Б. О. Волков
volkovbo@bmstu.ru
КК – -Канатников, Крищенко. Линейная алгебра
ЕД — Ефимов, Демидович
П — файл подготовки к РК

ЛАиФНП
Собственные векторы и собственные значения линейного оператора
Семинар 5

Определение 1. *(см. КК стр. 158) Пусть V — вещественное векторное пространство. Пусть A — линейный оператор в V.* **Ненулевой** *вектор $\vec{x} \in V$ называется собственным вектором оператора A, а число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется собственным значением (собственным числом) оператора A, если*

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{1}$$

Задача ЕД 4.129 Найти собственные вектора и числа оператора $A\vec{x} = [\vec{i}, \vec{x}]$ в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Решение. Если $\vec{x} = \mu\vec{i}$, то $A\vec{x} = [\vec{i}, \vec{x}] = \mu[\vec{i}, \vec{i}] = \vec{0}$. Т.е $\vec{x} = \mu\vec{i}$ ($\mu \neq 0$) является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda = 0$. Если же векторы $\vec{i}$ и $\vec{x}$ неколлинеарны, то $[\vec{i}, \vec{x}] \neq \vec{0}$. По определению векторного произведения $[\vec{i}, \vec{x}] \perp \vec{x}$. В этом случае не существует такого $\lambda \in \mathbb{R}$, чтобы $[\vec{i}, \vec{x}] = \lambda\vec{x}$.

Самостоятельно сделать: ЕД 4.129-4.132

Пусть V имеет конечную размерность. Пусть в V выбран базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. Пусть A обозначает матрицу оператора в этом базисе, а X — столбец координат вектора $\vec{x}$. Тогда равенство (1) можно переписать в матричном виде:

$$(A - \lambda E)X = 0. \tag{2}$$

Столбец X является ненулевым решением однородной СЛАУ (2). Ненулевые решения у такой однородной СЛАУ существуют тогда и только, когда матрица $A - \lambda E$ вырожденная, т.е., если

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{3}$$

Определение 2. *Характеристический многочлен $\chi_A(\lambda)$ оператора A определяется формулой*

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ называется характеристическим уравнением оператора A.

Собственные числа оператора A — это вещественные корни характеристического уравнения. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение на самом деле не зависят от выбора базиса в V. (Это свойство инвариантности характеристического уравнения линейного оператора).

Задача нахождения собственных чисел и собственных векторов оператора A делается по такому алгоритму:

1. Надо записать характеристическое уравнения A и найти его вещественные корни. Эти корни являются собственными числами оператора.

2. Для каждого собственного числа λ найти ненулевые решения СЛАУ (2). Эти решения являются собственными векторами оператора.

Задача П 6. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 12 & -22 \\ 11 & -21 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение оператора A:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 12-\lambda & -22 \\ 11 & -21-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 9\lambda - 10 = 0$$

Его корни $\lambda_1 = -10$ и $\lambda_2 = 1$. Это собственные числа оператора A.

1. Найдем собственные вектора, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = -10$. Составляем однородную СЛАУ:

$$(A - \lambda_1 E)X = \begin{pmatrix} 22 & -22 \\ 11 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E_1 = (1,1)^T$ — ФСР этого однородной СЛАУ. Значит, собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = -10$, имеют вид $X_1 = \mu_1(1,1)^T$, где $\mu_1 \neq 0$.

2. Найдем собственные вектора, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = -10$. Составляем однородную СЛАУ:

$$(A - \lambda_2 E)X = \begin{pmatrix} 11 & -22 \\ 11 & -22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E_2 = (2,1)^T$ — ФСР этого однородной СЛАУ. Значит, собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 1$, имеют вид $X_2 = \mu_2(2,1)^T$, где $\mu_2 \neq 0$.

Примеры решений см. КК стр.163, ЕД стр. 175. Самостоятельно сделать: ЕД 4.134-4.137

Теоретические вопросы из П

14. Сформулировать теорему о собственных векторах линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям.

Теорема 1. *Собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, образуют линейно независимую систему. (см. КК стр. 168)*

15. Дать определение самосопряжённого линейного оператора на евклидовом пространстве и сформулировать теорему о виде матрицы самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе.

Определение 3. *Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$.*

Определение 4. *Линейный оператор A в евклидовом пространстве V называется самосопряженным, если $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y})\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$.*

Теорема 2. *В ортонормированном базисе матрица самосопряженного оператора симметрична. Если оператор в ортонормированном базисе имеет симметричную матрицу, то он является самосопряженным (см. КК стр. 189)*

16. Сформулировать теорему о корнях характеристического уравнения самосопряжённого оператора.

Теорема 3. *Все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора действительны. (см. КК стр. 190)*

17. Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряжённого оператора, отвечающих различным собственным значениям.

