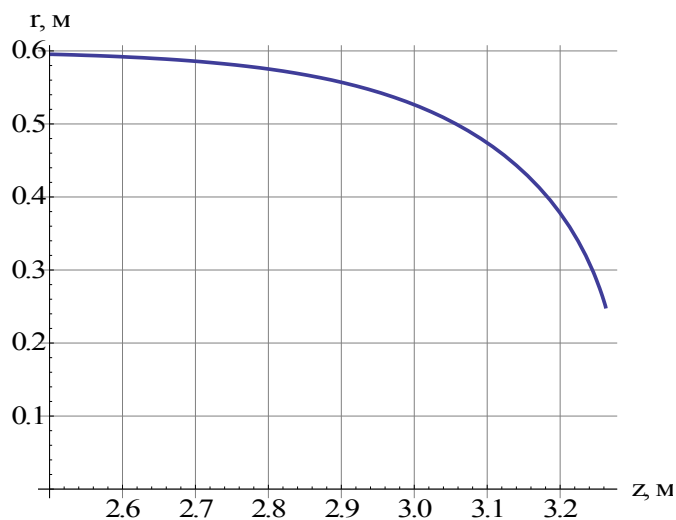


Рис. 5.6. Краевой участок меридиана оболочки

Графики мембранных усилия (Рис. 5.7) показывают, что краевые зоны оболочки напряжены заметно меньше, чем цилиндрическая часть и поэтому краевые зоны не требуют дополнительных подкрепляющих элементов. Найденные мембранные усилия соответствуют давлению $p=0.01\text{МПа}$.

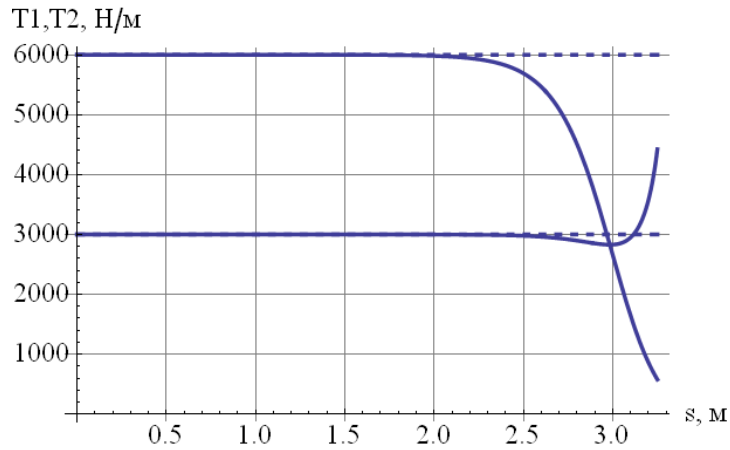


Рис. 5.7. Мембранные усилия (штриховые линии соответствуют бесконечному цилиндру $T_1 = pR/2$, $T_2 = pR$ - «котельные» формулы)

Расчет на прочность резинкордных оболочек обычно производится по максимальному натяжению нитей. Осевую равнодействующую сил в сечении оболочки можно найти с одной стороны через мембранное усилие T_1 , а с другой стороны через натяжение нитей N . Это позволяет найти выражение для натяжения нитей через мембранное усилие:

$$N = \frac{T_1 \pi r}{v \cos \beta} \quad (5.3)$$

где v - количество нитей в оболочке (имеется в виду половина оболочки вращения, такая как на Рис. 5.4, а не полная оболочка вращения).

График натяжения нитей, рассчитанный по формуле (5.3) показан на Рис. 5.8. Этот график еще более наглядно показывает, что краевые зоны менее напряжены и не требуют дополнительных подкреплений.

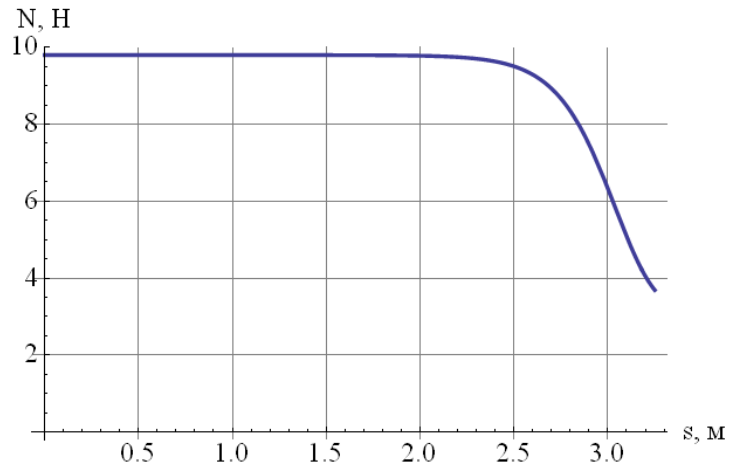


Рис. 5.8. Натяжение нитей корда для оболочки, содержащей $v=1000$ нитей

Количество нитей корда определяется найденным натяжением и предельным усилием в одной нити. На Рис. 5.8 максимальное натяжение составляет 9.8Н. Для снижения натяжения нитей в нужное количество раз достаточно во столько же раз увеличить количество нитей.

При конструировании оболочки интерес представляют также углы наклона нитей (Рис. 5.9)

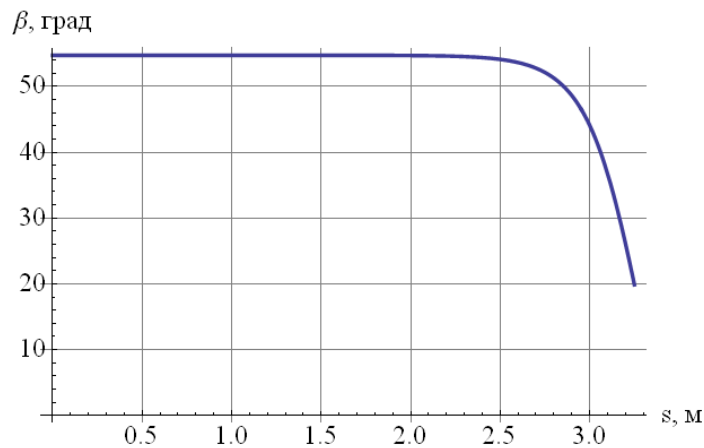


Рис. 5.9. Углы наклона нитей корда к меридиану

5.3. Учет распределенной нагрузки со стороны грунта

При движении по грунту (снегу) оболочка эласто – винтового движителя кроме внутреннего давления нагружена также распределенной нагрузкой со стороны грунта (Рис. 5.10)

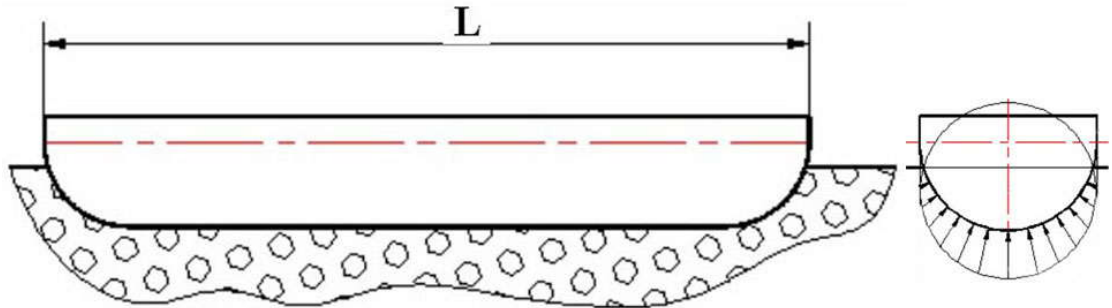


Рис. 5.10. Контакт оболочки движителя с грунтом и эпюра давления грунта

Вследствие большой относительной длины практически вся оболочка за исключением краевых участков находится в плоском деформированном состоянии. Поэтому плоскую задачу целесообразно исследовать в первую очередь. Безмоментная оболочка в плоском состоянии ведет себя как нерастяжимая нить. Поэтому для расчета напряженно-деформированного состояния в средней части оболочки движителя можно использовать уравнения механики абсолютно гибких нитей (5.4) из работ [95],[115]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds_2} = \cos \alpha \\ \frac{dy}{ds_2} = \sin \alpha \\ \frac{d\alpha}{ds_2} = \frac{p-q}{T_2} \end{cases} \quad (5.4)$$

где x, y – декартовы координаты точки; s_2 – длина дуги в окружном направлении; q – давление грунта (снега); α – угол наклона касательной к горизонтали; обозначения p и T_2 имеют такой же смысл, как и выше. Все величины в (5.4) относятся к средней части оболочки, которая при учете давления снега представляет из себя некруговой цилиндр.

Краевые условия для (5.4) имеют вид (5.5)

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ \alpha(0) &= 0 \\ x(s_{2\max}) &= R \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $s_{2\max} = \pi R/2$ – длина дуги сечения. Краевая задача для системы (5.4) с условиями (5.5) несложно решается методом пристрелки. Неизвестным параметром является T_2 – неизвестное натяжение оболочки в окружном направлении. Итерации заканчиваются при достижении граничного условия

$$x(s_{2\max}) = R$$

Распределение давления снега аппроксимировано законом квадратной параболы (Рис. 5.11).

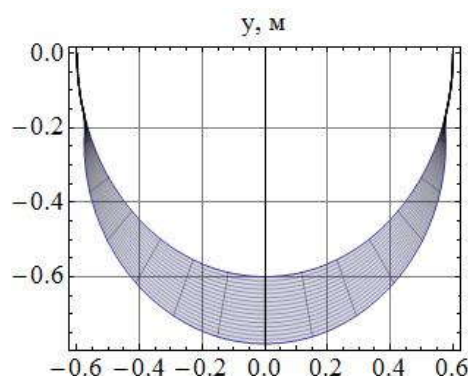


Рис. 5.11. Эпюра давления снега при глубине погружения $h=0,7R$

Если принять внутреннее давление в оболочке равным $p=0,01\text{МПа}$, а максимальное давление снега равным $q_{\max}=0,008\text{МПа}$, то внешняя нагрузка на оболочку составит 4,1тс. При этом эффективная длина оболочки была принята равной 6м, так как краевые участки менее нагружены грунтом (снегом). Для таких данных итерации сходятся при окружном усилии $T_2=0,435pR=2610\text{Н/м}$, граничное условие при этом выполняется с точностью 0.3%. Соответствующая форма оболочки показана на Рис. 5.12.

