

Б. О. Волков
volkovbo@bmstu.ru

ИНТЕГРАЛЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛЕКЦИЯ 5

Определение 1. Функция называется непрерывно дифференцируемой на отрезке, если у нее существует непрерывная производная на этом отрезке.

Теорема 1. (Экз 9. Теорема об интегрировании подстановкой.) Пусть функция f непрерывна на $[x_1, x_2]$. Пусть функция φ непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$. Пусть $\varphi(t_1) = x_1$, $\varphi(t_2) = x_2$ и $\varphi(t) \in [x_1, x_2] \forall t \in [t_1, t_2]$. Тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство. Т.к. функция f непрерывна на отрезке $[x_1, x_2]$, то у нее существует первообразная F на этом отрезке. По теореме о производной сложной функции для $\forall t \in [t_1, t_2]$ выполняется

$$(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Тогда сложная функция $F(\varphi(t))$ будет первообразной непрерывной функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[t_1, t_2]$. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$

и

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = F(x_2) - F(x_1).$$

Из этих двух равенств следует утверждение теоремы. □

Замечание 1. При замене переменной в определенном интеграле меняются пределы интегрирования.

Пример 1.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \left| \begin{array}{l} x=\sin t \\ dx=\cos t dt \\ t_2=\arcsin 1=\frac{\pi}{2} \\ t_1=\arcsin 0=0 \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{(1+\cos(2t))}{2} dt = \\ &= \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(2t) dt = \left| \begin{array}{l} y=2t \\ dt=\frac{dy}{2} \\ y_2=\pi \\ y_1=0 \end{array} \right| = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos y dy = \frac{\pi}{4} - \frac{\sin y}{4} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Теорема 2. (Экз. 11) Пусть функция f непрерывна на $[-a, a]$ и периодична с периодом T . Тогда $\forall a \in \mathbb{R}$ выполняется

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Доказательство. По свойству аддитивности определенного интеграла:

$$\int_0^T f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{a+T} f(x)dx + \int_{a+T}^T f(x)dx. \quad (1)$$

Рассмотрим последний интеграл в правой части равенства:

$$\begin{aligned} \int_{a+T}^T f(x)dx &= - \int_T^{a+T} f(x)dx = \{f(x) = f(x-T) \text{ из-за периодичности } f\} = \\ &= - \int_T^{a+T} f(x-T)dx = |\text{замена переменной: } t = x - T| = - \int_0^a f(t)dt = \\ &= |\text{замена переменной: } x = t| = - \int_0^a f(x)dx \quad (2) \end{aligned}$$

Подставив (2) в правую часть (1), мы получаем утверждение теоремы. □

Теорема 3. (Экз. 11) Пусть функция f непрерывна на $[-a, a]$. Тогда

1. $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$, если f — нечетная функция
2. $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$, если f — четная функция

Доказательство. По свойству аддитивности определенного интеграла:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx. \quad (3)$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части равенства:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x)dx &= |\text{замена переменной: } x = -t, dx = -dt| = - \int_a^0 f(-t)dt = \\ &= \int_0^a f(-t)dt = |\text{замена переменной: } x = t| = \int_0^a f(-x)dx \quad (4) \end{aligned}$$

Подставив (4) в (3), мы получаем

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a (f(x) + f(-x))dx = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ — нечетная} \\ 2 \int_0^a f(x)dx, & \text{если } f \text{ — четная} \end{cases}$$

□

1 Несобственный интеграл

На предыдущих лекциях мы определили интегрируемость (по Риману) функции на отрезке. Напомним, функция называется интегрируемой на отрезке, если у нее на этом отрезке существует определенный интеграл, который по-другому называется собственным интегралом или интегралом Римана. Несобственный интеграл I рода позволяет определить интеграл от функции на неограниченном промежутке, т.е. определить такие интегралы:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^a f(x)dx, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Напомним, что необходимое условие функции интегрируемости на отрезке — это ее ограниченность на этом отрезке. Несобственный интеграл II рода позволяет обобщить понятия интеграла для неограниченных функций на ограниченном промежутке.

1.1 Несобственный интеграл 1-го рода

Пусть f интегрируема на $[a, b]$ для $\forall b \geq a$. Функция $J_f(b) = \int_a^b f(x)dx$ аргумента b — интеграл с переменным верхним пределом.

Определение 2. (ЭКЗ,РК) Несобственный интеграл 1-го рода $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ — это предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} J_f(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Определение 3. (ЭКЗ,РК) Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл 1-го рода $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся. Если конечный предел не существует (т.е. предел либо равен бесконечности или не существует), то интеграл называется расходящимся.

Несобственный интеграл 1-го рода $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ определяется аналогично: $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x)dx$. Аналогично же определяется его сходимоссть и расходимость.

Пусть c — произвольная точка из \mathbb{R} . Тогда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$. Такой интеграл называется сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части равенства.

Свойства несобственного интеграла 1-го рода:

1. **Линейность.** Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся, то

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

2. **Аддитивность.** Пусть $c \in [a, +\infty)$. Интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. Если сходятся, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

3. **Формула Ньютона-Лейбница для несобственного интеграл 1-го рода.**

Пусть f непрерывна на $[a; +\infty)$. Пусть F — первообразная f и пусть $F(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) =: F(x)|_a^{+\infty}.$$

Аналогично, пусть $F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = F(a) - F(-\infty) =: F(x)|_{-\infty}^a$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) =: F(x)|_{-\infty}^{+\infty}$$

Интеграл Дирихле — несобственный интеграл 1-го рода вида

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha},$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$. Исследуем его на сходимоссть. Рассмотрим случаи.

1. Пусть $\alpha = 1$. По формуле Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов 1-го рода:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \ln 1 = +\infty$$

Интеграл расходится.

2. Пусть $\alpha \neq 1$. По формуле Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов 1-го рода:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

При $\alpha > 1$ выполняется $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = 0$ и при $\alpha < 1$ выполняется $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty$.

Таким образом, интеграл Дирихле $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, если $\alpha > 1$; расходится, если $\alpha \leq 1$.

1.2 Несобственный интеграл 2-го рода

Пусть f интегрируема на $[a', b]$ для $\forall a' \in (a, b]$. Функция $J_f(a') = \int_{a'}^b f(x) dx$ аргумента a' — интеграл с переменным нижним пределом.

Определение 4. (ЭКЗ, РК) Несобственный интеграл 2-го рода $\int_a^b f(x) dx$ — это предел

$$\lim_{a' \rightarrow a+0} J_f(a') = \lim_{a' \rightarrow a+0} \int_{a'}^b f(x) dx.$$

Определение 5. (ЭКЗ, РК) Если существует конечный предел $\lim_{a' \rightarrow a+0} \int_{a'}^b f(x) dx$, то несобственный интеграл 2-го рода $\int_a^b f(x) dx$ называется сходящимся. Если конечный предел не существует (т.е. предел либо равен бесконечности или не существует), то интеграл называется расходящимся.

Замечание 2. Несобственный интеграл 2-го рода обозначается также, как и определенный интеграл. Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то по теореме о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом определенный интеграл и несобственный интеграл 2-го рода для функции f совпадают. Если же функция f не является ограниченной в некоторой правой проколотой окрестности a , то f не может быть интегрируемой на отрезке $[a, b]$, но при этом несобственный интеграл 2-го рода $\int_a^b f(x) dx$ может сходиться.

Свойства несобственного интеграла 2-го рода:

1. **Линейность.** Если $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$ сходятся, то

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

2. **Аддитивность.** Пусть $c \in (a, b)$. Интегралы $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^c f(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно. Если сходятся, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

3. **Формула Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла 2-го рода.** Пусть f непрерывна на $(a; b]$. Пусть F — первообразная f и пусть $F(a+0) := \lim_{x \rightarrow a+0} F(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a+0) = F(x)|_{a+}^b.$$

Замечание 3. Если же f интегрируема на $[a, b']$ для $\forall b' \in [a, b)$, несобственный интеграл 2-го рода определяется по формуле

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{b' \rightarrow b-0} \int_a^{b'} f(x) dx.$$

Интеграл Дирихле — несобственный интеграл 2-го рода вида

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha},$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$. Исследуем его на сходимость. Рассмотрим случаи.

1. Пусть $\alpha = 1$. По формуле Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов 2-го рода:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x|_{0+}^1 = \ln 1 - \lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = +\infty$$

Интеграл расходится.

2. Пусть $\alpha \neq 1$. По формуле Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов 2-го рода:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 x^{-\alpha} dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{0+}^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

При $\alpha > 1$ выполняется $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = -\infty$ и при $\alpha < 1$ выполняется $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = 0$.

Таким образом, интеграл Дирихле $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, если $\alpha < 1$; расходится, если $\alpha \geq 1$. Аналогично можно показать, что интегралы $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ и $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ сходятся, если $\alpha < 1$; расходятся, если $\alpha \geq 1$.

В задачах на исследовании на сходимость несобственных интегралов интегралы Дирихле 1-го и 2-го рода будут использоваться как эталон.

