Лекция № 10.

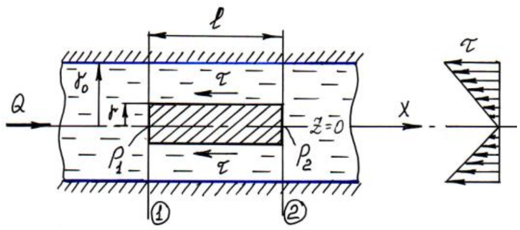
Равномерное ламинарное движение жидкости.

Ламинарное движение является упорядоченным слоистым течением без перемешивания частиц жидкости в потоке.

Так как движение имеет слоистый характер, то между слоями, которые движутся относительно друг друга, возникают силы внутреннего (вязкостного) трения и касательные напряжения.

Движение жидкости подчиняется закону трения Ньютона.

а) Течение в трубопроводе круглого сечения.



Выделим в трубопроводе объём жидкости (между сечениями (1) и (2)) в виде цилиндра длиной l и радиусом r.
где p_1 – давление в сечении (1);
p_2 – давление в сечении (2).

Условия течения:
- движение равномерное, удалённое от входа в трубу ($r_0 = const$);
- движение напорное (т.е. всё сечение заполнено жидкостью), силы тяжести не влияют на характеристику движения, поэтому безразлично как ориентирована ось - вертикально или горизонтально).

Постановка задачи:
1. Определить закон изменения касательных напряжений **τ;**
2. Получить закон изменения скорости в сечении.

Рассмотрим условие динамического равновесия выделенного объёма жидкости, спроектировав все силы на ось **x:**

$$P_1 - P_2 - T = 0,$$

где P_1 – сила давления на левый торец;
P_2 – сила давления на правый торец;
T – сила внутреннего трения.

Подставив значения, получаем:

$$p_1 \cdot \pi r^2 - p_2 \cdot \pi r^2 - \tau \cdot 2\pi r \cdot l = 0,$$

где $\boldsymbol{\tau = \tau\ (r)}$ – касательное напряжение в поперечном сечении трубы (изменяется по линейному закону в функции радиуса).

$$(p_1 - p_2) \cdot \pi r^2 = \tau \cdot 2\pi r \cdot l \quad \text{или} \quad \tau = (p_1 - p_2) \cdot \frac{r}{2l}$$

Далее запишем уравнение Бернулли для сечений (1) и (2):

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{\upsilon_2^2}{2g} + h_n.$$

Ввиду постоянства диаметра трубы, скорость жидкости будет постоянной, а коэффициент α будет неизменным вдоль потока.

Тогда, после сокращения получаем:

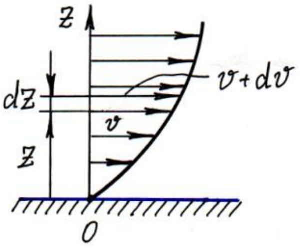
$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = h_n; \qquad p_1 - p_2 = \rho g h_n.$$

Подставив эту разность в уравнение для $\boldsymbol{\tau}$, получим: $\tau = \rho g h_n \cdot \dfrac{r}{2l}$

Введём понятие гидравлический уклон (это потери на единицу длины), который равен - $i = \dfrac{h_n}{l}$.

Тогда получаем значение для τ: $$\tau = \rho g i \cdot \frac{r}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

Появление касательных напряжений обусловлено вязкостью жидкости.



Найдём скорость $\boldsymbol{\upsilon = \upsilon\ (r)}$.

Согласно закону жидкостного трения Ньютона касательное напряжение в жидкости $(\boldsymbol{\tau})$ прямо пропорционально так называемому поперечному градиенту скорости $\left(\dfrac{d\upsilon}{dz}\right)$:

$\tau = \mu \dfrac{d\upsilon}{dz}$, где $\dfrac{d\upsilon}{dz}$ - градиент скорости (изменение её на единицу толщины слоя);

$\boldsymbol{\mu}$ - динамическая вязкость.