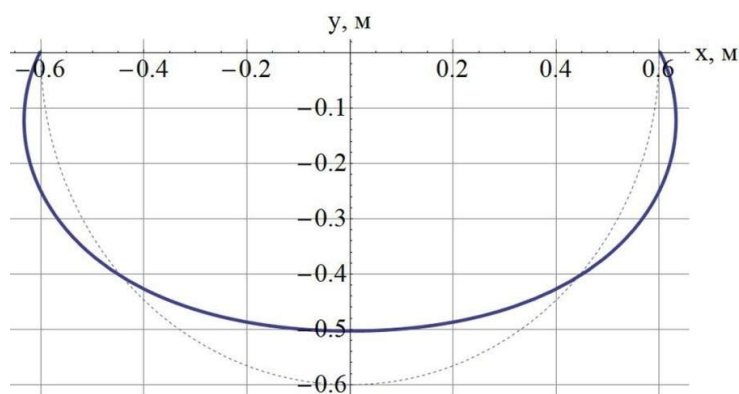


Рис. 5.12. Форма поперечного сечения оболочки,

деформированной давлением снега ($p=0,01\text{МПа}$, $q_{\max}=0,008\text{МПа}$)

Существенное искажение формы поперечного сечения оболочки вызвано близкими значениями давлений p и q_{\max} . В случае $p = q_{\max}$ форма поперечного сечения искажается еще сильнее.

Если внутреннее давление в оболочке заметно превышает максимальное давление со стороны грунта (снега), то заметного изменения формы не происходит (Рис. 5.13).

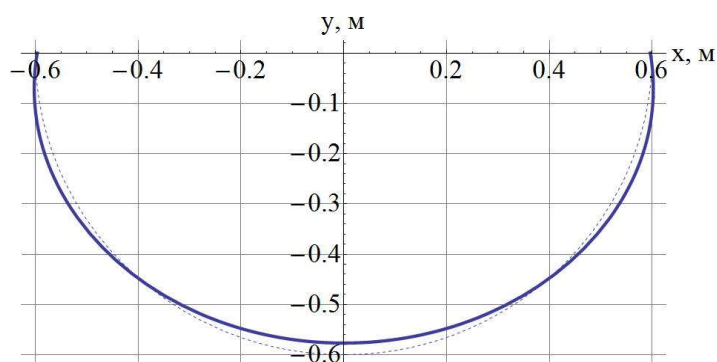


Рис. 5.13. Форма поперечного сечения оболочки, деформированной давлением снега ($p=0,01\text{МПа}$, $q_{\max}=0,004\text{МПа}$, $h = 0,7R$)

5.4. Взаимодействие резинокордной оболочки шнекохода с колесами генератора волн

Напряженно - деформированное состояние резинокордной оболочки вращения, нагруженной неосесимметричной нагрузкой, описывается дифференциальными уравнениями в частных производных по координатам s

и φ (s - дуга меридиана, φ - полярный угол). Все искомые величины в задаче, а также внешние распределенные нагрузки раскладываются в тригонометрические ряды по координате φ .

Для коэффициентов разложений в [22] получены дифференциальные уравнения, которые в случае цилиндрической сетчатой оболочки с исходным равновесным углом укладки нитей $54,7^\circ$ могут быть приведены к следующему виду

$$\frac{dy}{ds} = \mathbf{F}y + \mathbf{g} \quad (5.6)$$

где \mathbf{F} - матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений 6×6

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2k}{R} & \frac{-2}{R} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{pR^2} \\ \frac{3k^2 p}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-k}{R} & \frac{2}{R} \\ 0 & 3k^2 p & 3kp & \frac{2k}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 5kp & (4+k^2)p & \frac{2}{R} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

где: p - внутреннее давление, R - радиус цилиндра, k - номер гармоники тригонометрического ряда.

y - вектор состояния

$$y(s_0) = \begin{pmatrix} u_{(k)}(s_0) \\ v_{(k)}(s_0) \\ w_{(k)}(s_0) \\ F_{u_{(k)}}(s_0) \\ F_{v_{(k)}}(s_0) \\ F_{w_{(k)}}(s_0) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

компоненты которого имеют следующий смысл: $u_{(k)}(s_0), v_{(k)}(s_0), w_{(k)}(s_0)$ - осевое, окружное и радиальное перемещения (коэффициенты разложения);

$F_{u(k)}(s_0), F_{v(k)}(s_0), F_{w(k)}(s_0)$ - приращения внутренних сил осевой, окружной и радиальной (коэффициенты разложения).

\mathbf{g} - нагрузочный вектор 6×1 , который имеет вид:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Rq_{1(k)} \\ -Rq_{2(k)} \\ -Rq_{3(k)} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

где q_1, q_2, q_3 - осевая, окружная и радиальная распределенные нагрузки; индекс (k) помечает номер гармоники тригонометрического ряда.

Коэффициенты матрицы \mathbf{F} были получены в диссертации Ф.Д. Сорокина [119] для случая произвольной формы меридиана (см. Таблицу 2).

Таблица 2.

	$y_1 = u_{(k)}$	$y_2 = v_{(k)}$	$y_3 = w_{(k)}$	$y_4 = Q_{l(k)}$	$y_5 = Q_{z(k)}$	$y_6 = Q_{n(k)}$	
$\frac{dy_1}{ds} =$	$-\frac{\tau^2 \cos \theta}{r}$	$-\frac{\tau^2 k}{r}$	$-\frac{\tau^2 \sin \theta}{r} - \frac{1}{R_1}$	0	0	0	0
$\frac{dy_2}{ds} =$	$\frac{k}{r}$	$\frac{\cos \theta}{r}$	0	0	0	0	0
$\frac{dy_3}{ds} =$	$\frac{1}{R_1}$	0	0	0	0	$\frac{1}{T_1 r}$	0
$\frac{dy_4}{ds} =$	$-\frac{T_1}{r}[(1+\tau^2)k^2 + (\tau^2 + \tau^4)\cos^2 \theta] + \frac{C\tau^2}{r}\cos^2 \theta$	$\frac{T_1}{r}(1+\tau^2)^2 k \cos \theta + \frac{C\tau^2}{r}k \cos \theta$	$\frac{T_1}{r}(\tau^4 + \tau^2)\sin \theta \cos \theta + \frac{C\tau^2}{r}\sin \theta \cos \theta$	$\frac{\tau^2 \cos \theta}{r}$	$-\frac{k}{r}$	$\frac{p}{T_1} - \frac{1}{R_1}$	$-rq_{l(k)}$
$\frac{dy_5}{ds} =$	$\frac{T_1}{r}(1+\tau^2)^2 k \cos \theta + \frac{C\tau^2}{r}k \cos \theta$	$\frac{T_1}{r}[(\tau^4 + 2\tau^2)k^2 + \tau^2 + \cos^2 \theta] + \frac{C\tau^2}{r}k^2 p \sin \theta$	$\frac{T_1}{r}(\tau^4 + 2\tau^2)k \sin \theta + \frac{C\tau^2}{r}k \sin \theta - pk$	$\frac{\tau^2 k}{r}$	$-\frac{\cos \theta}{r}$	0	$-rq_{z(k)}$
$\frac{dy_6}{ds} =$	$\frac{T_1}{r}(\tau^4 + 2\tau^2)\sin \theta \cos \theta + \frac{C\tau^2}{r}\sin \theta \cos \theta + p(\tau^2 - 1)\cos \theta$	$\frac{T_1}{r}(\tau^4 + 2\tau^2)k \sin \theta + \frac{C\tau^2}{r}k \sin \theta + p(\tau^2 - 1)k$	$\frac{T_1}{r}[(\tau^4 + \tau^2)\sin^2 \theta + \tau^2 k^2] + \frac{C\tau^2}{r}\sin^2 \theta + p(\tau^2 - 1)\sin \theta$	$\frac{\tau^2 \sin \theta}{r} + \frac{1}{R_1}$	0	0	$-rq_{n(k)}$

где $\tau = \operatorname{tg} \beta$; C - безразмерная жесткость связующего (резины).

Для непосредственно цилиндрической оболочки программа вывода матрицы \mathbf{F} , основанная на варьировании функционала (4.1), приведена в приложении 3. В (5.7) эти коэффициенты конкретизированы для цилиндрической исходной формы и равновесного угла нитей. Для контроля был вычислен характеристический полином системы (5.6) $R^6 \cdot \det\left(\mathbf{F} - \frac{\sigma}{R}\mathbf{E}\right) = 0$:

$$8k^4 - 8k^6 + (4k^2 - 4k^4)\sigma^2 + (-12 + 2k^2)\sigma^4 + \sigma^6 = 0 \quad (5.10)$$

Этот полином полностью совпадает с соответствующим характеристическим полиномом из [22] в случае $\text{tg}^2 \beta = 2$ (с точностью до обозначений)

$$\begin{aligned} & \sigma^6 - \sigma^4 \text{tg}^2 \beta (3 \text{tg}^2 \beta - n^2) + \\ & + \sigma^2 n^2 \text{tg}^4 \beta (3 - n^2 - \text{tg}^2 \beta) - n^4 (n^2 - 1) \text{tg}^2 \beta = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

этим подтверждается правильность матрицы системы (5.7).