ЛЕКЦИЯ 6

2 Признаки сходимости

Теорема 4. Пусть f монотонна на $[a, b)$ ($b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ тогда и только тогда, когда f ограничена на $[a, b)$.

Доказательство. Без доказательства. □

Теорема 5. (Экз 12. Признак сходимости по неравенству) Пусть f и g интегрируемы на $[a, b]$ для $\forall b \geq a$. Пусть выполняется $0 \leq f(x) \leq g(x)$ для $\forall x \geq a$. Тогда

1. если $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится;

2. если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

Доказательство. 1. Пусть $J_f(x) = \int_a^x f(t)dt$ и $J_g(x) = \int_a^x g(t)dt$ — интегралы с переменным верхним пределом. Пусть несобственный интеграл 1-го рода $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится. По определению это означает, что существует конечный предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x)dx = M.$$

Покажем, что функции J_f и J_g не убывают на $[a, +\infty)$. Пусть $x' > x > a$. Тогда по свойству аддитивности определенного интеграла

$$J_f(x') = \int_a^{x'} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x'} f(t)dt = J_f(x) + \int_x^{x'} f(t)dt \geq J_f(x)$$

т.к. $\int_x^{x'} f(t)dt \geq 0$ как интеграл от неотрицательной функции. Значит функция J_f действительно не убывает. Аналогично доказывается, функция J_g не убывает. Функция J_g не убывает на $[a, +\infty)$ и \exists конечный предел $M = \lim_{x \rightarrow +\infty} J_g(x)$. Значит, $J_g(x) \leq M$ для $\forall x \in [a, +\infty)$. По теореме о неравенстве в определенном интеграле для $\forall x \in [a, +\infty)$ выполняется

$$J_f(x) = \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt = J_g(x) \leq M.$$

Таким образом, $J_f(x) \leq M$ для $\forall x \in [a, +\infty)$.

Функция J_f ограничена и не убывает на $[a, +\infty)$. Следовательно, существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} J_f(x) = \int_a^{+\infty} f(t)dt$. Этот интеграл сходится.

2. Пусть несобственный интеграл 1-го рода $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Докажем от противного, что $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Пусть это не так и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится. Тогда, как мы выше доказали, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ тоже бы сходился. Мы получили противоречие. □

Пример 2. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} dx \tag{5}$$

Выполняется двойное неравенство

$$0 \leq \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} \leq \frac{\pi}{2x^2}$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2} dx$ сходится. Значит и интеграл (5) сходится.

Пример 3. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{2 + \sin x}{\sqrt{x}} dx \tag{6}$$

Выполняется неравенство

$$\frac{2 + \sin x}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ расходится. Значит и интеграл (6) расходится.

Теорема 6. (Экз. 11. Предельный признак сходимости) Пусть f и g интегрируема на $[a, b]$ для $\forall b > a$. Пусть $0 < f(x)$ и $0 < g(x)$ для $\forall x \geq a$. Пусть \exists конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$. Тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$, то по определению предела для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $|\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda| < \varepsilon$ для $\forall x \in (\frac{1}{\delta(\varepsilon)}, +\infty)$. Возьмем $\varepsilon = \lambda/2$. При $x \in (\frac{1}{\delta(\lambda/2)}, +\infty)$ выполняется

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| < \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow -\frac{\lambda}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3\lambda}{2} \quad (7)$$

Пусть $c = \max\{a, \frac{1}{\delta(\lambda/2)}\}$. Интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. Интегралы $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ и $\int_c^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. В силу (7) при $x \geq c$ выполняется

$$0 < \frac{\lambda}{2}g(x) < f(x) < \frac{3\lambda}{2}g(x) \quad (8)$$

Если интеграл $\int_c^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то и интеграл $\int_c^{+\infty} (\frac{3\lambda}{2}g(x))dx$ сходится. В силу (8) интеграл $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ сходится по признаку сравнения. Если интеграл $\int_c^{+\infty} g(x)dx$ расходится, то и $\int_c^{+\infty} (\frac{\lambda}{2}g(x))dx$ расходится. В силу (8) интеграл $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ расходится по признаку сравнения. □

Пример 4. Исследуем при каких α сходится интеграл

$$\int_1^{+\infty} \sin^\alpha \left(\frac{1}{x} \right) dx. \quad (9)$$

Выполняется

$$\sin^\alpha \left(\frac{1}{x} \right) \sim \frac{1}{x^\alpha}, x \rightarrow +\infty.$$

Интеграл Дирихле $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$. Значит, интеграл (9) сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$.

Определение 6. (ЭКЗ,РК) Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, если интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходятся.

Определение 7. (ЭКЗ,РК) Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится условно, если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится.

Теорема 7. (Экз. 11. Критерий абсолютной сходимости) Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно тогда и только, когда интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Пусть $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится. Из двойного неравенства

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

следует двойное неравенство

$$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

В силу линейности $\int_a^{+\infty} 2|f(x)|dx$ сходится. По признаку сравнения сходится интеграл $\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)dx$. А значит $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится как разность двух сходящихся интегралов $\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)dx$ и $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$. □

Пример 5. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ – сходится абсолютно, т.к. $\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. По признаку сравнения $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$ сходится.

Пример 6. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ – сходится условно. В начале покажем, что $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{\sin x}{x} dx$$

Интегрируя по частям, мы получаем

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^R - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Значит

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos x}{x} \Big|_1^R \right) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ сходится. Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится.

Покажем, $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ расходится. Выполняется

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x}$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ расходится. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ сходится (доказывается аналогично $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$). Значит, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx$ расходится. По признаку сравнения $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ расходится.

3 Признаки сходимости несобственных интегралов 2-го рода

(ЭКЗ 15)

Теорема 8. (признак сходимости по неравенству) Пусть f и g интегрируемы на $[a', b]$ для $\forall a' \in (a, b]$. Пусть выполняется $0 \leq f(x) \leq g(x)$ для $\forall x \in (a, b]$. Тогда

1. если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ сходится;
2. если $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то $\int_a^b g(x)dx$ расходится.

Теорема 9. (предельный признак сходимости) Пусть f и g интегрируема на $[a', b]$ для $\forall a' \in (a, b]$. Пусть $0 < f(x)$ и $0 < g(x)$ для $\forall x \in (a, b]$. Пусть \exists конечный предел $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$. Тогда интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Определение 8. Пусть f интегрируема на $[a', b]$ для $\forall a' \in (a, b]$. Несобственный интеграл 2-го рода $\int_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно, если интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b |f(x)|dx$ сходятся.

Определение 9. Пусть f интегрируема на $[a', b]$ для $\forall a' \in (a, b]$. Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится условно, если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ расходится.

Теорема 10. (Критерий абсолютной сходимости) Несобственный интеграл 2-го рода $\int_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится.

ЛЕКЦИЯ 7

4 Площадь криволинейной трапеции

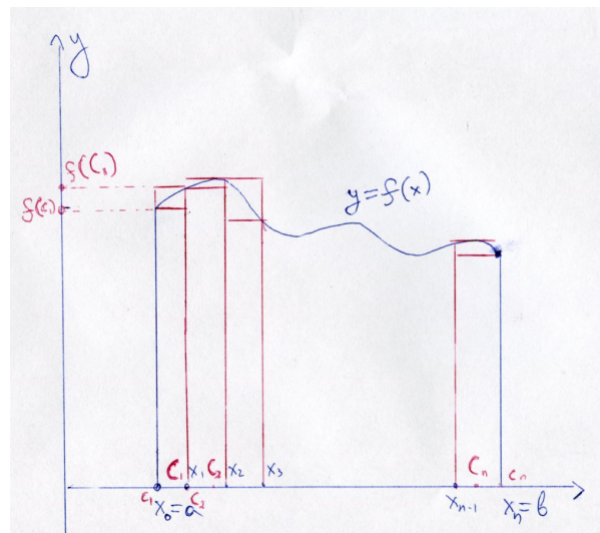


Рис. 1: Площадь криволинейной трапеции

Криволинейная трапеция — плоская фигура, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графиком функции $y = f(x)$, где f непрерывна на $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ для $\forall x \in [a, b]$.

