

Б. О. Волков  
 volkovbo@bmstu.ru  
 КК — Канатников, Крищенко. Линейная алгебра  
 ЕД — Ефимов, Демидович  
 П — файл подготовки к РК

### ЛАиФНП

## Квадратичные формы, критерий Сильвестра. Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису Семинар 6

П 20. Дать определение квадратичной формы, матрицы и канонического вида квадратичной формы.

**Определение 1.** *Квадратичной формой называется многочлен от  $n$  переменных вида:*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{ij}x_ix_j. \quad (1)$$

Пусть  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ . Равенство (1) можно переписать в матричном виде

$$Q(x) = X^T A X = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где  $A = (a_{ij})$  — **симметричная** матрица, т. е.  $a_{ij} = a_{ji}$ . Матрица  $A$  — матрица квадратичной формы.

Мы можем считать, что  $X$  — это столбец координат вектора в векторном пространстве  $V$  в некотором базисе  $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ . Таким образом, можно считать, что квадратичная форма — это функция на  $V$ . Значение этой функции на векторе  $\vec{x} \in V$  не зависит от выбора координат в пространстве  $V$ , но матрица квадратичной формы меняется при замене базиса.

П 21. Записать формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

Пусть  $T_{e \rightarrow e'}$  — матрица перехода от базиса  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  к базису  $e' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ . Пусть  $A$  и  $A'$  — матрицы квадратичной формы  $Q$  в базисах  $e$  и  $e'$  соответственно. Пусть  $X$  — столбец координат вектора  $\vec{x}$  в базисе  $e$ , а  $X'$  — столбец координат вектора  $\vec{x}$  в базисе  $e'$ . Формула перехода координат:

$$X = T_{e \rightarrow e'} X'.$$

Т.к. для произведения матриц верна формула

$$(BC)^T = C^T B^T,$$

то

$$X^T = X'^T T_{e \rightarrow e'}^T.$$

Отсюда мы получаем, что

$$Q(x) = X^T A X = (X'^T T_{e \rightarrow e'}^T) A (T_{e \rightarrow e'} X') = X'^T (T_{e \rightarrow e'}^T A T_{e \rightarrow e'}) X' = X'^T A' X'.$$

Мы получили формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису:

$$A' = T_{e \rightarrow e'}^T A T_{e \rightarrow e'} \quad (2)$$

П 3. В базисе  $e_1, e_2$  пространства  $\mathbb{R}^2$  квадратичная форма  $Q$  записывается как  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2$ . Найти выражение  $Q(y_1, y_2)$  этой квадратичной формы в базисе  $e'_1 = -e_1 + e_2, e'_2 = 5e_1 - 6e_2$ .

Матрица квадратичной формы  $Q$  в базисе  $e = (e_1, e_2)$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матрица перехода от базиса  $e$  к базису  $e' = (e'_1, e'_2)$  имеет вид

$$T_{e \rightarrow e'} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (2) матрица квадратичной формы в базисе  $e = (e'_1, e'_2)$  имеет вид

$$A' = T_{e \rightarrow e'}^T A T_{e \rightarrow e'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -55 \\ -55 & 301 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Тогда  $Q(y_1, y_2) = 10y_1^2 - 110y_1y_2 + 301y_2^2$ .

## 1 Критерий Сильвестра

П 22. Дать определение положительно определённой, отрицательно определённой и неопределённой квадратичной формы.

**Определение 2.** Квадратичная форма  $Q$  на векторном пространстве  $V$  называется

1. положительно (отрицательно) определённой, если  $Q(x) > 0$  ( $Q(x) < 0$ ) для  $\forall x \in V \setminus \{0\}$ ;
2. неотрицательно (неположительно) определённой, если  $Q(x) \geq 0$  ( $Q(x) \leq 0$ ) для  $\forall x \in V$ ;
3. знакопеременной или неопределённой, если  $\exists x_1, x_2 \in V: Q(x_1) < 0$  и  $Q(x_2) > 0$ .

Положительная квадратичная форма является неотрицательной, отрицательная является неположительной. См. КК стр. 228

П 23. Сформулировать критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы и следствия для отрицательно определённых и неопределённых форм.