Нагрузка от колеса генератора волн принята распределенной по параболическому закону на интервале $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$ (Рис. 5.14)

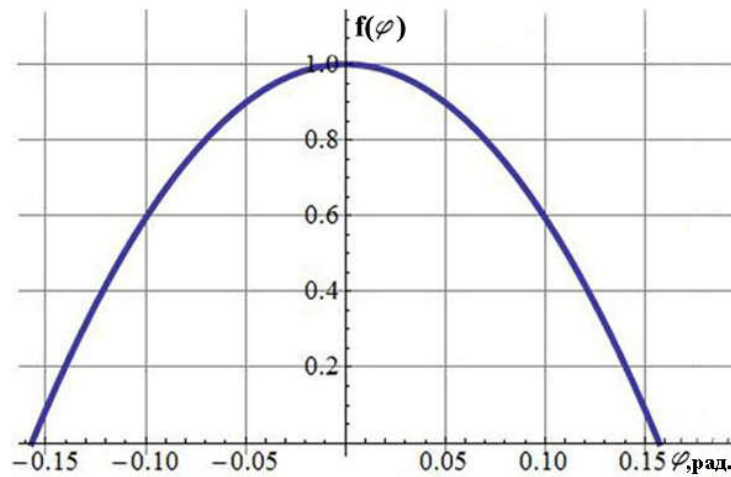


Рис. 5.14. Нагрузка от колеса генератора волн

Коэффициенты разложения функции, показанной на Рис. 5.14, т.е.

$f(\varphi) = 1 - \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{8}{\varphi_0^2 k^3 \pi} (\sin k\varphi_0 - k\varphi_0 \cos k\varphi_0), k > 0 \\ a_0 &= \frac{4\varphi_0}{3\pi} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Сумма ряда $\sum_{k=0,2,4,\dots} a_k \cos k\varphi$ и функция $f(\varphi)$ и $0 = \pi/20 = 9^\circ$ показаны на

Рис. 5.15, при этом удержаны гармоники до $k=20$.

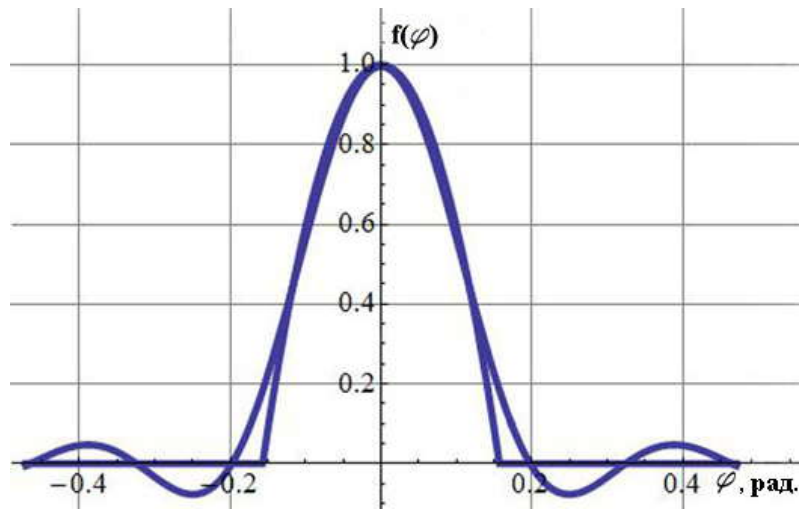


Рис. 5.15. Нагрузка в виде суммы тригонометрических рядов

Коэффициенты разложения радиальной распределенной нагрузки от колеса генератора волн задавались в виде

$$q_{3(k)} = a_k \left(H\left(s + \frac{b}{2}\right) - H\left(s - \frac{b}{2}\right) \right) q_0 \quad (5.13)$$

где H - функция Хевисайда (единичная ступенька), q_0 - максимальное контактное давление колеса, b - ширина колеса. Т.е. считалось, что по ширине b колеса нагрузка постоянна. Остальные распределенные нагрузки принимались равными нулю: $q_1=q_2=0$.

Система дифференциальных уравнений (5.6) с постоянными коэффициентами интегрировалась аналитическим методом таким образом, чтобы в решении оставались только затухающие экспоненты. Т.е. разыскивалось решение, имеющее характер краевого эффекта - к краям оболочки решение затухает. Заметное изменение геометрии происходит только вблизи места приложения нагрузки. Для каждой гармоники $k=0,2,4,\dots,20$ строилось отдельное решение системы (5.6), затем полученные компоненты вектора u умножались на $\cos k\varphi$ или $\sin k\varphi$ в зависимости от четности по φ и суммировались. В результате было получено полное описание напряженно - деформированного состояния оболочки.

Для параметров $R=0.6\text{м}$, $p=0.01\text{МПа}$, $q_0=0.3\text{МПа}$, $b=100\text{мм}$ и заданной нагрузки (5.9) полученная форма деформированной оболочки при наличии одной пары колес генератора волн показана на Рис. 5.16

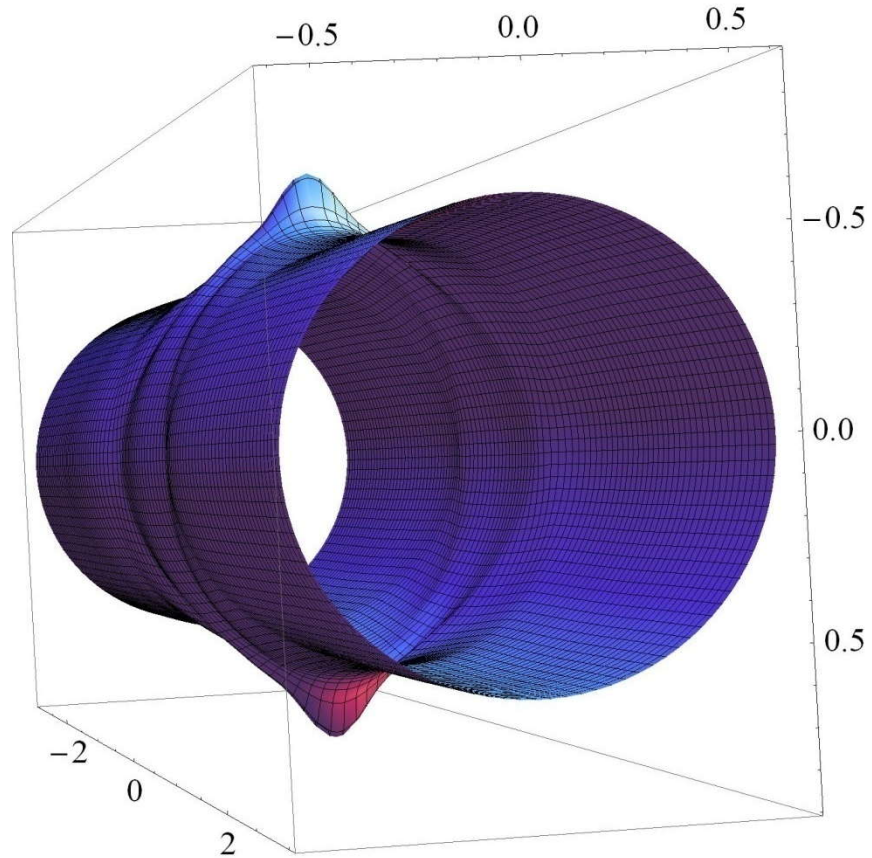


Рис. 5.16. Форма деформированной оболочки при наличии одной пары колес генератора волн

Для других положений колес генератора волн полученное решение достаточно соответствующим образом сдвинуть вдоль оси оболочки и повернуть вокруг оси оболочки. Так как система (5.4) линейная, то справедлив принцип суперпозиции. Поэтому для большого количества колес решение получается простым наложением решений от каждого колеса по отдельности (Рис. 5.17)

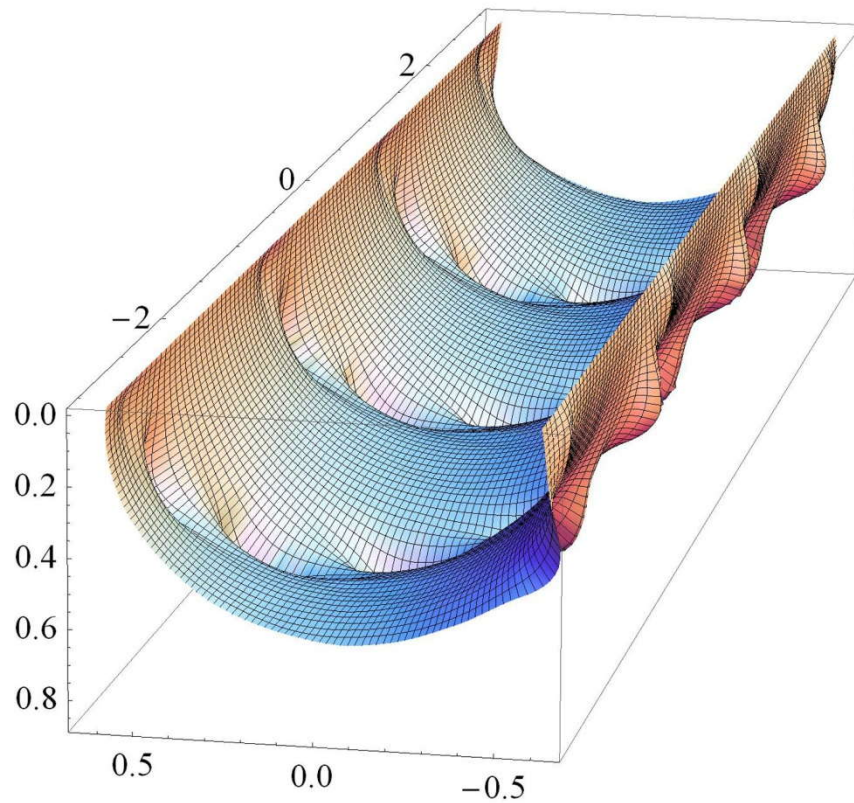


Рис. 5.17. Форма деформированной оболочки

при наличии несколько пар колес генератора волн

Рисунки позволяют судить о величине перемещений в зависимости от давления на колесо q_0 . Для заданных выше параметров высота волны составила 272мм при нагрузке на колесо 3760Н. Например, если принять ширину колес в 2 раз меньшей $b=50$ мм, то для того же уровня перемещений получится давление на колесо со стороны оболочки примерно в 2 раза больше, т.е. 0.6МПа. При необходимости по величинам внутренних силовых факторов могут быть также найдены изменения усилий в нитях.