Теорема 11. (ЭКЗ 16) Площадь криволинейной трапеции можно найти по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ — разбиение T отрезка $[a, b]$. Пусть на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения выбрана точка c_i такая, что

$$f(c_i) = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Рассмотрим размеченное разбиение (T, c) , где $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. Пусть на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения выбрана точка C_i такая, что

$$f(C_i) = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Рассмотрим размеченное разбиение (T, C) , где $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$. Пусть S_i – площадь криволинейной трапеции, ограниченной $y = 0$, $x = x_{i-1}$, $x = x_i$ и $y = f(x)$. Т.к., эта криволинейная трапеция содержит прямоугольник со сторонами $f(c_i)$ и Δx_i , то

$$f(c_i)\Delta x_i \leq S_i.$$

Кроме того, эта криволинейная трапеция содержится внутри прямоугольника со сторонами $f(C_i)$ и Δx_i . Значит,

$$S_i \leq f(C_i)\Delta x_i.$$

Тогда получаем

$$\sigma(f, T, c) = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \leq S = \sum_{i=1}^n S_i \leq \sigma(f, T, C) = \sum_{i=1}^n f(C_i)\Delta x_i.$$

Переходим к пределу при $\lambda(T) \rightarrow 0$:

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(f, T, c) = \int_a^b f(x)dx = S = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(f, T, C).$$

□

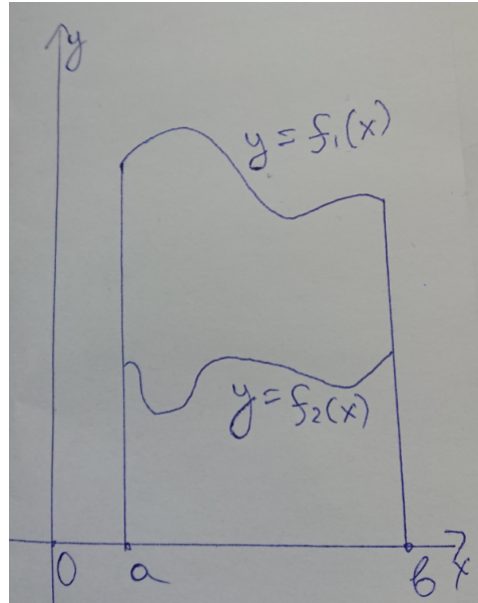


Рис. 2: Площадь криволинейной трапеции

Пусть криволинейная трапеция ограничена прямыми $x = a$, $x = b$, графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где f_1, f_2 непрерывны на $[a, b]$ и $f_1(x) \geq f_2(x)$ для $\forall x \in [a, b]$. Тогда площадь трапеции находится по формуле

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx.$$

Если верхняя граница криволинейной трапеции задана параметрически $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t), \end{cases}$ где $t \in [t_1, t_2]$, то площадь можно найти по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt. \quad (10)$$

Формула верна (10) для площади фигуры, ограниченной петлей (при этом возрастание параметра должно соответствовать обходу по часовой стрелке).

Пример 7. Найти площадь, ограниченную эллипсом

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Вспользуемся формулой (10):

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_{2\pi}^0 b \sin t (a \cos t)' dt = -ab \int_{2\pi}^0 \sin^2 t dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2t)) dt = \frac{ab}{2} t \Big|_0^{2\pi} + \frac{ab}{4} \sin(2t) \Big|_0^{2\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$

5 Площадь криволинейного сектора

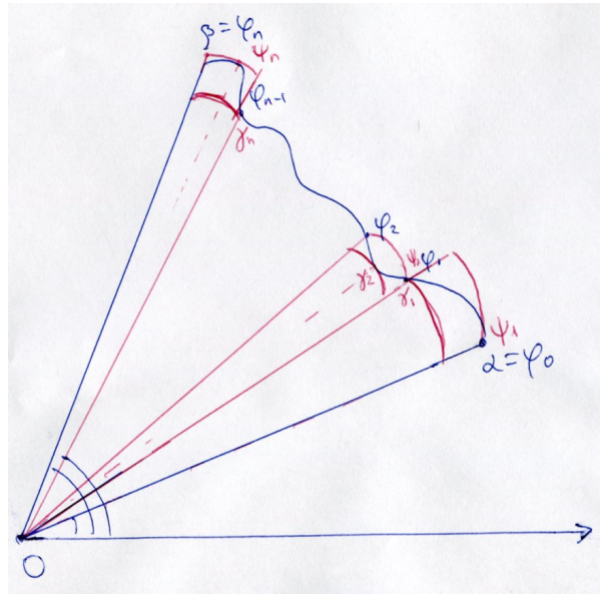


Рис. 3: Площадь криволинейного сектора

Пусть $\alpha \leq \beta \leq \alpha + 2\pi$. Криволинейный сектор — плоская фигура, ограниченная лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = r(\varphi)$.

Теорема 12. (ЭКЗ 17) Площадь криволинейного сектора находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta$ разбиение T отрезка $[\alpha, \beta]$. Пусть на каждом отрезке $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ разбиения выбрана точка γ_i такая, что

$$r(\gamma_i) = \min_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} r(\varphi).$$

Рассмотрим размеченное разбиение (T, γ) , где $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$. Пусть на каждом отрезке $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ разбиения выбрана точка ψ_i такая, что

$$r(\psi_i) = \max_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} r(\varphi).$$

Рассмотрим размеченное разбиение (T, ψ) , где $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$.

Пусть S_i – площадь криволинейного сектора, ограниченного $\varphi = \varphi_{i-1}$, $\varphi = \varphi_i$ и $r = r(\varphi)$. Т.к., этот криволинейный сектор содержит сектор радиуса $r(\gamma_i)$, то

$$\frac{1}{2}r^2(\gamma_i)\Delta\varphi_i \leq S_i$$

Кроме того, этот криволинейный сектор содержится внутри сектора радиуса со $r(\psi_i)$. Значит,

$$S_i \leq \frac{1}{2}r^2(\psi_i)\Delta\varphi_i$$

Тогда получаем

$$\sigma\left(\frac{1}{2}r^2, T, \gamma\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}r^2(\gamma_i)\Delta\varphi_i \leq S = \sum_{i=1}^n S_i \leq \sigma\left(\frac{1}{2}r^2, T, \psi\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}r^2(\psi_i)\Delta\varphi_i.$$

Переходим к пределу при $\lambda(T) \rightarrow 0$:

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma\left(\frac{1}{2}r^2, T, \gamma\right) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi = S = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma\left(\frac{r^2}{2}, T, \psi\right)$$

□

6 Объем тела

(ЭКЗ 18)

Пусть площадь сечения тела плоскостью перпендикулярной оси OX проходящей через точку $(x, 0, 0)$, – это $S(x)$. Объем тела находится по формуле $V = \int_a^b S(x) dx$.

Пусть $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ – разбиение T отрезка $[a, b]$. Пусть $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ – набор размеченных точек. Объем V_i части тела между плоскостями $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$ равен приближенно

$$V_i \approx \Delta x_i S(c_i)$$

(Объем цилиндра высоты Δx_i и с площадью основания $S(c_i)$). Тогда

$$V = \sum_{i=1}^n V_i \approx \sum_{i=1}^n S(c_i) \Delta x_i = \sigma(S, T, C).$$

Перейдя к пределу при $\lambda(T) \rightarrow 0$, получаем

$$V = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(S, T, C) = \int_a^b S(x) dx.$$

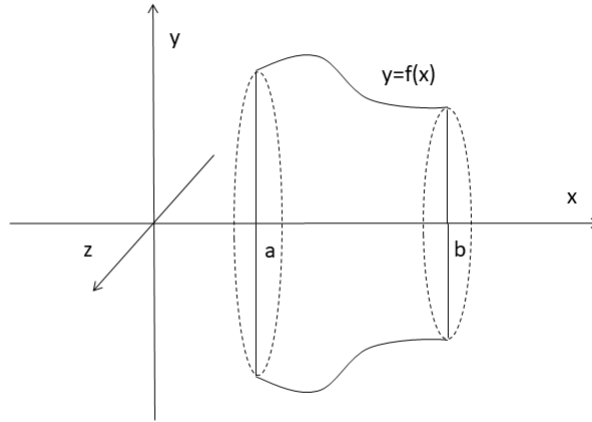


Рис. 4: Вращение криволинейной трапеции вокруг оси OX

Рассмотрим криволинейную трапецию ограниченную осью OX , прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x) \geq 0$. Объем тела, полученного вращением этой криволинейной трапеции вокруг оси OX (см. рис. 4), равен

$$V_{OX} = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Действительно, площадь сечения $S(x) = \pi f^2(x)$ (это площадь круга радиуса $f(x)$). Тогда

$$V_{OX} = \int_a^b S(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Если верхняя граница криволинейной трапеции задана параметрически $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t), \end{cases}$ где $t \in [t_1, t_2]$ и $x'(t) > 0$ при $t \in [t_1, t_2]$, то

$$V_{OX} = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt.$$

Рассмотрим тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг оси OY (см. рис. 5).

Тогда объем можно найти по формуле:

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b |f(x)| x dx.$$

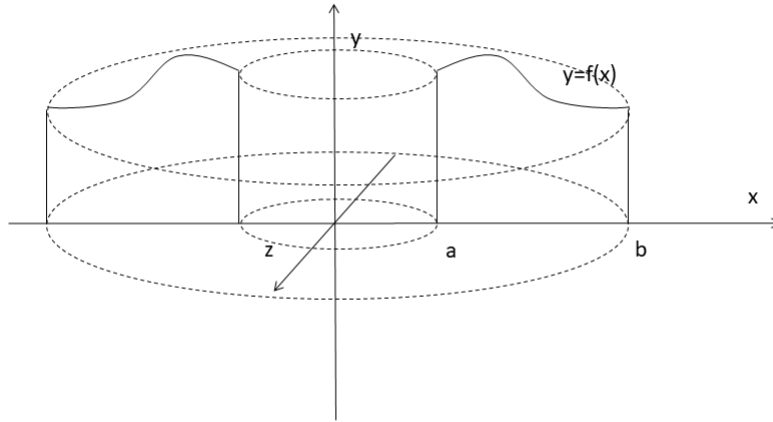


Рис. 5: Вращение криволинейной трапеции вокруг оси OY

Если верхняя граница криволинейной трапеции задана параметрически $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t), \end{cases}$

где $t \in [t_1, t_2]$ и $x'(t) > 0$ при $t \in [t_1, t_2]$, то $V_{OY} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|x(t)x'(t)dt$.

