Г И Д Р О С Т А Т И К А

Гидростатическое давление.

Гидростатикой называется раздел гидравлики, который изучает законы и условия равновесия жидкости.

В гидростатике жидкость рассматривается в состоянии *относительного покоя.*

Под *относительным покоем* понимается состояние жидкости, при котором отсутствуют перемещения отдельных частиц жидкости по отношению друг к другу, при этом жидкость перемещается, ***как твердое тело.***

Из прошлой лекции следует, что жидкости практически не способны сопротивляться растяжению, и в неподвижных жидкостях не действуют касательные напряжения.

В гидростатике учитываются следующие допущения.

1. В неподвижной жидкости возможен лишь один вид напряжения — *напряжение сжатия*, т. е. ***гидростатическое давление.***

Основное свойство гидростатического давления:

Величина гидростатического давления в точке покоящейся жидкости не зависит от направления площадки, для которой она вычислена.

2. В неподвижных жидкостях не действуют касательные напряжения, из поверхностных сил действуют только *силы давления*, действие сил вязкости не учитывается.

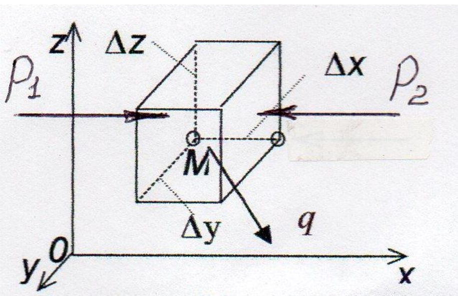
3. На внешней поверхности рассматриваемого объёма жидкости силы давления всегда направлены *по нормали* внутрь объёма жидкости и являются *сжимающими.*

4. Внешняя поверхность жидкости обычно рассматривается, как поверхность раздела с газообразной средой или твёрдыми стенками. Однако может рассматриваться и как поверхность объёма, мысленно выделяемого из объёма жидкости, для чего применяется «принцип затвердения».

5. На жидкость, находящуюся в состоянии относительного покоя действуют массовые силы: силы тяжести и силы инерции переносного движения.

Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Эйлера).

Получим дифференциальные уравнения равновесия жидкости в общем случае, когда на жидкость действует не только сила тяжести, но и другие массовые силы (например, силы инерции переносного движения при так называемом относительном покое).



К выводу дифференциальных уравнений равновесия жидкости

В неподвижной жидкости выделим произвольную точку M (x,y,z), находящуюся под давлением p.

Система координат жёстко связана с сосудом, содержащим эту жидкость.

Выделим элементарный объём в форме прямоугольного параллелепипеда с рёбрами Δx, Δy, Δz, параллельными осям координат, в котором точка M - одна из вершин.

Рассмотрим условия равновесия выделенного объёма жидкости, спроектировав на соответствующие оси координат все силы, действующие на объём.

Пусть на жидкость внутри параллелепипеда действует равнодействующая единичная массовая сила (q).

Тогда её составляющие будут определяться произведением массы выделенного объёма и единичных составляющих q_x, q_y и q_z этой силы.

$\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}$ **-** давления, действующие на грани, перпендикулярные оси Ox.

В проекции на ось ***Ox*** *получаем:*

$$\boldsymbol{p_1 \Delta y \Delta z - p_2 \Delta y \Delta z + q_x \rho \Delta x \, \Delta y \, \Delta z = 0.}$$

Поделив каждую составляющую уравнения на произведение $\Delta\boldsymbol{x}\Delta\boldsymbol{y}\Delta\boldsymbol{z}$ и учитывая, что $\boldsymbol{p_2 = p_1 + \Delta p}$, тогда получаем:

$$-\Delta \boldsymbol{p} / \Delta x + q_x \rho = 0,$$

где $\Delta\boldsymbol{p}$ – изменение давления на расстоянии Δx.

Переходя к пределам, получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\partial p}{\partial x},$$

где $(\boldsymbol{\partial p / \partial x})$ – частный дифференциал, определяющий быстроту изменения (повышения или понижения) давления вдоль оси Ox.

В итоге, получаем:

$$(\boldsymbol{\partial p / \partial x}) = \boldsymbol{\rho \, q_x}.$$

Аналогично находим уравнения равновесия сил и для других осей.

Окончательно получаем *системy дифференциальных уравнений* равновесия сил в жидкости:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho q_x; \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho q_y; \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = \rho q_{z,} \end{cases}$$

называемых уравнениями Эйлера.

Эта система справедлива, как для капельных жидкостей, так и для газообразных сред.

Каждое из полученных уравнений в отдельности позволяет определить закон распределения гидростатического давления вдоль соответствующей оси координат; совокупность двух уравнений - закон распределения гидростатического давления в соответствующей плоскости; совокупность трех уравнений - закон распределения гидростатического давления в объеме.