На основании найденного решения удастся связать параметры колеса и давление на колесо генератора волн с перемещением, которое вызывает колесо. Фактически получилась нужная для практики связь нагрузки на колесо с перемещением оболочки, которое вызывается колесом. Задавая нагрузку на колесо давлением в гидроцилиндре штока колеса можно

получать нужное для передвижения по конкретному грунту значение высоты волны.

Выводы по главе 5:

1). Разработана методика расчета напряженно - деформированного состояния резинокордной оболочки эласто – винтового движителя при основных видах нагрузки – внутреннего давления, распределенной нагрузки со стороны снега и давления от колеса генератора волн.

2). Форма меридиана, мембранные усилия, натяжение и углы наклона нитей корда в исходном состоянии движителя найдены путем решения краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории сетчатых оболочек для осесимметричного случая.

3). Задача об изменении формы оболочки от воздействия распределенной нагрузки со стороны грунта (снега) сведена к задаче механики гибкой нити и решена методами, применяемыми при расчете гибких нитей. Приведены примеры расчета формы поперечного сечения и нагрузки со стороны грунта (снега) на оболочку.

4). Показано, что существенное искажение формы сечения оболочки наблюдается при давлении со стороны грунта (снега) близком к внутреннему давлению в полости оболочки.

5). На основании решения серии линейных краевых задач удалось связать параметры колеса и давление на колесо генератора волн с перемещением, которое вызывает колесо. Таким образом, найдена нужная для практики связь нагрузки на колесо с перемещением оболочки, которое вызывается колесом. Задавая нагрузку на колесо давлением в гидроцилиндре штока колеса можно получать нужное для передвижения по конкретному грунту значение высоты волны.

ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Общим итогом работы следует признать фактическое создание теории сетчатых оболочек с несимметричным расположением нитей левого и правого семейства. Хотя такие задачи в сложных случаях (дополнительные элементы, отверстия, соединения и т.п.) требуют использования МКЭ, но, как показано в диссертации, много интересных результатов можно получить на основе интегрирования полученных дифференциальных уравнений и даже аналитически. В осесимметричном случае при наличии математических пакетов дифференциальные уравнения имеют много преимуществ. Показано также, что при расчете этого вида оболочек использование прямой минимизации функционала фактически равноценно МКЭ, но гораздо проще в реализации.

Общие выводы по работе:

1). Разработана и реализована методика построения равновесной конфигурации для сетчатых оболочек с несимметричным расположением нитей (СОНРН). На ее основе предложены аналитические соотношения для оболочек, получаемых несимметричной геодезической намоткой. Приведены примеры построения профиля таких оболочек и показано, что натяжение нитей каждого семейства в таких оболочках постоянно по длине нити, но различно для того и другого семейства.

2). Получено полное описание в виде системы дифференциальных и алгебраических уравнений напряженно – деформированного состояния СОНРН для оболочки вращения при осесимметричных нагрузках. Система уравнений фактически приведена к форме Коши цепочкой подстановок и пригодна для решения с использованием любого математического пакета. Описаны способы учета растяжимости нитей и расчета угла закручивания.

3). Приведен ряд примеров решения нелинейной краевой задачи для полученной системы дифференциальных уравнений. Показано, что несимметричная укладка может увеличивать прочность оболочки.

4). На основе СОНРН предложен ряд устройств для преобразования давления: 1 - в крутящий момент или угол закручивания, 2 - в изгибающий момент или поперечный поворот. На основании таких устройств могут быть сконструированы захваты роботов и другие устройства управляемой упругой деформации, в которых важно отделение «чистой» и рабочей областей. Захваты на основе СОНРН имеют ряд преимуществ перед аналогичными конструкциями.

5). Построены функционалы различного вида для осесимметричного и неосесимметричного случаев, которые могут использоваться для получения решения прямой минимизацией полного потенциала механической системы. Это позволяет как контролировать результаты решения осесимметричных задач, так и получать новые решения осесимметричных и неосесимметричных задач. С помощью минимизации функционалов, в частности, найдена конфигурация элемента захвата робота и построена упругая характеристика пневмобаллонной муфты.

6). На основании разработанных в предыдущих главах диссертации методик рассчитано напряженно-деформированное состояние резинокордной оболочки движителя транспортного средства высокой проходимости, предназначенного для работы в условиях крайнего Севера. Найдена нужная для практики связь нагрузки на колесо с перемещением оболочки, которое вызывается колесом, позволяющая получать нужное для передвижения по конкретному грунту значение высоты волны изменением нагрузки на колесо.

7). Результаты диссертации используются в учебном процессе кафедры основы конструирования и детали машин ФГБОУ ВПО МГТУ им. Н.Э. Баумана и внедрены в практику проектирования ООО «СЕГУЛА» (методика выбора углов укладки нитей; методика расчета равновесных конфигураций и программное обеспечение, предназначенное для моделирования напряженно-деформированного состояния сетчатых оболочек). Кроме того, в настоящее время результаты используются при разработке конструкции эласто – винтового движителя транспортного средства высокой проходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аверко-Антонович Ю.О., Омельченко Р.Я., Охотна Н.А., Эбич Ю.Р. Технология резиновых изделий. М: Химия, 1991. 351 с.
2. Александрова А.Т. Новые способы передачи и формирования движения в вакууме. Москва: Высшая школа, 1979. 69 с.
3. Александрова А.Т., Васин В.А. Создание идеологии полных комплексных систем вакуумного оборудования (основанных на устройствах и элементах, исключаящих трение движения и предназначенных для работы в области микро и наноэлектроники и других высоких технологий) [Электронный ресурс] // Системотехника: сетевой электрон. Журн, 2009. №7. URL: <http://systech.miem.edu.ru/2009/vasin.htm> (дата обращения: 26.05.2013).
4. Алексеев В.И. Развитие мягкооболочечных конструкций для решения вопросов безопасности мореплавания // Проектирование и расчет конструкций из мягких оболочек. Владивосток: ДВГМА, 1994. С. 34-43.
5. Алексеев С.А. Задачи статики и динамики мягких оболочек // Тр. VI Всесоюзная конференция по теории пластин и оболочек, Баку. М.: Наука, 1966. С. 28-37.
6. Алексеев С.А. К теории мягких оболочек вращения // Расчет пространственных конструкций. М.: Госстройиздат, 1955. Вып. 8. С. 309-322.
7. Алексеев С.А. Об измерении упругих постоянных тонких пленок и тканей // Изв. АН СССР. МТТ, 1968. №5. С. 129-133.
8. Алексеев С.А. Одноосные мягкие оболочки // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. №6. С. 89-97.
9. Алексеев С.А. Основы общей теории мягких оболочек // Расчет пространственных конструкций. М.: Стройиздат, 1967. Вып. 11. С. 31-52.

10. Алексеев С.А. Основы теории мягких осесимметричных оболочек // Расчет пространственных конструкций. М.: Стройиздат, 1965. Вып.10. С. 5-8.
11. Алексеев С.А. Расчет подушечных емкостей // Статика и динамика гибких систем. М.: Наука, 1987. С. 34-43.
12. Артемьев П.П., Новокрещенов И.А., Кальварский Л.М. Трюмные мягкие пневмооболочки // Тр. 7-ой Дальневосточной конференции по мягким - 132 оболочкам. Владивосток. 1983. С. 54-56.
13. Балабух Л.И., Алфутов Н.А., Усюкин В.И. Строительная механика ракет. М.: Высшая школа, 1984. 391с.
14. Балабух Л.И., Усюкин В.И. Приближенная теория мягких оболочек вращения // Тр. XIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Р-н-Д. 1971. С. 230-235.
15. Белкин А.Е. Расчет деформаций в беговой части легковой радиальной шины с учетом межслойных сдвигов в брекере // Изв. вузов. Машиностроение. 1990. №3. С. 6-11.
16. Белкин А.Е. Расчет шин радиальной конструкции как трехслойных ортотропных оболочек вращения // Расчеты на прочность. Вып. 30. М.: Машиностроение, 1989. С. 40-47.
17. Белкин А.Е., Нарская Н.Л. Динамический контакт шины как вязкоупругой оболочки с опорной поверхностью при стационарном качении // Вестник МГТУ. Машиностроение. 1997. №1. С. 62-73.
18. Белкин А.Е., Уляшкин А.В. Приближенное решение контактной задачи об обжатии шины на плоскую или цилиндрическую опорную поверхность // Изв. вузов. Машиностроение, 1993. №10-12. С. 14-21.
19. Белякова В.В. Вездеходные транспортно-технологические машины // Под общей редакцией В.В. Белякова. Н. Новгород:Изд – во. ТАЛАМ, 2004. 960с.

20. Бидерман В.Л. Вопросы расчета резиновых деталей // Расчеты на прочность. М.: ГНТИ, 1958. Вып. 3. С. 40-87.
21. Бидерман В.Л. Дифференциальные уравнения деформаций резинокордных оболочек вращения // Расчеты на прочность в машиностроении: Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана / Под ред. Г.А. Николаева. М.: Маш-гиз, 1958. С. 119-146.
22. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
23. Бидерман В.Л., Бухин Б.Л. Равновесие резинокордной цилиндрической оболочки // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1960. №6. С. 115-165
24. Бидерман В.Л., Бухин Б.Л. Расчет безмоментных сетчатых оболочек // Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1966. С. 948-953.
25. Бидерман В.Л., Бухин Б.Л. Уравнение равновесия безмоментной сетчатой оболочки // Инженерн. ж. МТТ. 1966. №1. С. 84-89.
26. Бидерман В.Л., Бухин Б.Л. Уравнения равновесия безмоментной сетчатой оболочки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела». 1966. №1. С. 81-89.
27. Бидерман В.Л., Бухин Б.Л. Энергетический метод расчета резинокордных оболочек вращения // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1959. №6. С. 76-83.
28. Бидерман В.Л., Бухин Б.Л., Николаев И.К. Расчет равновесной конфигурации резинокордной оболочки вращения на ЭВМ // Каучук и резина. 1966. №5. С. 33-35.
29. Бидерман В.Л., Лихарев К. К., Макушин В.М., Малинин Н. Н., Пономарев С. Д., Феодосьев В.И. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. М.: Машгиз, 1958. 884 с.