Теорема 4. *Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. (см. КК стр. 192)*

18. Сформулировать теорему о существовании для самосопряжённого оператора ортонормированного базиса, в котором его матрица имеет простой вид.

Определение 5. *Квадратная матрица A называется диагональной, если все ее элементы вне главной диагонали равны 0.*

Теорема 5. *Если A — самосопряженный оператор, то существует ортонормированный базис из собственных векторов A. В этом базисе матрица A имеет диагональный вид. (см. КК стр. 193)*

Теорема 6. *Квадратная матрица A называется ортогональной, если $A^{-1} = A^T$.*

Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является ортогональной. Если A матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ Пусть $e' = \{\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \dots, \vec{e'_n}\}$ — ортонормированный базис из собственных векторов, соответствующих собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (эти числа совпадать). Тогда в базисе e' матрица оператора будет иметь вид $A' = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ (эти числа стоят на главной диагонали,а вне нее стоят 0). Выполняется

$$A = T_{e \to e'} \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} T_{e' \to e}$$

Т.к. матрицы перехода $T_{e \to e'}$ и $T_{e' \to e}$ являются ортогональными, мы получаем, что любую симметричную матрицу A можно представить в виде

$$A = UDU^T = UDU^{-1}, \tag{4}$$

где D — диагональная матрица, а U — ортогональная.

Самостоятельно сделать ЕД 4.174,4.183

Задача ЕД 4.191 Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

представить в виде (4).

Решение.

Составим характеристическое уравнение оператора A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda + 10 = 0$$

Корень $\lambda_1 = 1$ угадывается. Многочлен раскладывается на множители

$$-(\lambda - 1)^2(\lambda - 10) = 0.$$

Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 10$ – собственные числа. Значит, $D = diag\{1, 1, 10\}$.

1. Найдем собственные вектора, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Составляем однородную СЛАУ:

$$(A - \lambda_1 E)X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E_1 = (-2, 1, 0)^T$ и $E_2 = (2, 0, 1)^T$ образуют ФСР этого однородной СЛАУ. Это линейно независимая система из собственных векторов, соответствующих собственному числу $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Но вектора $E_1 = (-2, 1, 0)^T$ и $E_2 = (2, 0, 1)^T$ не образуют ортонормированную систему векторов. Применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Пусть

$$e'_1 = \frac{1}{|E_1|}E_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T$$

$$E'_2 = E_2 - (e'_1, E_2)e'_1 = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^T$$

$$e'_2 = \frac{1}{|E'_2|}E'_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2, 4, 5)^T.$$

Тогда e'_1 и e'_2 — нормированные ортогональные собственные вектора, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

2. Найдем собственные вектора, соответствующие собственному числу $\lambda_3 = 10$.

$$(A - \lambda_3 E)X = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ФСР имеет вид $E_3 = (1, 2, -2)^T$ (проверьте это!). Пусть $e'_3 = \frac{1}{|E_3|}E_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T$ — нормированный собственный вектор. Т.к. e'_3 и e'_1 собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, то $e'_3 \perp e'_1$. Аналогично, $e'_3 \perp e'_2$. Вектора $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ образуют ортонормированный базис из собственных векторов A. Матрица

$$U = T_{e \to e'} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

является ортогональной.

Appendix

Кратность корня алгебраического уравнения. Алгебраическое уравнение — уравнение вида:

$$P_n(x) = 0, \tag{5}$$

где $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Многочлен можно с точностью до порядка множителей единственным образом представить в виде

$$P_n(x) = a_n(x - \lambda_1)^{k_1} \ldots (x - \lambda_s)^{k_s},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — комплексные числа. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ – корни уравнения (5), а числа $k_1, \ldots, k_s$ — кратности этих корней соответственно. Пусть коэффициенты многочлена $P_n(x)$ вещественны. Тогда, если комплексное число $\lambda = \alpha + \beta i$ — корень кратности k, то его сопряженное число $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$ — тоже корень кратности k.

Пример 1. *Рассмотрим уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0, \; b, c \in \mathbb{R}$$

1. *Если $D = b^2 - 4c > 0$, то $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2}$ и $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2}$ — два вещественных корня кратности 1.*
2. *Если $D = b^2 - 4c = 0$, то $x_{1,2} = -\frac{b}{2}$ – вещественный корень кратности 2.*
3. *Если $D = b^2 - 4c < 0$, то $x_1 = \frac{-b-\sqrt{|D|}i}{2}$ и $x_2 = \frac{-b+\sqrt{|D|}i}{2}$ – два сопряженных комплексных корня кратности 1.*

В задаче 4.191 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ — корень характеристического уравнения кратности 2, а $\lambda_3 = 10$ — корень кратности 1.