Заменив переменную $\boldsymbol{dz}$ текущим радиусом $\boldsymbol{dr}$, получим: $$\tau = -\mu \frac{d\upsilon}{dr}. \qquad \textbf{(2)}$$

Знак минус обусловлен тем, что направление отсчёта $\boldsymbol{dz}$ (от стенки к оси) противоположно направлению отсчёта $\boldsymbol{dr}$ (от оси к стенке), т.е. $\boldsymbol{dz = -dr}$.

Приравняв уравнения ***(1) и (2),*** получаем:

$$-\mu \frac{d\upsilon}{dr} = \rho g i \cdot \frac{r}{2} \qquad \text{или} \qquad \frac{d\upsilon}{dr} = -\frac{\rho g i}{\mu} \cdot \frac{r}{2}.$$

Интегрируя данное уравнение, получаем: $$\upsilon = C - \frac{\rho g i}{\mu} \cdot \frac{r^2}{4}, \qquad \textbf{(3)}$$

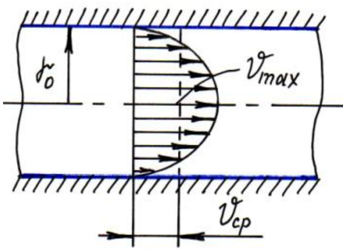
где C – постоянная интегрирования, которая м.б. получена из следующих начальных условий – при $\boldsymbol{r = r_0 \Rightarrow \upsilon = 0}$.

Тогда имеем: $C - \dfrac{\rho g i}{\mu} \cdot \dfrac{r_0^2}{4} = 0$ или $C = \dfrac{\rho g i}{\mu} \cdot \dfrac{r_0^2}{4}$.

Подставляя выражение для C в формулу (3), получаем:

$\upsilon = \dfrac{\rho g i}{4\mu}(r_0^2 - r^2)$ - **Закон распределения скорости по нормальному сечению трубопровода.**

Из этого уравнения можем получить значение максимальной скорости υ_{max}.



При $r = 0$, имеем: $\upsilon_{\max} = \dfrac{\rho g i}{4\mu} r_0^2$.

Так как, $\upsilon_{cp} = \dfrac{Q}{F} = \dfrac{\int_F \upsilon dF}{F}$, где $F = \pi r_0^2$. Тогда получаем:

$$\upsilon_{cp} = \frac{\int_0^{r_0} \frac{\rho g i}{4\mu}(r_0^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr}{\pi r_0^2} = \frac{\rho g i \cdot \pi}{2\mu \cdot \pi r_0^2} \cdot \left| r_0^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right|_0^{r_0} = \frac{\rho g i}{8\mu} \cdot r_0^2.$$

Отсюда видно, что <u>средняя скорость в трубе при ламинарном движении в 2 раза меньше максимальной скорости, т.е.:</u>

$$\upsilon_{cp} = \frac{\upsilon_{\max}}{2}.$$

<u>Коэффициент кинетической энергии (α) равен:</u>

$\alpha = \frac{1}{F}\int\limits_F \left(\frac{\upsilon}{\upsilon_{cp}}\right)^3 dF$ - величина безразмерная; зависит от неравномерности распределения скорости по сечению. <u>Для ламинарного режима – α = 2.</u>

Неравномерность распределения скорости по сечению приводит к увеличению кинетической энергии.

<u>Гидравлические потери при ламинарном режиме:</u>

Так как $i = \frac{h_n}{l}$ => $h_n = i \cdot l$.

Мы знаем, что $\upsilon_{cp} = \frac{\rho g i}{8\mu} \cdot r_0^2$, $\mu = \nu \cdot \rho$, $r_0^2 = (\frac{d}{2})^2$, то выразив из этих формул ***i*** и подставив в выражение для ***h_n***, получим <u>формулу Пуазейля (**закон сопротивления при ламинарном течении в трубе круглого сечения)**:</u>

$$h_n = \frac{32 \cdot l \upsilon_{cp} \nu}{g d^2}.$$

(Пуазейль – это французский врач, который получил эту формулу экспериментальным путём в 1840 году. Он исследовал движение воды в капиллярных трубках применительно к движению крови в кровеносной системе).

Из формулы Пуазейля следует, что при ламинарном режиме движения жидкости потери напора прямо пропорциональны скорости в первой степени.