Пусть криволинейный сектор ограничен лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, где $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$ и кривой $r = r(\varphi)$. Объем тела, полученного вращением криволинейного сектора вокруг полярной оси, можно найти по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

7 Длина кривой

Гладкая кривая задается вектор-функцией

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $x, y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ (непрерывно дифференцируемые функции). Рассмотрим ломаную, вписанную в кривую (см. рис. 6). Пусть $T: a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Вершины ломаной — это точки $A_i = (x(t_i), y(t_i))$. Ломанная — это объединение отрезков $\cup_{i=1}^n [A_{i-1}, A_i]$. Пусть Δl_i — длина звена ломаной $[A_{i-1}A_i]$. Длина всей ломанной — это $l(T) = \sum_{i=1}^n \Delta l_i$. Длину гладкой кривой можно определить по формуле

$$l = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} l(T).$$

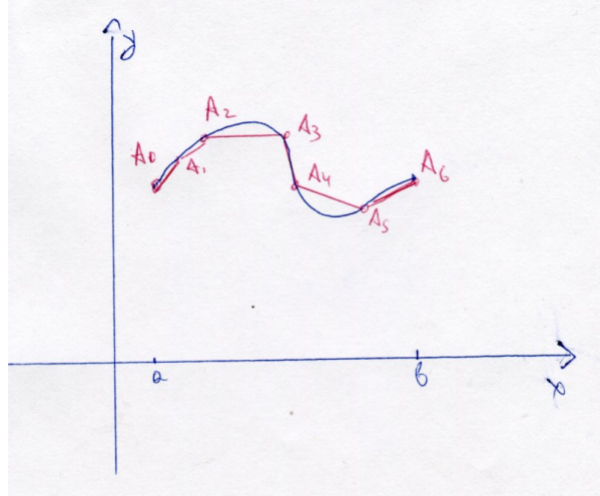


Рис. 6: Кривая и вписанная в нее ломаная

Теорема 13. (ЭКЗ 19) Пусть кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$, где $x \in [a, b]$, т.е. гладкая кривая задана

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x), \end{cases}$$

где $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$. Тогда верна следующая форма для вычисления дуги этой кривой

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $T: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ — разбиение отрезка $[a, b]$.

По теореме Пифагора длина звена ломаной $[A_{i-1}A_i]$ — это

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

По теореме Лагранжа $\exists c_i \in [x_{i-1}, x_i]: f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i$. Отсюда следует, что

$$\Delta l_i = \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}.$$

Рассмотрим размеченное разбиение отрезка (T, C) , где $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. Тогда

$$l(T) = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sigma(\sqrt{1 + (f'(x))^2}, T, C).$$

Тогда

$$l = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} l(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(\sqrt{1 + (f'(x))^2}, T, C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

□

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t), \end{cases}$ где $t \in [t_1, t_2]$ и $x'(t) > 0$ при $t \in [t_1, t_2]$, то длина кривой

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} x'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(y'(t))^2 + (x'(t))^2} dt \quad (11)$$

Теорема 14. (Экз. 20) Пусть гладкая кривая задана в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, где r — гладкая функция. Тогда длина кривой находится по формуле:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

Доказательство. Пусть кривая в полярных координатах задана $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Тогда

$$\begin{cases} x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi \\ y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

Найдем производные:

$$\begin{cases} x'(\varphi) = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi \\ y'(\varphi) = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi. \end{cases}$$

Выполняется тождество:

$$\begin{aligned} (x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 &= (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 + (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2 = \\ &= (r'(\varphi))^2 \cos^2 \varphi - 2r(\varphi)r'(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + r^2(\varphi) \sin^2 \varphi + \\ &+ (r'(\varphi))^2 \sin^2 \varphi + 2r(\varphi)r'(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + r^2(\varphi) \cos^2 \varphi = \\ &= (r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi) \quad (12) \end{aligned}$$

Тогда в силу (11):

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(y'(\varphi))^2 + (x'(\varphi))^2} d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

□

8 Площадь поверхности вращения

При вращении криволинейной трапеции вокруг оси OX (см. рис. 4) площадь боковой поверхности находится по формуле.

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

При параметрическом задании верхней границы криволинейной трапеции $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$

где $t \in [t_1, t_2]$, площадь поверхности находится по формуле

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

ЛЕКЦИЯ 8

9 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Определение 10. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) порядка n называется уравнение на неизвестную функцию $y = y(x)$ вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (13)$$

где F — функция $(n + 2)$ переменных

Функция φ на интервале I является решением ОДУ (13), если при подстановки $\varphi(x)$ вместо y выражение (13) станет верным тождеством для $\forall x \in I$.

Определение 11. ОДУ вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (14)$$

где f — функция $(n + 1)$ переменных называется разрешенным относительно старшей производной.

Процесс решения ОДУ называется его интегрированием. График частного решения называется интегральной кривой.

ОДУ 1-го порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0$$

ОДУ 1-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид:

$$y' = f(x, y)$$

Определение 12. Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, норма x определяется формулой $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Определение 13. $U_\varepsilon(x^0)$ — ε -окрестность точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ — это множество $U_\varepsilon(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^2: |x - x^0| < \varepsilon\}$.

Определение 14. Функция f непрерывна в точке $x^0 \in \mathbb{R}^2$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$ при $x \in U_\delta(x^0)$.

Определение 15. Множество $M \subset \mathbb{R}^2$ называется открытым, если для $\forall x \in M \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) \subset M$.

Определение 16. Множество $M \subset \mathbb{R}^2$ называется связным, если для $\forall x, y \in M$ существует кривая с концами x и y , которая полностью лежит в M .

Определение 17. Множество $M \subset \mathbb{R}^2$ называется областью, если оно открыто и связно.

Задача Коши — это задача найти решение ОДУ $y' = f(x, y)$ такое, что это решение будет удовлетворять граничным условию

$$y(x_0) = y_0$$

Теорема 15. (Теорема Коши) Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^2$. Пусть ее частная производная $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывна в D . Тогда для $\forall (x_0, y_0) \in D$ задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (15)$$

имеет единственное решение.

Замечание 4. Частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f'_y(x,y) := \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$.

Пусть D — область в \mathbb{R}^2 . Общее решение ОДУ

$$y' = f(x, y), \quad (16)$$

где $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, — это функция двух аргументов $\varphi(x, c)$ такая, что

1. $\varphi(x, c)$ — частное решение (16) для $\forall c$;
2. для $\forall(x_0, y_0) \in D$ $\exists c$ такое, что $\varphi(x_0, c) = y_0$ (оно удовлетворяет начальным условиям $y(x_0) = y_0$).

Общее решение, найденное в неявном виде

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

называется общим интегралом. Решение вида

$$\Phi(x, y, C_0) = 0,$$

где $C_0 = \text{const}$, называется частным интегралом.

Запись ОДУ 1-го порядка в дифференциалах:

$$P(x, y)dx = Q(x, y)dy$$

Эта запись означает, что мы можем искать решение в виде функции $y(x)$ или в виде функции $x(y)$:

$$\begin{cases} x'P(x, y) + Q(x, y) = 0 \\ P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \end{cases}$$

10 Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения с разделяющимися переменными имеют вид: $y' = f(x)g(y)$ или, используя запись $y' = \frac{dy}{dx}$, имеют вид:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y). \quad (17)$$

Если $g(y_0) = 0$, то $y \equiv y_0$ — особое решение уравнения. Поделим обе части (17) на $g(y)$ и домножим на dx .

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \quad (18)$$

Левая часть (18) зависит только от y , правая часть только от x — переменные разделились. Проинтегрируем обе части (18). Получаем общий интеграл:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Уравнение с разделяющимися переменными в дифференциалах имеет вид:

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0. \quad (19)$$

Перенесем второе слагаемое в правую часть:

$$P_1(x)Q_1(y)dx = -P_2(x)Q_2(y)dy. \quad (20)$$

Если $P_2(x_0) = 0$ или $Q_1(y_0) = 0$, то $x \equiv x_0$ и $y \equiv y_0$ — особые решения. Поделим обе части (20) на $P_2(x)Q_1(y)$. Получаем

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = -\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy. \quad (21)$$

Проинтегрировав обе части, получаем общий интеграл:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = -\int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy + C.$$

Пример 8. Решим задачу Коши

$$\begin{cases} (y + xy)dx + (x - xy)dy \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Это ОДУ с разделяющимися переменными. Уравнение можно переписать в следующем виде:

$$y(1 + x)dx = x(y - 1)dy.$$

Разделяем переменные

$$\frac{1 + x}{x}dx = \frac{y - 1}{y}dy.$$

Особые решения $x \equiv 0$ и $y \equiv 0$ не удовлетворяют начальным условиям $y(1) = 1$. Интегрируя

$$\int \frac{1 + x}{x}dx = \int \frac{y - 1}{y}dy,$$

получаем общий интеграл:

$$x + \ln|x| = y - \ln|y| + C. \quad (22)$$

Подставляем в (22) начальные условия $x = 1, y = 1$, получаем

$$0 = C.$$

Ответ: $x - y + \ln|xy| = 0$ — частный интеграл.