30. Бидермана Т.В. Методы расчета торообразных резиновых упругих элементов соединительных муфт: Диссертация... канд. техн. наук. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 137 с.
31. Богачев М.В., Гаврюшин С.С. Вариационно-разностный метод расчета тонких гибких пологих оболочечных элементов технических устройств // Изв. вузов. Машиностр. 1997. №10-12. С. 14-20.
32. Брызгалин Г.И. К рациональному проектированию анизотропных плоских тел со слабым связующим // Изв. АН СССР, Механика твёрдого тела. 1969. С. 123-131.
33. Буйко И.А., Фролов К.А. Пневматические резинотканевые подъемники / Сообщения лаборатории мягких оболочек ДВЗИМУ. Владивосток: Изд-во ДВВИМУ, 1973. Вып. 22. С. 89-94.
34. Бухин Б.Л. Расчет равновесной конфигурации пневматической шины с учетом удлинения нитей корда // Каучук и резина. 1963. №10. С. 35-38.
35. Бухин Б.Л., Гильдман И.М. Симметричная деформация безмоментной сетчатой оболочки вращения // Каучук и резина. 1969. №11. С. 36-39.
36. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 544 с.
37. Васильев В.В., Бунаков В.А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1976. 144с.
38. Васильев В.В., Елпатьевский А.Н. Оптимальная форма оболочки вращения, изготовленной из стеклопластика методом непрерывной намотки // Прочность и устойчивость тонкостенных авиационных конструкций. М.: Машиностроение, 1971. С. 220-227.

39. Васильев В.В., Миткевич А.Б., Протасов В.Д. Оптимальное проектирование баллонов давления в форме оболочек вращения, образованных из КМ методом намотки. М.: ВИМИ, 1981. 65с.
40. Ващенко Л.Ф. Геометрично-нелинейные деформирования мягких оболочек. Доклад АН УкрССР. 1979. №2. С. 100-103.
41. Ващенко Л.Ф. Мягкая коническая оболочка под несимметричной нагрузкой // Прикладная механика. 1980. №7. С. 54-60.
42. Военная доктрина Российской Федерации // Общероссийская еженедельная газета Военно-промышленный курьер. 2010. №6 (322).
43. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 419 с.
44. Галимов К.З. К вариационным методам решения задач нелинейной теории пластин и оболочек // Изв. Казан, фил. АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1956. №10. С. 3-26.
45. Галимов К.З. К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях и деформациях // ПММ. 1951. Вып. 15. №6. С. 723-742.
46. Галимов К.З. Некоторые вопросы теории конечных деформаций пластин и оболочек // Изв. Казан фил. АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1960. №14. С. 13-22.
47. Галимов К.З. Уравнения равновесия теории упругости при конечных перемещениях и их приложение к теории оболочек // Изв. Казан, фил. АН СССР Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1948. №1. С. 25-46.
48. Гениев Г.А. Вопросы теории пневматических оболочек // Тр. IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван: Изд-во АН. Арм. ССР, 1964. С. 373-377.
49. Голованов А.И., Гурьянова О.Н. Исследование нелинейного деформирования слоистых оболочек произвольной геометрии МКЭ // Тр. 18

международная конференция по теории оболочек и пластин, Саратов (29 сент. 4 окт, 1997). Саратов, 1997. Т. 3 С. 44-48.

50. Горелик Б.М., Шальнев О.В. Механизм напряжения мягкой оболочки (обзор материалов конференции по мягким оболочкам) // Пр-во и использование эластомеров. 1996. №4. С. 11-16.

51. Григорьев А. С. Напряженное состояние безмоментных оболочек при больших деформациях // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 6. С. 827-832.

52. Григорьев А.С. О теории и задачах равновесия оболочек при больших деформациях // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. №1. С. 163-168.

53. Григорьев А.С. Равновесие безмоментной оболочки вращения при больших деформациях // ПММ. 1961. Т. 15. Вып. 6. С. 1083-1090.

54. Губенко А.Б., Зубарев Г.Н., Кулаковский А.Б., Петровин М.И. Пневматические строительные конструкции. М.: Стройиздат, 1963. 127 с.

55. Гулин Б.В., Ильгамов М.А. Обзор исследований по теории взаимодействия мягких оболочек с потоком жидкости и динамика гибких систем // Статика и динамика гибких систем. М.: Наука, 1987. С. 5-34.

56. Гулин Б.В., Давыдов Р.И., Ридель В.В. Численное исследование динамики мягкой оболочки в одноосном состоянии // Нелинейные проблемы аэроупругости // Тр. семинара КФАН СССР. 1979. Вып. XI. С. 43-58.

57. Гулин Б.В., Ридель В.В. Динамика мягких оболочек. М.: Наука, 1990. 208с.

58. Гулин Б.В., Ридель В.В. К динамике мягких анизотропных оболочек // Нелинейные проблемы аэроупругости // Тр. семинара. КФАН СССР. 1979. Вып. XI. С. 24-42.

59. Друзь Б.И. Нетрадиционные расчетные схемы цилиндрических оболочек и пневмопанелей. Владивосток: ИНТЕРМОР, 1997. 115 с.

60. Друзь Б.И. Обобщенные схемы проектировочных расчетов мягкооболочечных судовых конструкций: Автореферат диссертации, докт. техн. наук. Дальневост. гос. техн. ун-т. Владивосток. 1996. 24 с.
61. Друзь Б.И., Огай С. А. Расчет цилиндрических пневмопанельных конструкций // Статика и динамика гибких систем. М.:Наука,1987.С. 216-234.
62. Друзь Б.И., Огай С.А. Напряженно-деформированное состояние цилиндрической пневмопанельной конструкции типа «Аэромат» при статическом нагружении // Судовые мягкие и гибкие конструкции. Владивосток. 1983. С. 2-18.
63. Елпатьевский А.Н., Васильев В.В. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. М.: Машиностроение, 1972. 168 с.
64. Ермолов В.В., Воблый А.С., Маньшавин А. И. Пневматические конструкции воздухоопорного типа.М.: Стройиздат, 1973. 288с.
65. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Изд. СПбГТУ, 1992. 86 с.
66. Заводовская А.И. Обзор литературы по численным методам расчета мягкооболочечных конструкций / сб.: Проектирование и расчет конструкций из мягких оболочек. Дальневост. гос. мор. акад.. Владивосток, 1994. С. 42-64.
67. Зиккел И. Равнопрочные сосуды давления // Ракетная техника и космонавтика. 1962. №6. С. 120-122.
68. Зубов Л.М. Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную // ПММ. 1971. Т. 35. №5. С. 848-853.
69. Ильгамов М.А., Зарипов Р.Г., Ситдииков А.Г. Экспериментальное исследование мягкой оболочки в потоке газа // ВНТК «Механика сплошных сред»: Тезисы докладов. Набережные Челны. 1982. С. 157.

70. Ишии К. Проектирование и расчет пневматических сооружений. Расчет пространственных конструкций / В.В. Ермолов, У.У. Бэрд [и др.] / Под ред. В.В. Ермолова. М.: Стройиздат, 1983. С. 272-298.
71. Каюк Я.Ф., Ващенко Л.Ф. Геометрически нелинейное деформирование мягких оболочек под несимметричной нагрузкой // Прикладная механика. 1980. Том XXI. Р. 8. С. 15-24.
72. Каюк Я.Ф., Ващенко Л.Ф. Основные соотношения геометрически нелинейной теории мягких оболочек вращения // Доклады АН УкрССР, физ.-мат. и техн. науки. 1976. Р. 8. С. 715-719.
73. Кислоокий В.Н., Цыхановский В.К. Нелинейное деформирование облегченных пространственных конструкций // ПМ, 1997. №8. С. 49-56.
74. Клебанов Г.В. К решению задачи динамики раздувания мягких цилиндрических оболочек. Исследование по судовым мягким и гибким конструкциям. Владивосток, 1982. С.17-23.
75. Козырев Ю.Г. Захватные устройства и инструменты промышленных роботов: Учебное пособие. М.: КНОРУС, 2010. 312 с.
76. Комков М.А. Равнонапряженная торовая оболочка, изготовленная методом намотки из однонаправленного стеклопластика // Применение пластмасс в машиностроении. 1978. №17. С. 75-83.
77. Королёв В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машиностроение, 1965. 272 с.
78. Королев В. И. Упруго-пластические деформации оболочек. М.: Машиностроение, 1971. 304 с.
79. Куксин С., Васенин В. Текст выступления Дмитрия Рогозина на пресс-конференции в "РГ" [Электронный ресурс] // Российская газета, 2013. URL: <http://www.rg.ru/2013/06/28/doklad.html> (дата обращения 28.06.2013).