Если мы умножим числитель и знаменатель на $2\upsilon_{cp}$, то получим:

$$h_n = \frac{32 \cdot l \upsilon_{cp} \nu}{g d^2} \cdot \frac{2\upsilon_{cp}}{2\upsilon_{cp}} = \frac{64}{\frac{\upsilon_{cp} d}{\nu}} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\upsilon_{cp}^2}{2g}.$$

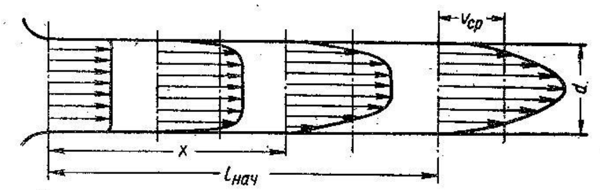
Сравнивая полученное выражение с формулой Вейсбаха-Дарси, нетрудно увидеть, что при ламинарном режиме движения жидкости в круглой трубе коэффициент потерь на трение (или коэффициент Дарси) λ равен:

$$\lambda = \frac{64}{\frac{\upsilon_{cp} d}{\nu}} = \frac{64}{\mathrm{Re}}.$$

Из уравнения неразрывности мы знаем, что: $\upsilon_{cp} = \frac{Q}{F} = \frac{4Q}{\pi d^2}$, то подставив это значение в формулу Пуазейля, получаем:

$$h_n = \frac{128 \cdot l Q \nu}{\pi g d^4}$$ – ***<u>вторая форма записи формулы Пуазейля.</u>***

Если жидкость из резервуара поступает в трубу (***d = const***) и движение ламинарное, вход в трубу выполнен закруглённым, то <u>распределение скоростей по сечению трубы вблизи входа получается практически равномерным:</u>



Но затем, <u>под действием сил вязкости</u> происходит перераспределение скоростей по сечениям (слои жидкости, прилежащие к стенке, <u>тормозятся,</u> а центральная часть потока (ядро) <u>движется ускоренно</u>). Толщина слоёв заторможенной жидкости постепенно увеличивается, пока не станет равной радиусу трубы.

После этого устанавливается характерный для ламинарного течения **<u>параболический профиль скоростей.</u>**

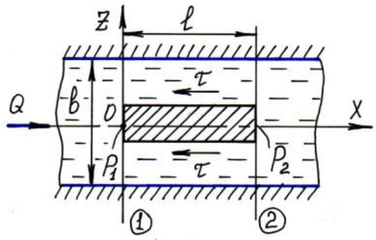
Участок начала трубы, на котором стабилизируется параболический профиль скоростей, называется <u>*начальным участком течения* ($l_{нач}$)</u>. За пределами этого участка имеем <u>стабилизированное ламинарное</u> течение. (<u>*Изложенная выше теория ламинарного течения справедлива именно для этого стабилизированного ламинарного течения и неприменима в пределах начального участка*</u>).

Для определения длины $l_{нач}$ можно пользоваться <u>приближённой формулой Шиллера</u>, выражающей эту длину, отнесённую к диаметру трубы, как функцию числа Re:

$$\frac{l_{нач}}{d} = 0{,}029 \cdot \mathrm{Re} \quad \text{или} \quad l_{нач} = 0{,}029 \cdot \mathrm{Re} \cdot d\,.$$

б) <u>Ламинарный поток в плоском зазоре.</u>

Рассмотрим ламинарное течение в зазоре, образованном двумя параллельными плоскими стенками, расстояние между которыми равно ***b.*** Начало координат (точка О) поместим в середине зазора, направив ось Ох вдоль течения, а ось Oz – по нормали к стенкам.



Возьмём два нормальных поперёчных сечения потока (1) и (2) на расстоянии ***l*** одно от другого.

<u>Постановка задачи таже, что и первом случае:</u>

1. Определить закон изменения касательных напряжений **τ;**
2. Получить закон изменения скорости в сечении.