11 Однородное ОДУ

Уравнение, разрешенное относительно старшей производной, вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (23)$$

называется однородным ОДУ. Решается заменой $y(x) = u(x)x$, где u — новая неизвестная функция. При этом уравнение сведется к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, т.к.

$$y' = u'x + u,$$

то (23) можно переписать в виде

$$u'x = f(u) - u.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Пример 9. Решим уравнение

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Замена $y = ux$. Тогда

$$u + u'x = \frac{1}{u} + u.$$

Разделяем переменные

$$udu = \frac{dx}{x}$$

Интегрируем

$$\int udu = \int \frac{dx}{x}$$

Получаем общий интеграл:

$$\frac{u^2}{2} - \ln|x| = C$$

Подставляя $u = \frac{y}{x}$, получаем общий интеграл

$$\frac{y^2}{2x^2} - \ln|x| = C$$

Функция $P(x, y)$ — однородная с порядком однородности k , если $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k P(x, y)$.

Пример 10. $P(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2$ — однородная функция с коэффициентом однородности 2, т.к. $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2(x^2 + 2xy - 3y^2)$.

Уравнение в дифференциалах

$$P(x, y)dx = Q(x, y)dy$$

является однородным, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции с одинаковым коэффициентом однородности. Решается заменой $y = u(x)x$ или заменой $x = v(y)y$.

12 Линейное ОДУ 1-го порядка и уравнение Бернулли

(ЭКЗ. 21)

Линейное ОДУ 1 порядка имеет вид

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x),$$

где p, f — непрерывные функции. Оно называется линейным однородным дифференциальным уравнением ЛОДУ, если $f \equiv 0$, иначе оно называется линейным неоднородным.

Уравнение Бернулли имеет вид

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x)y^\alpha(x),$$

где $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

12.1 Метод Лагранжа (вариации постоянной) интегрирования линейного неоднородного дифференциального уравнения

Найдем общее решение неоднородного ЛОДУ 1-го порядка:

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (24)$$

Сначала решим вспомогательную задачу, а именно решим однородное ЛОДУ 1-го порядка:

$$y' + p(x)y = 0. \quad (25)$$

У этого уравнения можно разделить переменные:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

Интегрируя обе части равенства

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x)dx,$$

мы получаем:

$$\ln |y| = - \int p(x)dx + D$$

Пусть $C = \pm e^D$. Тогда общее решение однородного ОДУ 1-го порядка (25) имеет вид

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \quad (26)$$

Будем искать решение неоднородного уравнения (24) в виде

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad (27)$$

(Мы заменяем константу C в выражении (26) на неизвестную функцию $C(x)$. Поэтому этот метод решения называется методом вариации постоянной.) Тогда

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} \quad (28)$$

Подставляя выражения (27) и (28) в уравнение (24), мы получаем:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = \\ &= C'(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x). \end{aligned} \quad (29)$$

Умножая обе части последнего равенства на $e^{\int p(x)dx}$, мы получаем

$$C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

Интегрируя, получаем

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1$$

Таким образом, общее решение неоднородного ЛОДУ 1-го порядка (24) имеет вид:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1 \right)$$

Пример 11. Решим задачу Коши

$$\begin{cases} y' + y = e^{-x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Решим однородное уравнение

$$y' + y = 0$$

Разделяем переменные

$$\frac{dy}{y} = -dx$$

Проинтегрировав, мы получаем

$$\ln|y| = -x + D$$

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = Ce^{-x}$$

Ищем решение неоднородного уравнения в виде $y = C(x)e^{-x}$. Подставляем

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = e^{-x}$$

$$C'(x)e^{-x} = e^{-x}$$

$$C'(x) = 1$$

$$C(x) = x + C_1$$

Общее решение неоднородного имеет вид:

$$y = (x + C_1)e^{-x}.$$

Подставим начальные условия $y(0) = 2$, получаем

$$2 = C_1$$

Ответ: $y = (x + 2)e^{-x}$.

12.2 Метод Бернулли (метод "uv") интегрирования линейного неоднородного дифференциального уравнения

(ЭКЗ. 21)

Ищем решение

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{30}$$

в виде $y = u(x)v(x)$. Тогда $y' = u'v + v'u$. Подставив в уравнение (30), получаем

$$u'v + v'u + p(x)uv - f = 0.$$

Перегруппируем слагаемые в левой части

$$v(x)(u'(x) + p(x)u(x)) + (v'(x)u(x) - f(x)) = 0.$$

Тогда, если u и v являются решениями системы

$$\begin{cases} u'(x) + p(x)u(x) = 0 \\ v'(x)u(x) - f(x) = 0, \end{cases}$$

то $y = u(x)v(x)$ является решением уравнения (30).

Для первого уравнения системы находим частное ненулевое решение:

$$u = e^{-\int p(x)dx}$$

Подставим его во второе уравнение, получаем

$$v'(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

Тогда

$$v(x) = \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx + C_1$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 1 порядка имеет вид:

$$y(x) = u(x)v(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1 \right)$$

Уравнения Бернулли тоже решаются методом Лагранжа или методом Бернулли. Можно решать уравнение Бернулли по-другому, сводя к линейному:

$$y' + p(x)y = f(x)y^\alpha.$$

Поделим обе части на y^α (если $\alpha > 0$, то $y \equiv 0$ — особое решение):

$$y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = f(x)$$

Сделаем замену: $z = y^{1-\alpha}$. Тогда $z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'$, а уравнение примет вид:

$$\frac{z'}{1 - \alpha} + p(x)z = f(x)$$

Это ЛОДУ 1 порядка.

13 ОДУ n-го порядка

Определение 18. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, норма x определяется формулой $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Определение 19. $U_\varepsilon(x^0)$ — ε -окрестность точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ — это множество $U_\varepsilon(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < \varepsilon\}$.

Определение 20. Функция f непрерывна в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$ при $x \in U_\delta(x^0)$.

Определение 21. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым, если для $\forall x \in M \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset M$.

Определение 22. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется связным, если для $\forall x, y \in M$ существует кривая с концами x и y , которая полностью лежит в M .

Определение 23. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется областью, если оно открыто и связно.

Рассмотрим ОДУ n -го порядка, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (31)$$

Задача Коши — задача найти решение уравнения (31), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (32)$$

Теорема 16. (ЭКЗ 22) Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ функция f и ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ непрерывны. Пусть $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$. Тогда у задачи Коши для уравнения (31) с начальными условиями (32) существует единственное решение.

Определение 24. (РК) Пусть D — область в \mathbb{R}^{n+1} . Общее решение ОДУ n -го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (33)$$

где $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, — это функция $(n+1)$ аргументов $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ такая, что

1. $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ — частное решение (33) для $\forall C_1, \dots, C_n$;
2. для $\forall (x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D \exists C_1, \dots, C_n$ такие, что $\varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ удовлетворяет начальным условиям:

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, \dots, C_n) = y_0 \\ \varphi'(x_0, C_1, \dots, C_n) = y'_0 \\ \dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \dots, C_n) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Общее решение, найденное в неявном виде

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$$

называется общим интегралом. Частное решение, найденное в неявном виде, называется частным интегралом.

14 Интегрирование дифференциальных уравнений n -го порядка, допускающих понижение порядка

(ЭКЗ. 22)

1. Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x).$$

Решается последовательным интегрированием:

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_{n-1}$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_{n-1}x + C_{n-2}$$

$$y = \int \int \dots \left(\int f(x) dx \right) \dots dx + C_0 + C_1x + \dots + C_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

2. Уравнение вида

$$F(x, y', y'') = 0$$

решается заменой $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$. После замены получаем ОДУ 1-го порядка

$$F(x, z, z') = 0.$$

Пусть его общее решение

$$z = \varphi(x, C_1).$$

Получаем ОДУ 1-го порядка

$$y' = \varphi(x, C_1).$$

Решая его, получаем общий интеграл:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0.$$

3. Уравнение вида

$$F(y, y', y'') = 0$$

решается заменой $y' = p(y)$. Тогда по теореме о производной сложной функции $y'' = p'(y)y' = p'p$. После замены получаем ОДУ 1-го порядка

$$F(y, p, pp') = 0.$$

Пусть его общее решение

$$p = \psi(y, C_1).$$

Получаем ОДУ 1-го порядка

$$y' = \psi(y, C_1).$$

Решая его, получаем общий интеграл:

$$\Psi(x, y, C_1, C_2) = 0.$$

ЛЕКЦИЯ 10

15 Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения n -ого порядка

Определение 25. (РК) *Линейное дифференциальное уравнение n -ого порядка — это уравнение вида:*

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y(x) = f(x), \quad (34)$$

где функции f, p_0, \dots, p_{n-1} непрерывны на интервале I . Если $f \equiv 0$, то уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ), иначе оно называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ).