80. Кулагин В.Д. О существовании форм сетчатых оболочек вращения, нагруженных нормальным давлением и осевыми силами // Сообщения ДВВИМУ по судовым мягким оболочкам, 1972. Вып. 19. С. 52-61.
81. Кулагин В.Д., Крамской Л.М. Расчет замкнутых сетчатых оболочек под постоянным внутренним давлением // Сообщения ЛМО ДВВИМУ, 1971. Вып. 14. С. 60-65.
82. Кулешов А.П., Молев Ю.И. Исследования экскавационной осадки роторно-винтового движителя // Нефть и газ Сибири: Тезисы доклада Международной научно – технической конференции. Тюмень, 1996. 164 с.
83. Кулешов А.П., Николаев А.Ф. Роторно - винтовые амфибии. Горький: Волго – Вятское издательство, 1973. 47 с.
84. Леонтьев Н.В., Медведев П.Г. Применение МКЭ к нелинейному деформированию мягких пневматических осесимметричных оболочек // Международная молодежная научная конференция XXVI. Гагаринские чтения: Тез. доклад. М.: Изд-во ИПМ РАН, 2000. С. 31.
85. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
86. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 471 с.
87. Магула В.Э. Актуальные задачи теории мягких оболочек. Сообщения лаборатории мягких оболочек. ДВВИМУ. Вып. 34. Владивосток, 1976. С. 3-7.
88. Магула В.Э. Друзь Б.И., Кулагин В.Д. Судовые мягкие емкости. Л.: Судостроение, 1966. 288 с.
89. Магула В.Э. К расчету гибкой нити в потоке жидкости // Статика и динамика гибких систем. М.: Наука, 1987. С. 15-19.
90. Магула В.Э. Особенности решения обратной задачи теории мягких оболочек // Судовые устройства, системы и гибкие конструкции: Труды НКЙ. 1982. С. 3-9.

91. Магула В.Э. Принципы расчета мягких оболочек плоского раскроя // Тр. X Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Кутаиси. 1975. Тбилиси: Мецниереба, 1975. Т. 1. С. 465-469.
92. Магула В.Э. Связь одноосного состояния с раскроем мягкой оболочки // Тр. VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, 1969. М.: Наука, 1970. С. 381-386.
93. Магула В.Э. Судовые эластичные конструкции. Судостроение, 1978. 264с.
94. Маркетос И. Оптимальный тороидальный сосуд, работающий под давлением, образуемый волокнами, навитыми вдоль геодезических линий // Ракетная техника и космонавтика, 1963. №8. С. 223-226.
95. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 242 с.
96. Миткевич М.А. Исследование вопросов формообразования и нелинейного деформирования торообразных сетчатых оболочек при осесимметричном нагружении: Диссертация... канд. техн. наук. М.: Московский физико-технический институт. 2005. 159 с.
97. Миткевич А.Б., Протасов В.Д. Форма равнопрочного по сдвигу днища баллона давления при негеодезической намотке // Механика композитных материалов. 1988. №2. С. 344-346.
98. Миткевич А.Б., Протасов В.Д., Осинин С.В. Проектирование равнонапряженных оболочек давления из композитных материалов в конечном деформированном состоянии // Механика композитных материалов. 1987. №3. С. 545-547.
99. Москаленко А.Д., Максимов Б.С., Путырина Н.П. Обеспечение сохранной перевозки смещающихся грузов в контейнерах // Судовые мягкие и гибкие конструкции. Владивосток, 1983. С. 18-21.

100. Нажесткин С.Б. Расчет гибкого ограждения торообразной формы аппаратов на воздушной подушке // Тр. МВТУ им. Н.Э. Баумана. 1982. №3. С. 36-41.
101. Наумов В.Н., Машков К.Ю., Бяков К.Е. Моделирование прямолинейного движения транспортно-технологического средства с роторно–винтовым двигателем // Известия высших учебных заведений Машиностроение. 2013. №12. С. 31–36.
102. Образцов И.Ф., Васильев В.В. Оптимальная структура и прочность слоистых композитов при плоском напряжённом состоянии // Разрушение композитных материалов: Труды Первого Советско-американского симпозиума. Рига, 1979. С. 142-148.
103. Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
104. Одинцов О.А. Разработка метода решения нелинейных контактных задач стационарного качения автомобильной шины: Диссертация... канд. техн. наук. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2008. 162 с.
105. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
106. Отто Ф., Тростель Р., Пневматические строительные конструкции. Конструирование и расчет сооружений из тросов, сеток, мембран. М.: Стройиздат, 1967. 319 с.
107. Подбельский В. В., Язык СИ++ // Учебное пособие. М.: Финансы и статистика, 2003. 560 с.

108. Попов А.Н., Казбек-Казиев З.А., Файбишенко В.К. Современные пространственные конструкции // Серия: Строительство и архитектура. М.: Знание, 1976. №12. 48с.
109. Ривлин Р.С. Большие упругие деформации // Реология. Теория и приложения / Под редакцией М. Эйриха. М.: ИЛ, 1962. С. 422-457.
110. Ривлин Р., Пипкин А. Проектирование сосудов высокого давления, усиленных нерастяжимыми нитями // Труды американского общества инженеров-механиков. Серия ЕП прикладная механика.1963. №1. С. 123-129.
111. Росато Д.В., Граве К.С. Намотка стеклонитью. М.: Машиностроение, 1969. 310 с.
112. Рукавишников С.В. Особенности взаимодействия гусеничного движителя снегоходных машин с полотном пути. Горький: ГПИ,1979. 95с.
113. Ряховский О.А., Поляков В.С., Барбаш И.Д. Справочник по муфтам. М.: Машиностроение, 1974. 352 с.
114. Савин Г.Н, Койфман Ю.И. Общая нелинейная теория упругости // ПМ. 1970. Т. 6. №12. С. 3-26.
115. Светлицкий В.А. Механика абсолютно гибких стержней. М.: Изд-во МАИ, 2001. 431 с.
116. Светлицкий В.А. Механика стержней. М.: Высшая школа,1987.320 с.
117. Сдобников А. Н. Расчет пневматических конструкций лепесткового раскроя методом конечных элементов // Судовые мягкие и гибкие конструкции. Владивосток. 1983. С. 68-72.
118. Сорокин Ф.Д. Прямое тензорное представление уравнений больших перемещений гибкого стержня с использованием вектора конечного поворота // Изв. РАН. МТТ, 1994. №1. С. 164-168.

119. Сорокин Ф.Д. Расчеты сетчатых оболочек при больших перемещениях: Диссертация... канд. техн. наук. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 1990. 159 с.
120. Стрекозов Н. П. Некоторые вопросы прочности конических и цилиндрических оболочек из мягких материалов // Тр. VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1966. С. 703-706.
121. Стрекозов Н. П., Харченко В.Н. Равновесие мягкой сферической оболочки при воздействии воздушного потока // Тр. VII всесоюзной конференции по ТОиП, Днепропетровск. М.: Наука, 1970. С. 566-569.
122. Стрекозов Н.П. Равновесие мягкой сферической оболочки при осесимметричных нагрузках // МТТ. 1969. №2. С.83-89.
123. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
124. Усюкин В.И. Деформация мембранных торовых оболочек // Тр. VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин (Баку 1966.) М.: Наука, 1966. С. 766-771.
125. Усюкин В.И. Об уравнениях теории больших деформаций мягких оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. №1. С. 70-75.
126. Усюкин В.И. Расчет мембранных оболочек при малом параметре нагрузки методом прогонки // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, Днепропетровск. М.:Наука, 1979. С. 582-587.
127. Усюкин В.И. Техническая теория мягких оболочек и ее применение для расчета пневматических конструкций // Пневматические строительные конструкции. М.: Стройиздат, 1983. С. 299-333.
128. Усюкин В.И., Терещенко В.А., Борсов Р.Г. Разностные методы решения двумерных задач статики мягких оболочек. Расчет пространственных конструкций. М.:Стройиздат, 1979. Вып. XVII. С. 69-84.

129. Усюкин В.И., Численный анализ мягких оболочек вращения с произвольной геометрией меридиана при несимметричной деформации // Тр. IX Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин (Ленинград 1973.). Л.: Судостроение, 1975. С. 92-93.
130. Фомченков Т. На развитие северных территорий России хотят направить 2 трлн рублей [Электронный ресурс] // Российская газета. 2013. URL. <http://www.rg.ru/2013/10/18/sever-site-anons.html> (дата обращения 18.10.2013).
131. Хартунг Р. Сосуды давления, полученные методом плоскостной намотки нитей // Ракетная техника и космонавтика. 1963. №12. С. 159-160.
132. Черных К.Ф, Шамина В.А. Расчет торообразных оболочек // Сб. "Исследования по упругости и пластичности". ЛГУ, 1963. №2. С. 63-69.
133. Черных К.Ф. Нелинейная теория изотропных упругих тонких оболочек. ИМТТ, 1980. вып. 2. С. 148-159.
134. Черных К.Ф. Теория тонких оболочек из эластомеров резиноподобных материалов // Успехи механики. 1983. Т. 6. №1-2. С. 111-147.
135. Черных К.Ф., Латвиничева З.Н. Теория больших упругих деформаций. Учебное пособие. ЛГУ, 1988. 253 с.
136. Черных К.Ф., Шубина И.М. Законы упругости для изотропных несжимаемых материалов. Феноменологический подход - Механика эластомеров. Краснодар. 1977. С. 54-64.
137. Шешенин С.В., Кузь И.С., Савельева И.А. О методе пошаговой линеаризации в задачах нелинейной теории упругости // Упругость и неупругость. МГУ Мех-мат. фак. 4.1.1993. С. 88-94.
138. Юрченко А.В., Численное решение краевых задач упругого деформирования композитных оболочек вращения: Диссертация... канд. техн. наук. Новосибирск. 2005. 164 с.