<u>Выделим объём жидкости в форме прямоугольного параллелепипеда, расположенного симметрично относительно оси *Ох* между выбранными поперёчными сечениями потока и имеющего размеры сторон – ***l*** х ***2z*** х ***1*** ,т.е.:</u>

- вдоль оси **О*y*:** $y = 1$ единице ширины;
- вдоль оси **Oz** - **2z;**
- вдоль оси **Ox** - ***l.***

Тогда, проецируя силы на ось Ох, получим:

$$(p_1 - p_2) \cdot 2z - 2\tau \cdot l = 0\,. \qquad \textbf{(4)}$$

Из предыдущего раздела мы знаем, что:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = h_n\,; \quad \tau = -\mu \frac{d\upsilon}{dz}\,; \quad h_n = i \cdot l\,.$$

<u>Знак минус в выражении для ***τ*** обусловлен тем, что производная</u> $\frac{d\upsilon}{dz}$ отрицательна.

Подставив эти значения в формулу (4) и, проведя сокращения, получим выражение:

$$\frac{d\upsilon}{dz} = -\frac{\rho g i}{\mu} \cdot z$$

Проинтегрировав данное выражение и с учётом начальных условий (если $\boldsymbol{z = \pm \frac{b}{2}}$ => $\boldsymbol{\upsilon = 0}$, <u>определив постоянную интегрирования</u>), получаем, что:

$$\upsilon = \frac{\rho g i}{8\mu} \cdot (b^2 - 4z^2)\,. \qquad \textbf{(5)}$$

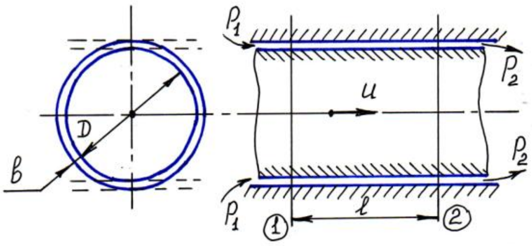
При ***z = 0*** имеем: $\upsilon_{\max} = \frac{\rho g i}{8\mu} \cdot b^2\,.$

Средняя скорость по сечению определяется как: $\upsilon_{cp} = \frac{2}{3}\upsilon_{\max}$ или $\upsilon_{cp} = \frac{\rho g i}{12\mu} \cdot b^2$.

Гидравлические потери в данном случае определяются по формуле:

$$h_n = \frac{12 l \upsilon_{cp} \nu}{g b^2}.$$

в) <u>Ламинарный поток в кольцевом зазоре.</u>



<u>В данном случае зазор образован двумя цилиндрическими поверхностями (например, поршнем и цилиндром), при условии, что зазор между ними мал по сравнению с диаметрами поверхностей, и поверхности расположены соосно, т.е.</u> **b<< D;** Здесь ***u*** – скорость внутреннего цилиндра.

<u>Рассмотрим несколько случаев течения:</u>

<u>1) осевое напорное движение.</u>

$$\Delta p = p_1 - p_2, \quad u = 0.$$

Для таких задач важен *<u>вопрос о расходе утечек</u>*, так как он связан с КПД насоса.

Имеем: $\upsilon_{cp} = \frac{\rho g i}{12\mu} b^2$ $\quad i = \frac{h_n}{l} = \frac{\Delta p}{\rho g l}$,

Тогда $\upsilon_{cp} = \frac{\Delta p b^2}{12\mu l}$.

Учитывая это выражение, получаем:

$$Q = \upsilon_{cp} F = \frac{\Delta p b^2}{12\mu l}\pi D b = \frac{\pi D b^3}{12\mu l}\Delta p.$$

<u>2) осевое фрикционное безнапорное движение.</u>

$$\Delta p = 0, \quad u > 0.$$

<u>***Фрикционным безнапорным движением*** *называется такое движение, когда давление в зазоре постоянно вдоль длины, а одна из стенок, образующих зазор, перемещается в направлении, параллельном другой стенке и увлекает за собой жидкость.*</u>

В этом случае расход определяется по формуле:

$$Q = \frac{u}{2}\pi D b.$$

<u>Полученные в подпунктах 1) и 2) формулы определения расхода, применимы только для строго концентричного (соосного) расположения поверхностей.</u>