Задача Коши — задача найти решение уравнения (34), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \quad (35)$$

где $x_0 \in I$.

Теорема 17. (теорема Коши) Задача Коши для уравнения (34) с начальными условиями (35) имеет единственное решение на всем I .

Определение 26. Пусть V_1 и V_2 — линейные пространства. Отображение $A: V_1 \rightarrow V_2$ называется линейным оператором, если $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in V_1$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$C(I)$ — пространство непрерывных функций на интервале I . $C^n(I)$ — пространство C^n -гладких функций, т.е. $f \in C^n(I)$, если $f^{(n)} \in C(I)$.

Определение 27. Отображение $L: C^n(I) \rightarrow C(I)$, определенное формулой:

$$L[y](x) = y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_0(x)y(x)$$

называется дифференциальным оператором порядка n .

Теорема 18. Оператор L является линейным.

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in C^n(I)$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} L[\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2](x) &= (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^{(n-1)}(x) + \dots + \\ &\quad + p_0(x)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)(x) = \\ &= \lambda_1 y_1^{(n)}(x) + \lambda_1 p_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + \lambda_1 p_0(x)y_1(x) + \\ &+ \lambda_2 y_2^{(n)}(x) + \lambda_2 p_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \lambda_2 p_0(x)y_2(x) = \lambda_1 L[y_1](x) + \lambda_2 L[y_2](x) \end{aligned} \quad (36)$$

□

ЛОДУ можно записать в виде:

$$L[y] = 0.$$

ЛНДУ можно записать в виде:

$$L[y] = f.$$

Теорема 19. (Св-ва частных решений ЛОДУ. ЭКЗ. 23, РК) Множество частных решений ЛОДУ $L[y] \equiv 0$ образует линейное пространство.

Доказательство. Пусть y_1 и y_2 — частные решения $L[y] = 0$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Тогда в силу линейности оператора L

$$L[\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2] = \lambda_1 L[y_1] + \lambda_2 L[y_2] = 0.$$

□

Теорема 20. (Теорема о суперпозиции частных решений. ЭКЗ. 33, РК) Пусть y_1 — частное решение $L[y] = f_1$ и y_2 — частное решение уравнения $L[y] = f_2$, то $(y_1 + y_2)$ — частное решение уравнения: $L[y] = f_1 + f_2$

Доказательство. В силу линейности оператора L :

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = f_1 + f_2.$$

□

Определение 28. (РК) Система непрерывных функций $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ называется линейно зависимой на интервале I , если \exists набор чисел $\{C_1, \dots, C_n\}$ таких, что

$$C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2 > 0$$

и $C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n \equiv 0$ на интервале I .

Определение 29. (РК) Система непрерывных функций $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ называется линейно независимой на интервале I , если она не является линейно зависимой.

Определение 30. Пусть y_1, y_2, \dots, y_n — $(n - 1)$ раз дифференцируемые функции на интервале I . Определитель Вронского (Вронскианом) называется функция на I , определенная формулой:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (37)$$

Теорема 21. (Теорема о вронскиане системы линейно зависимых функций. Экз. 24, РК) Если система функций $\{y_1, \dots, y_n\}$ является линейно зависимой на интервале I , то определитель Вронского $W(x) \equiv 0$ на интервале I .

Доказательство. Пусть существует такой набор чисел $\{C_1, \dots, C_n\}$, что

$$C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2 > 0$$

и

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n \equiv 0$$

на интервале I . Продифференцируем это тождество $(n - 1)$ раз. Получаем $C_1y_1' + C_2y_2' + \dots + C_ny_n' \equiv 0, \dots, C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \dots + C_ny_n^{(n-1)} \equiv 0$. А значит для $\forall x \in I$ мы получаем матричное равенство

$$C_1 \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \\ \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \\ \dots \\ y_2^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \dots + C_n \begin{pmatrix} y_n(x) \\ y_n'(x) \\ \dots \\ y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Столбцы $(y_1(x), \dots, y_1^{(n-1)}(x))^T, (y_2(x), \dots, y_2^{(n-1)}(x))^T, \dots, (y_n(x), \dots, y_n^{(n-1)}(x))^T$ являются линейно зависимыми для $\forall x \in I$. Тогда определитель Вронского тождественно равен 0 на I . \square

Если $\exists x_0 \in I: W(x_0) \neq 0$, то система функций линейно независимая.

Замечание 5. Пусть $y_1 = x^2$ и $y_2 = x|x|$. Система $\{y_1, y_2\}$ линейно независимая на \mathbb{R} , но ее определитель Вронского равен 0 на \mathbb{R} .

Теорема 22. (Теорема о вронскиане системы линейно независимых частных решений ЛОДУ n -го порядка. Экз. 25, РК) Пусть $\{y_1, \dots, y_n\}$ линейно независимая на интервале I система решений ЛОДУ n -го порядка $L[y] = 0$. Тогда Вронскиан этой системы не обращается в 0 всюду на I .

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть $\exists x_0 \in I$ такая, что $W(x_0) = 0$, т.е.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0. \quad (38)$$

Тогда столбцы этой матрицы линейно зависимы. Следовательно, существует набор чисел $\{C_1, \dots, C_n\}$, что

$$C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2 > 0$$

и

$$C_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ \dots \\ y_2^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \dots + C_n \begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \dots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Рассмотри функцию $\tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$. Функция \tilde{y} является решением ЛОДУ $L[y] = 0$ как линейная комбинация решений этого ЛОДУ. В силу (39) выполняется

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}(x_0) \\ \dots \\ \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нулевое решение ЛОДУ также удовлетворяет этим начальным условиям. Значит, по теореме Коши о существовании и единственности решения

$$\tilde{y} \equiv 0.$$

Т.е. на интервале I выполняется тождество:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \equiv 0.$$

Значит, система функций $\{y_1, \dots, y_n\}$ линейно зависима на интервале I . Мы получили противоречие. \square

Определение 31. (РК) Система из n линейно независимых решений ЛОДУ n -го порядка называется фундаментальной системой решений (ФСР) этого уравнения.

Теорема 23. (Теорема о существовании ФСР ЛОДУ n -го порядка. Экз. 26, РК) У ЛОДУ $L[y] = 0$ порядка n существует ФСР.

Доказательство. Выберем произвольную точку $x_0 \in I$. Пусть y_1, y_2, \dots, y_n — решения n задач Коши для уравнения $L[y] = 0$ с начальными условиями:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_1 \\ y_1'(x_0) = y_1' \\ \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = y_1^{(n-1)}, \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(x_0) = y_2 \\ y_2'(x_0) = y_2' \\ \dots \\ y_2^{(n-1)}(x_0) = y_2^{(n-1)}, \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} y_n(x_0) = y_n \\ y_n'(x_0) = y_n' \\ \dots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) = y_n^{(n-1)}. \end{cases}$$

Мы наложим на начальные условия дополнительное условие:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (40)$$

Система решений $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ЛОДУ линейно независима, т.к. вронсиан этой системы в точке x_0 не равен 0. \square

Теорема 24. (Теорема о структуре общего решения ЛОДУ. Экз. 27, РК) Общее решение ЛОДУ $L[y] = 0$ порядка n имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

где $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ образуют ФСР этого уравнения.

Доказательство. 1. Если $\{y_1, \dots, y_n\}$ — ФСР уравнения, то $L[y_k] = 0$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$. В силу линейности оператора L выполняется

$$L[C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n] = 0.$$

Тогда $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ — решение ЛОДУ $L[y] = 0$.

2. Пусть y — некоторое решение ЛОДУ. Покажем, что тогда $y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$. Выберем произвольную $x_0 \in I$. Рассмотрим следующую систему алгебраических уравнений (СЛАУ) на численные переменные (C_1, C_2, \dots, C_n) :

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y'(x_0) \\ \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) \end{cases} \quad (41)$$

Эта система имеет единственное решение, т.к. определитель матрицы ее коэффициентов — это определитель Вронского $W(x_0) \neq 0$. Пусть это решение $(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n)$. Пусть $\tilde{y} = \sum_{k=1}^n \tilde{C}_k y_k$. Тогда \tilde{y} — это решение задачи Коши для уравнения $L[y] = 0$ с начальными условиями $\tilde{y}(x_0) = y(x_0), \dots, \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0)$. По теореме о существовании и единственности решения y совпадает с \tilde{y} . Значит, $y = \sum_{k=1}^n \tilde{C}_k y_k$. □

Теорема 25. (Теорема о структуре общего решения ЛНДУ. Экз. 30, РК) Общее решение ЛНДУ n -го порядка

$$L[y] = f$$

имеет вид

$$y = y_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

где y_0 — частное решение $L[y] = f$, а $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ — ФСР ЛОДУ $L[y] = 0$.