Пусть матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры — это миноры:

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Теорема 1.** 1. Квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (5)$$

2. Квадратичная форма является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда

$$(-1)\Delta_1 > 0, (-1)^2\Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n\Delta_n > 0. \quad (6)$$

(см. КК стр. 230)

Если первые  $k$  угловых миноров не равняются нулю, но при этом нарушается порядок знаков (5) и порядок знаков (6), то квадратичная форма знакопеременная. Если у квадратичной формы есть нулевой угловой минор, то она может быть знакопеременной, неотрицательно определенной или неположительно определенной.

Напомним, определитель матрицы можно считать с помощью разложения по  $i$ -ой строке:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij};$$

или по  $j$ -ому столбцу:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}.$$

Здесь  $A_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ .

П 6. С помощью критерия Сильвестра определить, является ли квадратичная форма  $-2x_1^2 + 2x_1x_4 - 3x_2^2 + 2x_2x_3 - 3x_3^2 - 2x_4^2$  положительно определённой, отрицательно определённой, неопределённой.

**Решение.** Запишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем угловые миноры:

$$\Delta_1 = -2 < 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -16 < 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -8 + 32 = 24 > 0.$$

Значит, квадратичная форма отрицательно определена.

Самостоятельно сделать ЕД 4.218-4.233 (неч.)

## 2 Каноническая форма

**Определение 3.** *Квадратичная форма канонического вида — квадратичная форма, имеющая вид:*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i^2$$

Если все  $\alpha_{ii} \in \{-1, 0, 1\}$ , то канонический вид называется нормальным.

Для всякой квадратичной формы существует базис, в котором она имеет канонический вид.

Если квадратичная форма приведена к каноническому виду, то легко исследовать ее на определенность

1. если все  $\alpha_{ii} > 0$  (все  $\alpha_{ii} < 0$ ), то квадратичная форма положительная (отрицательная);
2. если все  $\alpha_{ii} \geq 0$  (все  $\alpha_{ii} \leq 0$ ), то квадратичная форма неотрицательная (неположительная);
3. если  $\exists \alpha_{ii} < 0$  и  $\exists \alpha_{jj} > 0$ , то квадратичная форма неопределенная.

П 24. Сформулировать закон инерции квадратичных форм.

**Теорема 2.** *Количество положительных и отрицательных коэффициентов у квадратичной формы канонического вида не зависит от выбора базиса.*

(см. КК стр. 226)

**Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа и ортогональным преобразованием. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду**  
Семинар 7

## 3 Метод Лагранжа

С помощью выделения полных квадратов можно квадратичную форму привести к нормальному виду. Подробное описание алгоритма см. ЕД стр. 187 и см. КК стр. 217.

П 8. Привести квадратичную форму  $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 9x_2x_3$  к сумме квадратов методом Лагранжа. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределённой.

**Решение.**

1. Есть слагаемое с  $x_1^2$ . Соберем все слагаемые с  $x_1$  и дополним их до полного квадрата:

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 9x_2x_3 = \\ &= (4x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3) + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 9x_2x_3 = \\ &= ((2x_1)^2 + 2(2x_1)(2x_2 + 2x_3)) + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 9x_2x_3 = \\ &= ((2x_1)^2 + 2(2x_1)(2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2) - (2x_2 + 2x_3)^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 9x_2x_3 = \\ &= (2x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 + x_2x_3. \quad (7) \end{aligned}$$

Делаем замену

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3, \\ x'_2 = x_2, \\ x'_3 = x_3. \end{cases} \quad (8)$$

Тогда  $Q(x_1, x_2, x_3) = (x'_1)^2 + x'_2 x'_3 = Q(x'_1, x'_2, x'_3)$ .

2. Нет слагаемых с  $(x'_2)^2$  или  $(x'_3)^2$ . В этом случае делаем замену

$$\begin{cases} x''_1 = x'_1, \\ x'_2 = x''_2 + x''_3, \\ x'_3 = x''_2 - x''_3. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда

$$\begin{aligned} Q(x'_1, x'_2, x'_3) &= (x''_1)^2 + (x''_2 + x''_3)(x''_2 - x''_3) = \\ &= (x''_1)^2 + (x''_2)^2 - (x''_3)^2 = Q(x''_1, x''_2, x''_3). \end{aligned}$$

Т.к. в каноническом виде есть коэффициенты разных знаков, квадратичная форма знакопеременная.