139. Bathe K.J. and Chaudhary A. A solution method for planar and axisymmetric contact problems // *Int. J. Num. Meth. Engng.* 1985. Vol. 21, P. 65-88.
140. Bohm F. Zur Statik und Dynamik des Giirtelreifens // *ATZ March.* 1967. Vol. 69, №8. P. 255-261.
141. Brewer H.K. Tire Stress and Deformation from Composite Theory // *Tire Science and Technology.* TSTCA. 1973. Vol. 1, №1. P. 47-76.
142. Casey J., Lam V. A Tensor Method for the Kinematical Analysis of Systems of Rigid Bodies // *Mechanism and Machine Theory.* 1986. Vol. 21, №1. P. 87-97.
143. Chou Sen leh, Blomstrom G.D. Finite deformation of a spinning elastic membrane // *AIAA Journal.* 1969. №8. P. 1476 -1480.
144. Denost J.P. New design concept for filament - wound pressure vessels with unequal polar openings // *AIAA.* 1982. №1067. P. 1-7.
145. Geradin M., Cardona A. Flexible multibody dynamics: A finite element approach. John Wiley & Sons, 2001. 327p.
146. Halpin J.C., Kardos J.L., The Halpin-Tsai Equations: A Review // *Polymer engineering and science.* 1976. Vol. 16, №5. P. 344-352.
147. Hart Smith L.J. An analysis of inflatable paraboloids // *Mech. and Chem. Engineering, Trans., Inst. Engineering Austral.* 1967. Vol. 3, №2. P. 105.
148. Hart Smith L.J., Elasticity parameters for finite deformations of rubberlike materials // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik.* 1966. Bd. 17, №5. P. 608-625.
149. Hart-Smith L.J. Grisp J.D. Large elastic deformation of thin rubber membranes // *Int. J. of Eng. Sci.* 1967. Vol. 5, №1. P. 1-24.
150. Jones R. M. *Mechanics of Composite Materials.* 2nd edition. Philadelphia: Taylor&Francis, 1999. 519 p.

151. Orgil J., Wilson J.T. Finite deformations of nonlinear orthotropic cylindrical shells // J. Appl. Mech. 1986. Vol. 53, P. 257-265.
152. Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems // Int. J. Solid. Struct. 1979. Vol. 15, P. 529-551.
153. Rotta J. Zur Statik des Luftreifens // Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv). January 1949. Vol. 17, №1-2. P. 129-141.
154. Wolfram S. The Mathematica book. Fourth edition, Wolfram Media // Cambridge University Press. ISBN 0-52-164314-7, 1999. 1470 p.
155. Чан Ки Ан. Равновесная конфигурация сетчатой оболочки с несимметричной укладкой нитей по геодезическим линиям // Изв. вузов. Машиностроение. 2011. №12. С. 23-26.
156. Сорокин Ф.Д., Чан Ки Ан Расчёт сетчатой оболочки шинной геометрии с несимметричной укладкой нитей в случае нерастяжимых нитей корда // Изв. вузов. Машиностроение. 2012. №3. С. 6-10.
157. Сорокин Ф.Д., Чан Ки Ан О возможности применения сетчатых оболочек с несимметрично уложенными нитями в качестве приводов управляемой упругой деформации // Изв. вузов. Машиностроение. 2013. №10. С. 3-8.
158. Бяков К.Е., Чан Ки Ан, Машков К.Ю., Сорокин Ф.Д. Транспортное средство высокой проходимости с эласто-винтовым двигателем // Изв. вузов. Машиностроение. 2014. №5. С. 38-43.
159. Сорокин Ф.Д., Чан Ки Ан Расчёт сетчатых оболочек с несимметрично уложенными нитями // Проблемы механики современных машин: Материалы V международной конференции. Улан-Удэ, 2012. Т.3. С.101–103.

Приложение 1. Программа расчета равновесных конфигураций сетчатых оболочек вращения с несимметричной геодезической укладкой нитей на языке пакета Mathematica

```

(*Параметр определяемые технологией изготовления*)
c1 = 0.3;
cp = 0.5;
(*Закон укладки нитей*)
β1 = ArcSin[c1 / r[s]];
βp = ArcSin[cp / r[s]];
β10 = ArcSin[c1];
βp0 = ArcSin[cp];
(*Давление: p; *)
(*Безразмерный радиус: r[s], максимальное значение: R=1; *)
R = 1
(*Безразмерный координат: s/R*)
sEnd = 100 / 100;
(*Коэффициент осевой силы*)
k = 5 / 10;
(*Синус θ по формуле 2.10а *)
sinT = (Pi * p * r[s]^2 + k * Pi * p * R^2) / (Pi * p * R^2 + k * Pi * p * R^2) *
  (Sin[βp - β1] / Sin[βp + β1]) ^ 0.5 / (Sin[βp0 - β10] / Sin[βp0 + β10]) ^ 0.5;
(*Мембранные усилия*)
T1 = (Pi * p * r[s]^2 + k * Pi * p * R^2) / (2 * Pi * r[s] * sinT);
T2 = T1 * Tan[βp] * Tan[β1];
(*Безразмерный натяжение в нитях*)
N1 = 2 * Pi * r[s] * T1 * Sin[β1] / Sin[βp + β1];
Np = 2 * Pi * r[s] * T1 * Sin[βp] / Sin[βp + β1];

(*Система Д.У.*)
eq1 = z'[s] == Sin[θ[s]];
eq2 = r'[s] == -Cos[θ[s]];
eq3 = θ'[s] == -D[sinT, r[s]];
(*Граничные условия*)
bc1 = z[0] == 0;
bc2 = r[0] == R;
bc3 = θ[0] == Pi / 2;
(*Решаем систему Д.У.*)
sol = NDSolve[{eq1, eq2, eq3, bc1, bc2, bc3}, {z[s], r[s], θ[s]}, {s, 0, 1}] // First;
(*Построение равновесного профиля*)
ParametricPlot[{{0, 0}, {r[s], z[s]}} /. sol, {s, 0, sEnd}, AxesLabel → {" $\frac{r}{R}$ ", " $\frac{z}{R}$ "}]
(*График натяжения в нитях профиля левого семейства*)
Plot[(N1 / (p * R^2)) /. sol, {s, 0, sEnd}, AxesLabel → {" $\frac{s}{R}$ ", " $\nu_{лN1/pR^2}$ "}]

```

Приложение 2. Программа расчета больших перемещений оболочки вращения произвольной формы меридиана с несимметричным законом укладки нитей при осесимметричном нагружении на языке пакета Mathematica

```

(* Исходные данные и вспомогательные соотношения *)
p = 2 * 10 ^ 5;
R = 0.250 * Sqrt[2];
s0Beg = R / 2;
s0End = R;
r0 = s0 * Cos[Pi / 4];
z0 = s0 * Sin[Pi / 4];
bP0 = Pi / 4 * s0 / R;
bL0 = Pi / 6 * s0 / R;
a = Cos[bP0] / Cos[bL0];
a2 = a ^ 2;
Xi = Sin[bP0 + bL0] / (2 * r0 * Cos[bL0]);
ch = Sqrt[4 * a2 - (1 + a2 - 4 * Xi ^ 2 * r[s0] ^ 2) ^ 2];
zn = Sqrt[4 * a2 - (1 + a2 - 4 * Xi ^ 2 * r0 ^ 2) ^ 2];
A = (r0 / r[s0]) * ch / zn;
bP = ArcCos[A * Cos[bP0]];
bL = ArcCos[A * Cos[bL0]];
T1 = rT1[s0] / r[s0];
T2 = T1 * Tan[bP] * Tan[bL];

sys = { (*Система ДУ*)
  rT1'[s0] == A * T2 * Cos[theta[s0]],
  theta'[s0] ==  $\frac{A}{T1} \left( p - \frac{T2 * Sin[theta[s0]]}{r[s0]} \right)$ ,
  r'[s0] == A * Cos[theta[s0]],
  z'[s0] == A * Sin[theta[s0]]
};

(* Нагрузка и граничные условия *)
rBeg = r0 /. s0 -> s0Beg;
zBeg = z0 /. s0 -> s0Beg;
thetaBeg = Pi / 4 * 0.364;
rT1Beg =  $\frac{p * \pi * rBeg^2}{2 * \pi * Sin[thetaBeg]}$ ;
BConds = {r[s0Beg] == rBeg, z[s0Beg] == zBeg, theta[s0Beg] == thetaBeg, rT1[s0Beg] == rT1Beg};

(* Решение системы ДУ *)
y = {rT1[s0], theta[s0], r[s0], z[s0]};
sol = NDSolve[Join[sys, BConds], y, {s0, s0Beg, s0End}] // First;

```

(* Построение графиков *)

```

Do[Plot[y[[i]] /. sol, {s0, s0Beg, s0End}, AxesLabel -> {"s0", y[[i]]},
  GridLines -> Automatic] // Print, {i, 1, 4}];
ParametricPlot[{{r[s0], -z[s0]} /. sol, {r0, -z0}}, {s0, s0Beg, s0End},
  AxesLabel -> {"r,м", "-z,м"}, AxesOrigin -> {0, -zBeg}, GridLines -> Automatic,
  BaseStyle -> {FontSize -> 14}, PlotStyle -> Thick]
{rEnd, dz} = ({r[s0], z[s0]} /. sol) /. s0 -> s0End
{r0 /. s0 -> s0End}

```

Приложение 3. Программа и результаты аналитического вывода матрицы дифференциальных уравнений малых перемещений цилиндрической сетчатой оболочки с равновесным углом наклона нитей $\beta=54,7^\circ$

```

In[1]:= x = R * Cos[φ]; (* геометрия цилиндрической оболочки *)
        y = R * Sin[φ];
        z = -s;
        rCyl = {x, y, z};

In[4]:= t1 = D[rCyl, s]; (* естественные орты *)
        t2 = D[rCyl, φ] / R;
        n = Cross[t1, t2];
        (* вектор перемещений *)
        u = uk[s] * Cos[k * φ] * t1 + vk[s] * Sin[k * φ] * t2 + wk[s] * Cos[k * φ] * n;

In[7]:= r = rCyl + η * u; (* радиус-вектор деформированной оболочки *)
        Taylor2[g_] := Series[g, {η, 0, 2}] // Normal;
        Taylor2[Exp[η]]

Out[8]= 1 + η +  $\frac{\eta^2}{2}$ 

In[9]:= aR = cb * D[r, s] + sb * D[r, φ] / R;
        aL = cb * D[r, s] - sb * D[r, φ] / R;
        eR = (aR.aR - 1) / 2; (* деформации нитей *)
        eL = (aL.aL - 1) / 2;

In[12]:= r1 = D[r, s]; (* подготовка вычисления объема *)
        r2 = D[r, φ] / R;
        (* r0=r-t1*(t1.r)//Simplify ; *)
        rrr = Taylor2[r.Cross[r1, r2] / 3];

In[15]:= em = (eR - eL) / 2 // Simplify; (* полуразность деформаций нитей *)
        es = (eR + eL) / 2 // Simplify; (* полусумма деформаций нитей *)
        D[em, η] /. η → 0

Out[17]= -  $\frac{cb \ sb \ Sin[k \ \phi] \ (k \ uk[s] - R \ vk'[s])}{R}$ 