Доказательство. $L[y] = f \Leftrightarrow L[y] = L[y_0] \Leftrightarrow L[y - y_0] = 0 \Leftrightarrow y_0 = y - y_0$ — это решение ЛОДУ $L[y] = 0 \Leftrightarrow y - y_0 = y_0 = \sum_{k=1}^n C_k y_k$ (по теореме о структуре общего решения ЛОДУ) $\Leftrightarrow y = y_0 + \sum_{k=1}^n C_k y_k$. □

16 Формула Лиувилля–Остроградского для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка

Теорема 26. (Формула Лиувилля–Остроградского. Экз. 28, РК) Пусть y_1 и y_2 — решения уравнения

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0.$$

Для определителя Вронского системы $\{y_1, y_2\}$ верна формула

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt},$$

где x_0 — произвольная точка интервала I .

Доказательство. Найдем выражение для производной определителя Вронского

$$W'(x) = \left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \right)' = (y_1 y_2' - y_2 y_1')' = (y_1' y_2' - y_2' y_1') + \\ + (y_1 y_2'' - y_2 y_1'') = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} \quad (42)$$

Т.к. y_1 и y_2 — решения ЛОДУ:

$$y_1'' + p_1(x)y_1' + p_0(x)y_1 = 0 \quad (43)$$

$$y_2'' + p_1(x)y_2' + p_0(x)y_2 = 0 \quad (44)$$

Домножим первое равенство (43) на y_2 и домножим второе равенство (44) на y_1 , а после этого вычтем из второго первое. Тогда мы получим

$$(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_0(x)y_2)y_1 - (y_1'' + p_1(x)y_1' + p_0(x)y_1)y_2 = (y_2''y_1 - y_1''y_2) + p_1(x)(y_2'y_1 - y_1'y_2) = 0.$$

Учитывая (42), мы получаем

$$W'(x) + W(x)p_1(x) = 0$$

Тогда Вронскиан W является решением уравнения

$$z' + p_1(x)z = 0, \quad (45)$$

удовлетворяющее начальному условию $z(x_0) = W(x_0)$.

У этого уравнения разделяются переменные:

$$\frac{dz}{z} = -p_1(x)dx$$

Интегрируя, мы получаем

$$\ln |z| = - \int p_1(x)dx + D.$$

Общее решение уравнения (45) имеет вид

$$z = C e^{- \int p_1(x)dx}.$$

Т.к. $z(x_0) = W(x_0)$, то

$$z(x) = W(x_0) e^{- \int_{x_0}^x p_1(t)dt}.$$

□

16.1 Формула для общего решения ЛОДУ 2-го порядка при одном известном частном решении

(Экз. 29)

Пусть y_1 — ненулевое частное решение уравнения

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

Дополним y_1 до ФСР, т.е. найдем такое решение уравнения y_2 , чтобы $\{y_1, y_2\}$ образовывали ФСР. Используя формулу Лиувилля-Остроградского, мы получаем

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{W(x)}{y_1^2} = \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} \quad (46)$$

Тогда

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx$$

а значит

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx$$

Общее решение ЛОДУ 2-го порядка имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx.$$

Пример 12. Найти общее решение уравнения

$$xy'' + y' - \frac{y}{x} = 0,$$

если известно, что $y_1 = \frac{1}{x}$ является его частным решением. Сначала поделим обе части уравнения на x , чтобы получилось уравнение, разрешенное относительно старшей производной:

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0.$$

Дополним y_1 до ФСР с помощью формулы:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx.$$

Т.к.

$$\int p_1(x) dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x,$$

выполняется

$$y_2 = \frac{1}{x} \int x^2 e^{-\ln x} dx = \frac{1}{x} \int x dx = \frac{x}{2}.$$

Можно взять $\{\frac{1}{x}, x\}$ — ФСР. Общее решение $y = C_1 \frac{1}{x} + C_2 x$.

ЛЕКЦИЯ 11

17 ЛОДУ с постоянными коэффициентами

Определение 32. (РК) ЛОДУ с постоянными коэффициентам имеет вид:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0, \quad (47)$$

где $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Его характеристическое уравнение — это алгебраическое уравнение степени n , которое имеет вид:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (48)$$

Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ — корень характеристического уравнения. Тогда $y = e^{\lambda_0 x}$ — частное решение ЛОДУ (47). Действительно, подставим $y = e^{\lambda_0 x}$ и ее производные $y'(x) = \lambda_0 e^{\lambda_0 x}, \dots, y^{(n)}(x) = \lambda_0^n e^{\lambda_0 x}$ в (47). Получаем

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_0y = e^{\lambda_0 x} \underbrace{(\lambda_0^n + a_{n-1}\lambda_0^{n-1} + \dots + a_0)}_{=0} = 0.$$

Комплексные числа Комплексное число имеет вид: $z = \alpha + \beta i$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$. Число $\bar{z} = \alpha - \beta i$ — сопряженное к z .

$$z = \alpha + \beta i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |z|$. Число $\alpha = \operatorname{Re} z$ — вещественная часть числа z , число $\beta = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть числа z . Если

$$z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

и

$$z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

то

$$z_1 z_2 = ((\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) + i(\beta_1 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_1)) = r_1 r_2 ((\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Пусть $z = \alpha + \beta i$

$$e^z = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta)$$

Пусть

$$y = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

Если $\alpha + \beta i$ — корень характеристического уравнения (48), то комплекснозначная функция $y = e^{(\alpha + \beta i)x}$ — решение ЛОДУ (47).

$$y' = (\alpha + \beta i)e^{(\alpha + \beta i)x}$$

...

$$y^{(n)} = (\alpha + \beta i)^n e^{(\alpha + \beta i)x}$$

Подставляем:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = e^{(\alpha + \beta i)x} \underbrace{((\alpha + \beta i)^n + a_{n-1}(\alpha + \beta i)^{n-1} + \dots + a_0)}_{=0} = 0$$

Пусть $y = u + iv$, где u и v — вещественные функции. Если y — комплекснозначное решение ЛОДУ (47), то u, v — вещественные решения ЛОДУ (47):

$$\begin{aligned} (u + iv)^{(n)} + a_{n-1}(u + iv)^{(n-1)} + \dots + a_0(u + iv) &= \\ &= \underbrace{(u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_0u)}_{=0} + i \underbrace{(v^{(n)} + a_{n-1}v^{(n-1)} + \dots + a_0v)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\alpha + \beta i$ — корень характеристического уравнения, то вещественные функции $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ — частные решения ЛОДУ (47).

Кратность корня алгебраического уравнения. Алгебраическое уравнение — уравнение вида:

$$P_n(x) = 0, \quad (49)$$

где $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Многочлен можно с точностью до порядка множителей единственным образом (с точностью до порядка множителей) представить в виде

$$P_n(x) = a_n(x - \lambda_1)^{k_1} \dots (x - \lambda_s)^{k_s},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — различные комплексные числа. Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — корни уравнения (49), а числа k_1, \dots, k_s — кратности этих корней соответственно. Пусть коэффициенты многочлена $P_n(x)$ вещественны. Тогда, если комплексное число $\lambda = \alpha + \beta i$ — корень кратности k , то его сопряженное число $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ — тоже корень кратности k . Корень кратности 1 называют также простым корнем.

Пример 13. Рассмотрим уравнение

$$x^2 + bx + c = 0, \quad b, c \in \mathbb{R}$$

1. Если $D = b^2 - 4c > 0$, то $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2}$ и $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2}$ — два вещественных корня кратности 1.
2. Если $D = b^2 - 4c = 0$, то $x_{1,2} = -\frac{b}{2}$ — вещественный корень кратности 2.
3. Если $D = b^2 - 4c < 0$, то $x_1 = \frac{-b - \sqrt{|D|i}}{2}$ и $x_2 = \frac{-b + \sqrt{|D|i}}{2}$ — два сопряженных комплексных корня кратности 1.

Рассмотрим ЛОДУ:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0.$$

Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

У ЛОДУ существует следующее ФСР, определяемое корнями характеристического уравнения:

1. Пусть λ_0 — вещественный корень характеристического уравнения кратности k . Тогда набор из k функций $y_1 = e^{\lambda_0 x}$, $y_2 = x e^{\lambda_0 x}$, \dots , $y_k = x^{k-1} e^{\lambda_0 x}$ входят в ФСР.
2. Пусть $\alpha \pm \beta i$ ($\beta > 0$) — пара сопряженных корней кратности k . Тогда набор из $2k$ функций: $y_{11} = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_{12} = x e^{\alpha x} \cos \beta x$, \dots , $y_{1k} = x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_{21} = e^{\alpha x} \sin \beta x$, $y_{22} = x e^{\alpha x} \sin \beta x$, \dots , $y_{2k} = x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$ входит в ФСР.

Выведем общее решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами 2-го порядка в случае простых корней характеристического уравнения (РК)

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ — корни характеристического уравнения, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Пусть $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Общее решение имеет вид:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Проверим это. Подставив y_1 в ЛОДУ, мы получаем верное тождество:

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = e^{\lambda_1 x} \lambda_1^2 + a_1 e^{\lambda_1 x} \lambda_1 + a_0 e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x} \underbrace{(\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_0)}_{=0} = 0.$$

Аналогично можно показать, что y_2 тоже решение ЛОДУ. Проверим, что $\{y_1, y_2\}$ — линейно независимые функции, а значит образуют ФСР. Составим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0.$$

Определитель Вронского не обращаются в ноль, а значит $\{y_1, y_2\}$ — линейно независимые решения ЛОДУ.