Ответ:  $Q(x''_1, x''_2, x''_3) = (x''_1)^2 + (x''_2)^2 - (x''_3)^2$ , знакопеременная квадратичная форма. Самостоятельно сделать ЕД 4.210-4.212

## 4 Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием

Пусть  $Q$  квадратичная форма на  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $A$  — матрица этой квадратичной формы в **ортонормированном базисе**  $e$ . Т.к.  $A$  — симметричная матрица, то в базисе  $e$  она задает самосопряженный оператор. Будем обозначать этот оператор тем же символом  $A$ . Самосопряженный оператор  $A$  и квадратичная форма  $Q$  связаны формулой:

$$Q(x) = (Ax, x),$$

которая не зависит от выбора базиса.

Пусть  $e' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^n$  из собственных векторов самосопряженного оператора  $A$ , соответствующих собственным числам  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Тогда в базисе  $e'$  матрица оператора будет иметь диагональный вид  $A' = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Выполняется

$$\text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = T_{e' \rightarrow e} A T_{e \rightarrow e'}$$

Матрица  $T_{e \rightarrow e'}$  является ортогональной как матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису. Значит,  $T_{e' \rightarrow e} = T_{e \rightarrow e'}^T$ . Получаем, что

$$\text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = T_{e \rightarrow e'}^T A T_{e \rightarrow e'}$$

является также матрицей квадратичной формы  $Q$  в базисе  $e'$ . Таким образом, в базисе  $e'$  квадратичная форма имеет канонический вид:

$$Q(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

П 7. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму  $9x^2 + 24xy + 16y^2$  к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределённой.

**Решение.** Запишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа и векторы. Составим характеристическое уравнение оператора  $A$ :

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 9 - \lambda & 12 \\ 12 & 16 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda = 0.$$

Его корни  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = 25$ . Это собственные числа оператора  $A$ .

1. Найдем нормированный собственный вектор, соответствующий собственному числу  $\lambda_1 = 0$ . Составляем однородную СЛАУ:

$$(A - \lambda_1 E)X = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$E_1 = (-4, 3)^T$  — ФСР этого однородную СЛАУ. Нормируем этот вектор  $e'_1 = \frac{1}{5}(-4, 3)^T$ .

2. Найдем нормированный собственный вектор, соответствующий собственному числу  $\lambda_2 = 25$ . Составляем однородную СЛАУ:

$$(A - \lambda_2 E)X = \begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$E_2 = (3, 4)^T$  — ФСР этой однородной СЛАУ. Нормируем этот вектор  $e'_2 = \frac{1}{5}(3, 4)^T$ .

Матрица перехода от  $(e_1, e_2)$  к  $(e'_1, e'_2)$  имеет вид

$$T_{e \rightarrow e'} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Старые координаты  $(x, y)$  выражаются, через новые  $(x', y')$  по формуле

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(-4x' + 3y'), \\ y = \frac{1}{5}(3x' + 4y'). \end{cases} \quad (10)$$

При этом в базисе  $\{e'_1, e'_2\}$  (в координатах  $(x', y')$ ) квадратичная форма  $Q$  имеет вид:

$$Q(x', y') = 25y'^2. \quad (11)$$

Такая квадратичная форма не является ни положительно определённой, ни отрицательно определённой, ни неопределённой. Это неотрицательно определенная квадратичная форма. Ответ: канонический вид: (11), преобразование координат: (10), неотрицательно определенная форма.

Самостоятельно сделать ЕД 4.213-4.216

## 5 Приведение кривых и поверхностей к каноническому виду

(см. КК §9)

Общее уравнение алгебраической кривой второго порядка на плоскости

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0.$$

С помощью поворота (ортогонального преобразования) и параллельного переноса всегда можно получить каноническое уравнение кривой.

ЕД 4.227 Привести кривую

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0 \quad (12)$$

к каноническому виду.

Указать соответствующее преобразование координат. Построить кривую в исходной системе координат.

**Решение.** Сначала приведем квадратичную форму  $x^2 - 2xy + y^2$  методом ортогональных преобразований к каноническому виду. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)\lambda = 0.$$

Корни  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = 2$  (расположим в порядке возрастания).

1. Найдем нормированный собственный вектор, соответствующий собственному числу  $\lambda_1 = 0$ . Составляем однородную СЛАУ:

$$(A - \lambda_1 E)X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нормированный собственный вектор  $e'_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ .

2. Найдем нормированный собственный вектор, соответствующий собственному числу  $\lambda_2 = 2$ . Составляем однородную СЛАУ:

$$(A - \lambda_2 E)X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нормированный собственный вектор  $e'_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ .

Матрица перехода от базиса  $(e_1, e_2)$  к базису  $(e'_1, e'_2)$  имеет вид

$$T_{e \rightarrow e'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Старые координаты  $(x, y)$  выражаются через новые  $(x', y')$  по формуле

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y', \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{cases} \quad (13)$$

Подставляем (13) в уравнение кривой (12) и выделяем полный квадрат. Получаем:

$$\begin{aligned}
 2y'^2 - 10\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) - 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 25 &= \\
 &= 2y'^2 + 2\sqrt{2}y' - 8\sqrt{2}x' + 25 = \\
 &= 2y'^2 + 2\sqrt{2}y' + 1 - 8\sqrt{2}\left(x' + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = \\
 &= 2\left(y' + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 8\sqrt{2}\left(x' - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = 0. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Преобразуем

$$\left(y' + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right).$$

Сделаем параллельный перенос

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{3}{2}\sqrt{2}, \\ y'' = y' + \frac{1}{2}\sqrt{2}. \end{cases} \quad (15)$$

Получаем каноническое уравнение параболы:

$$y''^2 = 4\sqrt{2}x''. \quad (16)$$

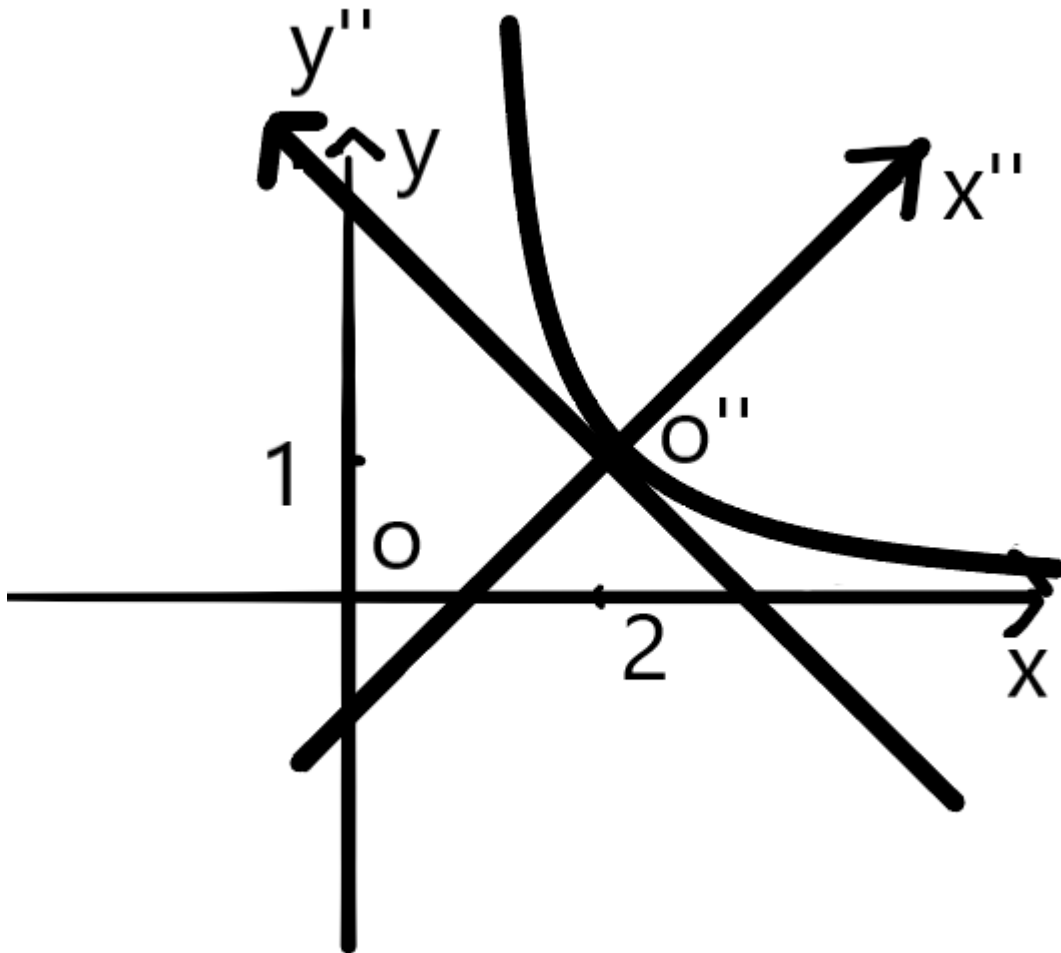
Координаты  $(x', y')$  выражаются через координаты  $(x'', y'')$ :

$$\begin{cases} x' = x'' + \frac{3}{2}\sqrt{2}, \\ y' = y'' - \frac{1}{2}\sqrt{2}. \end{cases} \quad (17)$$