```

```

In[18]:= SinSimpl = {Sin[2 * k * π] → 0, Sin[4 * k * π] → 0};
Volume = (R / π) * Integrate[rrr // Expand, {φ, 0, 2 * π}] /. SinSimpl;

In[20]:= λm =      + η * λm1[s] * Sin[k * φ]; (*множитель Лагранжа*)
λs = λs0 + η * λs1[s] * Cos[k * φ]; (*множитель Лагранжа*)

In[22]:= Umm = (R / π) * Integrate[Taylor2[λm * em], {φ, 0, 2 * π}] /. SinSimpl
Out[22]= -cb sb η2 λm1[s] (k uk[s] - R vk'[s])

In[23]:= Upp = (R / π) * Integrate[Taylor2[λs * es], {φ, 0, 2 * π}] /. SinSimpl;

In[24]:= U = (Umm + Upp) / η2;
V = -p * Volume / η2;
UV = U + V; (* полный потенциал *)

In[27]:= dF1V = D[D[V, uk'[s]], s] // Simplify;
dF2V = D[D[V, vk'[s]], s] // Simplify;
dF3V = D[D[V, wk'[s]], s] // Simplify;
(* обобщенные силы *)
eq[1] = F1[s] == (D[U, uk'[s]] // Simplify)
eq[2] = F2[s] == (D[U, vk'[s]] // Simplify);
eq[3] = F3[s] == D[U, wk'[s]] // Simplify;
(* уравнения Эйлера (уравнения экстремалей) *)
eq[4] = (F1'[s] + dF1V) - (D[UV, uk[s]] // Simplify) == -q1k * R;
eq[5] = (F2'[s] + dF2V) - (D[UV, vk[s]] // Simplify) == -q2k * R;
eq[6] = (F3'[s] + dF3V) - (D[UV, wk[s]] // Simplify) == -q3k * R;
(* условия связи *)
eq[7] = D[U, λm1[s]] == 0;
eq[8] = (D[U, λs1[s]] // Simplify) == 0

Out[30]= F1[s] == cb2 R (λs1[s] + λs0 uk'[s])

Out[37]= k sb2 vk[s] + sb2 wk[s] + cb2 R uk'[s] == 0

```

```
In[38]:= eqAll = Table[eq[i], {i, 1, 8}];
Y = {uk[s], vk[s], wk[s], F1[s], F2[s], F3[s]}
dY = D[Y, s];
dYL = Join[dY, {λm1[s], λs1[s]}];
sol = Solve[eqAll, dYL] // First;
```

```
Out[39]= {uk[s], vk[s], wk[s], F1[s], F2[s], F3[s]}
```

```
In[43]:= dYsol = dY /. sol;
F = Table[D[dYsol[[i]], Y[[j]]], {i, 1, 6}, {j, 1, 6}];
FF = F //. {sb → Sqrt[2] * cb, λs0 → p * R / (2 * cb^2)} // Simplify;
FF // MatrixForm
```

```
Out[46]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2k}{R} & -\frac{2}{R} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{pR^2} \\ \frac{3k^2 p}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{R} & \frac{2}{R} \\ 0 & 3k^2 p & 3kp & \frac{2k}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 5kp & (4+k^2)p & \frac{2}{R} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[47]:= E6 = IdentityMatrix[6];
detF = Collect[R^6 * Det[FF - \frac{\sigma}{R} E6], \sigma, Simplify]
```

```
Out[48]= -8 k^4 (-1 + k^2) - 4 k^2 (-1 + k^2) \sigma^2 + 2 (-6 + k^2) \sigma^4 + \sigma^6
```

Приложение 4. Программа прямой минимизации функционала сетчатой оболочки вращения при осесимметричном нагружении на языке пакета Mathematica

```

taylor[f_] := Module[{g},
  g = Series[f, {e, 0, 4}];
  Sum[SeriesCoefficient[g, n] * e^n, {n, 1, 4} ]];

L = 100; n = 10; ds0 = L/n; s0Beg = 0; r0 = 90; z0 = s;
bP = Pi/6; bL = Pi/3;
{cP, cL} = Cos[{bP, bL}]; {sP, sL} = Sin[{bP, bL}];
vP = vL = 200; EF = 2 * 10^5 * (5/100); p = 1/10;
(*-----*)
s0[i_] := s0Beg + (i - 1) * ds0;
X = {};
epsP = {};
epsL = {};
KE[i_] := Module[{s01, s02, s0c, N1, N2, rr, zz, phi, dr, dz, dphi,
  g11, g12, g22, cP, cL, U, V, UV1, UV2, UVc},
  {s01, s02} = {s0[i], s0[i + 1]};
  s0c = (s01 + s02) / 2;
  N1 = 1 - (s - s01) / ds0;
  N2 = (s - s01) / ds0;
  rr = r0 + e * (r[i] * N1 + r[i + 1] * N2);
  zz = z0 + e * (z[i] * N1 + z[i + 1] * N2);
  phi = e * (phi[i] * N1 + phi[i + 1] * N2);
  {dr, dz, dphi} = D[{rr, zz, phi}, s];
  g11 = dr^2 + dz^2 + (rr * dphi)^2;
  g12 = rr^2 * dphi / r0;
  g22 = (rr / r0)^2;
  cP = (cP^2 * g11 - 2 * sP * cP * g12 + sP^2 * g22 - 1) / 2;
  cL = (cL^2 * g11 + 2 * sL * cL * g12 + sL^2 * g22 - 1) / 2;
  U = (EF / 2) * (vP * cP^2 / cP + vL * cL^2 / cL);
  V = -p * Pi * rr^2 * dz;
  X = Union[X, {r[i], r[i + 1], z[i], z[i + 1], phi[i], phi[i + 1]}];
  epsP = Append[epsP, cP /. s -> s0c];
  epsL = Append[epsL, cL /. s -> s0c];
  UV1 = (U + V) /. s -> s01;
  UVc = (U + V) /. s -> s0c;
  UV2 = (U + V) /. s -> s02;
  (taylor[UV1 + 4 * UVc + UV2] / 6 * ds0) /. e -> 1
];
BCond = {r[n + 1] -> 0, z[1] -> 0, phi[1] -> 0, r[1] -> 0}
F = Sum[KE[j], {j, 1, n}] /. BCond;
X = Cases[X /. BCond, Except[0]]
X = Cases[X /. BCond, Except[r0]]
sol = FindMinimum[F, X, Method -> "Newton", WorkingPrecision -> 25]
rzList = (Table[{z0 + z[i], r0 + r[i]} /. s -> s0[i], {i, 1, n + 1}] /. BCond) /. sol[[2]]
ListPlot[rzList, Joined -> True, PlotRange -> All, AxesLabel -> {"z, мм", "r, мм"},
  PlotStyle -> {Thick}, BaseStyle -> {FontSize -> 14}, GridLines -> Automatic]

```

«УТВЕРЖДАЮ»
 Первый проректор -
 проректор по научной работе
 д.т.н., профессор



АКТ

о внедрении результатов кандидатской диссертации аспиранта каф, РК-5

Чан Ки Ан «Разработка методов расчета безмоментных сетчатых оболочек вращения с несимметрично уложенными нитями» в учебный процесс МГТУ им. Н.Э.Баумана

Мы, нижеподписавшиеся, начальник учебного управления Авдеева В.И. и заведующий кафедрой РК-3 Ряховский О.А. составили настоящий акт о том, что в учебный процесс внедрены следующие основные результаты кандидатской диссертации Чан Ки Ан:

- методика выбора размеров и углов укладки нитей резинкордных упругих элементов упруго - компенсирующих муфт;
- методика расчета равновесных конфигураций резинкордных упругих элементов упруго - компенсирующих муфт при действии внутреннего давления, осевой силы и крутящего момента;
- программное обеспечение, предназначенное для моделирования напряженно - деформированного состояния резинкордных упругих элементов упруго - компенсирующих муфт.

Начальник учебного управления
 МГТУ им. Н.Э.Баумана

В.И.Авдеева

Зав. каф. РК-3 «Основы конструирования
 деталей и узлов машин» МГТУ им. Н.Э.Баумана
 д.т.н., профессор

О. А. Ряховский

УТВЕРЖДАЮ

Главный инженер

ООО «СЕГУЛА Технолодис Раша»

БАДИКОВ Руслан Николаевич



Дата « 14 » марта 2014 г.

АКТ

о внедрении результатов

кандидатской диссертационной работы Чан Ки Ан (каф. «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э.Баумана)

Комиссия в составе:

председатель главный инженер, Р.Н. БАДИКОВ

члены комиссии: ведущий инженер, А.Б. ДАЙНЕКО

члены комиссии: ведущий инженер, В.А. КОЗЛОВ

составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Чан Ки Ан «Разработка методов расчета безмоментных сетчатых оболочек вращения с несимметрично уложенными нитями», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, использованы в проектной деятельности ООО «СЕГУЛА Технолодис Раша» при разработке и проектировании композитных корпусов деталей (например контейнеры блока аккумуляторов) для прототипов автомобилей с электрической и гибридной трансмиссией компании СЕГУЛА Технолодис в виде:

1. Методик расчета равновесной конфигурации сетчатых оболочек несимметричной формы.
2. Программного обеспечения, предназначенного для моделирования напряженно-деформированного состояния сетчатых оболочек несимметричной формы при действии распределенных нагрузок и сосредоточенных сил.

Использование указанных результатов позволяет повысить качество проектирования композитных деталей прототипов автомобилей с электрической и гибридной трансмиссией.

Председатель комиссии подпись

Р.Н.Бадиков

Члены комиссии: подпись

А.Б. Дайнеко

Члены комиссии: подпись

В.А. Козлов