Выведем общее решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами 2-го порядка в случае кратного корня характеристического уравнения (ЭКЗ 31,РК)

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Пусть $D = a_1^2 - 4a_0 = 0$ и λ_0 — корень кратности 2. Пусть $y_1 = e^{\lambda_0 x}$ и $y_2 = x e^{\lambda_0 x}$. Общее решение ЛОДУ имеет вид:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Проверим это. Подставив y_1 в ЛОДУ, мы получаем верное тождество:

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = e^{\lambda_0 x} \lambda_0^2 + a_1 e^{\lambda_0 x} \lambda_0 + a_0 e^{\lambda_0 x} = e^{\lambda_0 x} \underbrace{(\lambda_0^2 + a_1 \lambda_0 + a_0)}_{=0} = 0.$$

Проверим, что $y_2 = x e^{\lambda_0 x}$ — решение ЛОДУ. Первая и вторая производная y_2 имеют вид соответственно

$$\begin{aligned} y_2' &= e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x}, \\ y_2'' &= 2\lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 x e^{\lambda_0 x}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для y_2 , y_2' и y_2'' в правую часть уравнения и учитывая, что по теореме Виета $a_1 = -2\lambda_0$ и $a_0 = \lambda_0^2$, мы получаем верное тождество:

$$\begin{aligned} y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 &= (2\lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 x e^{\lambda_0 x}) + a_1 (e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x}) + a_0 x e^{\lambda_0 x} = \\ &= (2\lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 x e^{\lambda_0 x}) - 2\lambda_0 (e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x}) + \lambda_0^2 x e^{\lambda_0 x} = 0. \end{aligned}$$

Тогда действительно y_2 — решение. Проверим, что $\{y_1, y_2\}$ — линейно независимые функции, а значит образуют ФСР. Составим определитель Вронского:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 x} & x e^{\lambda_0 x} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 x} & e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{2\lambda_0 x} - \lambda_0 x e^{2\lambda_0 x} = e^{2\lambda_0 x} \neq 0 \end{aligned}$$

Определитель Вронского не обращаются в ноль, а значит $\{y_1, y_2\}$ — линейно независимые решения ЛОДУ.

Выведем общее решение ЛОДУ в постоянными коэффициентами 2-го порядка в случае пары сопряженных комплексных корней характеристического уравнения (ЭКЗ 32, РК)

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Пусть $\alpha \pm \beta i$ – пара сопряженных комплексных корней характеристического уравнения. Тогда общее решение имеет вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Проверим это. Пусть $\tilde{y} = e^{(\alpha + \beta i)x} = y_1 + iy_2$ – комплекснозначная функция. Ее первая и вторая производная имеют вид соответственно:

$$\tilde{y}' = (\alpha + \beta i)e^{(\alpha + \beta i)x},$$

$$\tilde{y}'' = (\alpha + \beta i)^2 e^{(\alpha + \beta i)x}.$$

Подставляем:

$$\tilde{y}'' + a_1 \tilde{y}' + a_0 \tilde{y} = e^{(\alpha + \beta i)x} \underbrace{((\alpha + \beta i)^2 + a_1(\alpha + \beta i) + a_0)}_{=0} = 0$$

Получаем верное тождество. Если \tilde{y} – комплекснозначное решение ЛОДУ, то y_1, y_2 – вещественные решения ЛОДУ:

$$\begin{aligned} (y_1 + iy_2)'' + a_1(y_1 + iy_2)' + \dots + a_0(y_1 + iy_2) &= \\ &= \underbrace{(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1)}_{=0} + i \underbrace{(y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\alpha + \beta i$ – корень характеристического уравнения, то вещественные функции $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ – частные решения ЛОДУ.

Проверим, что $\{y_1, y_2\}$ – линейно независимые функции, а значит образуют ФСР. Найдем определитель Вронского для системы $\{y_1, y_2\}$

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} = \\ &= \alpha e^{2\alpha x} \sin \beta x \cos \beta x + \beta e^{2\alpha x} \cos^2 \beta x - \alpha e^{2\alpha x} \sin \beta x \cos \beta x + \beta e^{2\alpha x} \sin^2 \beta x = \beta e^{2\alpha x} \neq 0 \end{aligned}$$

Определитель Вронского не обращаются в ноль, а значит $\{y_1, y_2\}$ – линейно независимые решения ЛОДУ.

ЛЕКЦИЯ 12

18 Решение ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

(ЭКЗ 33)

Определение 33. *Квазимногочлен (квазиполином) — это сумма выражений вида*

$$e^{\alpha x}(P_l(x) \cos(\beta x) + Q_m(x) \sin(\beta x)),$$

где

$$P_l(x) = b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_0$$

— многочлен степени l ,

$$Q_m(x) = c_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_0$$

— многочлен степени m .

Рассмотрим ЛНДУ:

$$L[y] = f,$$

где

$$L[y](x) = y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 y(x),$$

а

$$f = e^{\alpha x}(P_l(x) \cos(\beta x) + Q_m(x) \sin(\beta x))$$

— квазимногочлен. Тогда частное решение ЛНДУ можно найти в виде квазимногочлена. Характеристическое уравнение ЛОДУ:

$$L[y](x) = y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 y(x) = 0$$

имеет вид:

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (50)$$

Рассмотрим случаи

1. Пусть $\beta = 0$, т.е. $f(x) = e^{\alpha x} P_l(x)$. Тогда пусть $k = l$.

(а) Если α не является корнем характеристического уравнения (50), то частное решение можно найти в виде

$$y_0(x) = e^{\alpha x} R_k(x),$$

где $R_k(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_0$ — некоторый многочлен степени k .

(б) Если α является корнем характеристического уравнения (50) кратности r , то частное решение можно найти в виде

$$y_0(x) = x^r e^{\alpha x} R_k(x),$$

где $R_k(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_0$ — некоторый многочлен степени k .

2. Пусть $\beta > 0$, т.е. $f(x) = e^{\alpha x}(P_l(x) \cos(\beta x) + Q_m(x) \sin(\beta x))$. Тогда пусть $k = \max\{m, l\}$.

- (a) Если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения (50),¹ то частное решение можно найти в виде

$$y_0(x) = e^{\alpha x} (R_k(x) \cos \beta x + S_k(x) \sin \beta x),$$

где $R_k(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_0$ и $S_k(x) = B_k x^k + B_{k-1} x^{k-1} + \dots + B_0$ — некоторые многочлены степени k .

- (b) Если $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения (50) кратности r ,² то частное решение можно найти в виде

$$y_0(x) = x^r e^{\alpha x} (R_k(x) \cos \beta x + S_k(x) \sin \beta x),$$

где $R_k(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_0$ и $S_k(x) = B_k x^k + B_{k-1} x^{k-1} + \dots + B_0$ — некоторые многочлены степени k .

ЛЕКЦИЯ 13

19 Метод Лагранжа для ЛНДУ 2-го порядка

(ЭКЗ 34, РК)

Пусть $\{y_1, y_2\}$ — ФСР ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0.$$

Тогда общее решение ЛНДУ

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$$

имеет вид:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ находятся из системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (51)$$

СЛАУ имеет единственное решение $\{C_1'(x), C_2'(x)\}$, т.к. определитель матрицы этой СЛАУ — это определитель Вронского $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$. Он не обращается в 0, т.к. $\{y_1, y_2\}$ — это ФСР.

Замечание 6. *Применив правила Крамера, мы получаем, что*

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}$$

и

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}.$$

¹Тогда $\alpha - \beta i$ — тоже не является корнем характеристического уравнения.

²Тогда $\alpha - \beta i$ — тоже корень характеристического уравнения кратности r .

Пусть $\varphi_1(x) = \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} dx$ и $\varphi_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} dx$ — первообразные. Тогда

$$C_1(x) = -\varphi_1(x) + D_1$$

и

$$C_2(x) = \varphi_2(x) + D_2.$$

Общее решение ЛНДУ имеет вид:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = \underbrace{-\varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2}_{\text{частное решение ЛНДУ}} + \underbrace{D_1y_1 + D_2y_2}_{\text{общее решение ЛОДУ}}.$$

Пусть $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, причем C_1 и C_2 удовлетворяют (51). Учитывая (51), мы получаем, что первая производная y имеет вид:

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \underbrace{C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)}_{=0} = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Учитывая (51), мы получаем, что вторая производная y имеет вид:

$$y''(x) = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \underbrace{C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x)}_{=f(x)} = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + f(x).$$

Подставляя y и ее производные в уравнение, мы получаем верное тождество:

$$\begin{aligned} y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) &= \\ &= (C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + f(x)) + p_1(x)(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)) + \\ &\quad + p_0(x)(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)) = \\ &= f(x) + C_1(x) \underbrace{(y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_0(x)y_1(x))}_{=0} + \\ &\quad + C_2(x) \underbrace{(y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_0(x)y_2(x))}_{=0} = f(x) \end{aligned}$$