Подставив (17) в (13), мы получаем преобразование координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + 2, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + 1. \end{cases} \quad (18)$$

Центр канонической системы координат  $O''X''Y''$  имеет координаты  $(2, 1)$  в исходной системе координат  $OXY$ . Ось  $O''X''$  направлена вдоль вектора  $e'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ . Ось  $O''Y''$  направлена вдоль вектора  $e'_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ .



Ответ: парабола, каноническое уравнение: (16), преобразование координат: (18).  
 ЕД 4.233 Привести поверхность

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0 \quad (19)$$

к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат. Построить кривую в исходной системе координат.

**Решение.**

Сначала приведем квадратичную форму  $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz$  методом ортогональных преобразований к каноническому виду. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0.$$

Корень  $\lambda_1 = 3$  угадывается. Другие корни  $\lambda_2 = 6$  и  $\lambda_3 = 9$ . (Расположим в порядке возрастания).

1. Найдем нормированный собственный вектор, соответствующий собственному числу  $\lambda_1 = 3$ . Составляем однородное СЛАУ:

$$(A - \lambda_1 E)X = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нормированный собственный вектор  $e_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ .

2. Найдем нормированный собственный вектор, соответствующий собственному числу  $\lambda_2 = 6$ . Составляем однородную СЛАУ:

$$(A - \lambda_2 E)X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нормированный собственный вектор  $e_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ .

3. Найдем нормированный собственный вектор, соответствующий собственному числу  $\lambda_3 = 9$ . Составляем однородную СЛАУ:

$$(A - \lambda_3 E)X = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нормированный собственный вектор  $e_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ .

Матрица перехода от базиса  $(e_1, e_2, e_3)$  к базису  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  имеет вид

$$T_{e \rightarrow e'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Старые координаты  $(x, y, z)$  выражаются, через новые  $(x', y', z')$  по формуле

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z', \\ y = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z', \\ z = \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z'. \end{cases} \quad (20)$$

Подставляем (20) в уравнение поверхности (19) и выделяем полные квадраты. Получаем:

$$\begin{aligned} 3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 - 6\left(\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z'\right) - 24\left(\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z'\right) + 18\left(\frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z'\right) + 30 &= \\ = 3x'^2 - 6x' + 6y'^2 - 24y' + 9z'^2 + 18z' + 30 &= \\ = 3(x' - 1)^2 + 6(y' - 2)^2 + 9(z' + 1)^2 - 6 &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Преобразуем

$$\frac{(x' - 1)^2}{2} + \frac{(y' - 2)^2}{1} + \frac{(z' + 1)^2}{2/3} = 1.$$

Сделаем параллельный перенос

$$\begin{cases} x'' = x' - 1, \\ y'' = y' - 2, \\ z'' = z' + 1. \end{cases} \quad (22)$$

Получаем каноническое уравнение эллипсоида:

$$\frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{1} + \frac{z''^2}{2/3} = 1. \quad (23)$$

Координаты  $(x', y', z')$  выражаются через координаты  $(x'', y'', z'')$ :

$$\begin{cases} x' = x'' + 1, \\ y' = y'' + 2, \\ z' = z'' - 1. \end{cases} \quad (24)$$

Подставив (24) в (20), мы получаем преобразование координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x'' + \frac{2}{3}y'' + \frac{2}{3}z'' + 1, \\ y = \frac{2}{3}x'' + \frac{1}{3}y'' - \frac{2}{3}z'' + 2, \\ z = \frac{2}{3}x'' - \frac{2}{3}y'' + \frac{1}{3}z'' - 1. \end{cases} \quad (25)$$

Ответ: эллипсоид, каноническое уравнение: (23), преобразование координат: (25).