Однако, для практического использования, удобнее вместо системы получить **одно эвивалентное уравнение,** не содержащее частных производных.

Для этого, умножим на *dx; dy; dz* соответственно все три уравнения и произведём сложение.

Тогда, получим

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=\rho\left(q_x dx+q_y dy+q_z dz\right).$$

Поскольку гидростатическое давление есть функция только координат (**давление** $p = f(x, y, z)$), **левая часть полученного уравнения представляет собой *полный дифференциал гидростатического давления.***

Тогда дифференциальное уравнение равновесия для жидкости, находящейся в покое, можно представить в виде:

$$dp = \rho\,(q_x \cdot dx+q_y \cdot dy+ q_z \cdot dz).$$

Это уравнение выражает приращение давления *dp* при изменении координат *dx, dy, dz* в общем случае равновесия жидкости.

Это уравнение, полученное Л. Эйлером в 1755 г., также называют ***дифференциальным уравнением равновесия жидкости.***

Из данного уравнения легко получить уравнение поверхности равного давления (ПРД), т.е. поверхности, давление во всех точках которой одинаково $(p = const)$.

При $p = const$, имеем $dp = 0$, а так как плотность ρ не м.б. равна нулю, следовательно:

$q_x \cdot dx+q_y \cdot dy+q_z \cdot dz = 0$ – дифференциальное уравнение ПРД или ПУ.

Свойства ПУ:

1. *ПУ перпендикулярны массовым силам.*

Выбрав произвольное направление ***S,*** заменим уравнения Эйлера следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial s}=\rho q_s;$$

где $q_s = q\cos(q \wedge s)$ – проекция единичной массовой силы на направление ***S.***

Пусть направление ***S*** совпадает с ПУ. Тогда имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial s}=0.$$

Но, так так единичная массовая сила q не равна нулю, следовательно:

$$\cos(q \wedge s) = 0.$$

Вывод: *Угол между направлением q и* ***S*** равен 90 градусов.

2. *Свободная поверхность (СП) также есть ПУ.*

СП – это поверхность, по которой капельная жидкость граничит с газообразной средой.

Давление газа на поверхности жидкости распределено равномерно. Следовательно, СП – также есть ПУ.

3. *ПУ зависят только от распределения ускорения массовых сил и не зависят от рода жидкости.*

Это утверждение следует из дифференциального уравнения ПУ, где нет величин, характеризующих физические свойства жидкости.

4. *Поверхность раздела 2-х (не смешивающихся) жидкостей совпадает с ПУ.*

Равновесие жидкости в поле сил тяжести. Основное уравнение гидростатики.

Рассмотрим распространенный частный случай равновесия жидкости, когда на неё действует лишь одна массовая сила — сила тяжести.

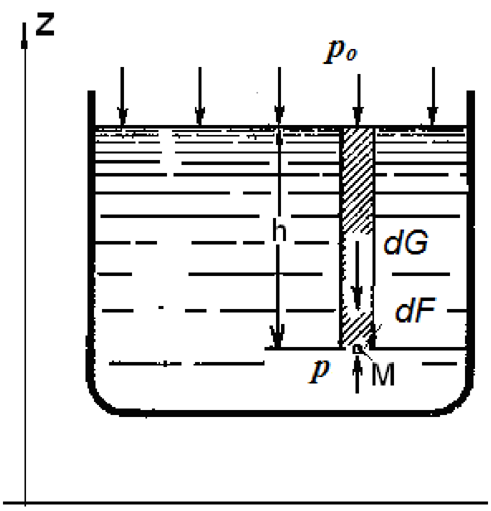
Вектор силы тяжести направлен вертикально. Значит ПУ (включая СП), направлены горизонтально.

Пусть жидкость содержится в сосуде (см. рисунок) и на её СП действует давление p_o. Найдём гидростатическое давление p в произвольно взятой точке M, расположенной на глубине h.

Выделим около точки М *элементарную горизонтальную площадку* dF и построим на ней *вертикальный цилиндрический объем высотой* **h**, то есть воспользуемся ***«принципом затвердения»***.

Рассмотрим условие равновесия выделенного объёма жидкости.

Давление жидкости на нижнее основание цилиндра (p) теперь будет внешним и направлено по нормали внутрь объёма, т. е. вверх.



Вывод основного уравнения гидростатики

Запишем условие равновесия выделенного объёма в проекции ***на вертикальную ось Z:***

$$pdF - p_o\,dF - dG = 0\ ,$$

где dG - сила веса жидкости в объёме dV,

или

$$pdF - p_o\,dF - \rho\cdot(h\cdot dF)\cdot g = 0\ .$$

Силы давления по боковой поверхности цилиндра в уравнение не входят, так как они нормальны к вертикальной оси.

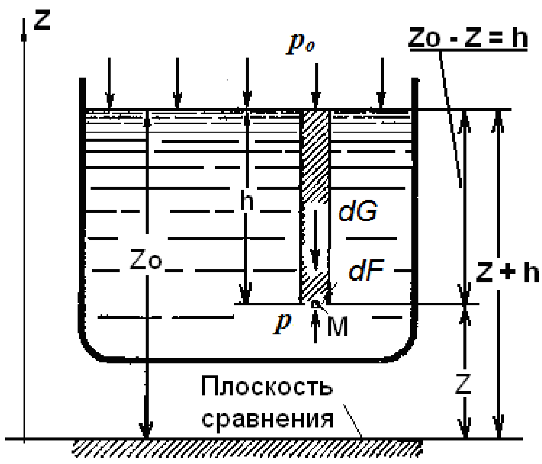
Сократив выражение на dF и выразив p, получим **основное уравнение гидростатики:**

$$p = p_o \pm \rho g h, \tag{1}$$

где p_o – внешнее давление;
$\rho g h$ – весовое давление.

Используя полученное уравнение можно определить давление в любой точке покоящейся жидкости.

Величина p_o является одинаковой для всех точек объёма жидкости, поэтому, учитывая основное уравнение гидростатики, можно сказать, что **давление, приложенное к внешней поверхности жидкости, передаётся во все точки этой жидкости и по всем направлениям одинаково.**



Вывод основного уравнения гидростатики

Z - геометрический напор,
Zo-Z - пьезометрический напор,
Z + h - гидростатический напор

Возьмём на произвольной высоте относительно сосуда горизонтальную плоскость, которую назовем *плоскость сравнения* (см. рисунок), от которой вертикально вверх будем отсчитывать координаты.

Обозначив через **z** координату точки **M**, через $\mathbf{z_0}$ — координату свободной поверхности жидкости и заменив в уравнении (1) h на $(z_0 — z)$, получим:

$$p = p_o + h\rho g = p_o + (z_0 - z)\rho g = p_o + z_0 \rho g - z\rho g\ .$$

Преобразовав и разделив уравнение на ρg, получим другую форму записи основного уравнения гидростатики:

$$z + p/(\rho g) = z_0 + p_o/(\rho g). \qquad (2)$$

Так как точка M взята произвольно, можно утверждать, что для всего рассматриваемого неподвижного объёма жидкости - $z + p/(\rho g) = const.$

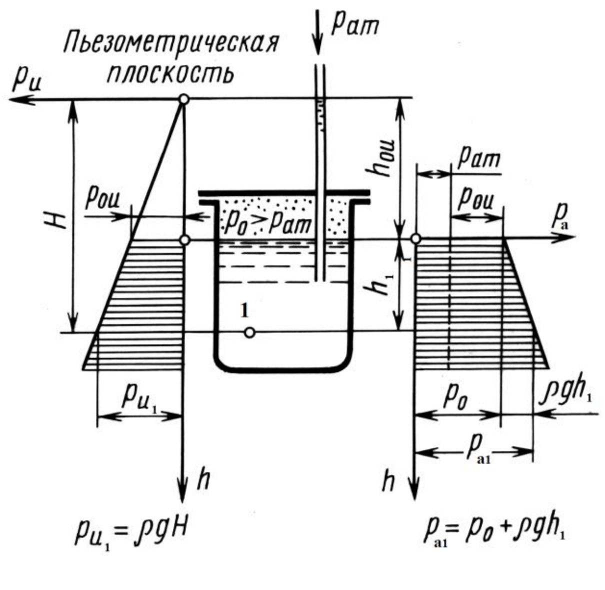
Определения:

1. Координата z (точки M относительно произвольной плоскости сравнения) **называется геометрическим напором.**
2. Величина $h = p/(\rho g) = (z_0 — z)$ называется пьезометрическим напором.
3. Сумма $z + h = z + p/(\rho g)$ называется гидростатическим напором.

Принципиальные схемы измерения давлений высотами столбов жидкости.

а) Измерение избыточного давления (p_u).

Прибор для производственного и лабораторного измерения давления на основе прозрачной трубки, называется **пьезометр** *(от греческого слова пьезо - сжимаю и метрео – измеряю; Один конец присоединяется к точке, где измеряется давление, другой конец обычно соединён с атмосферой).*



Если резервуар закрыть герметичной крышкой, и накачать под неё давление, так что давление в резервуаре увеличится $p_o > p_{атм}$, уровень жидкости в пьезометре поднимется выше уровня СП на величину:

$$h_{0u} = (p_0 - p_{am}) / \rho g = p_{0u} / \rho g.$$

где p_{ou} – избыточное давление на поверхности жидкости;
p_o – действующее на жидкость внешнее давление.

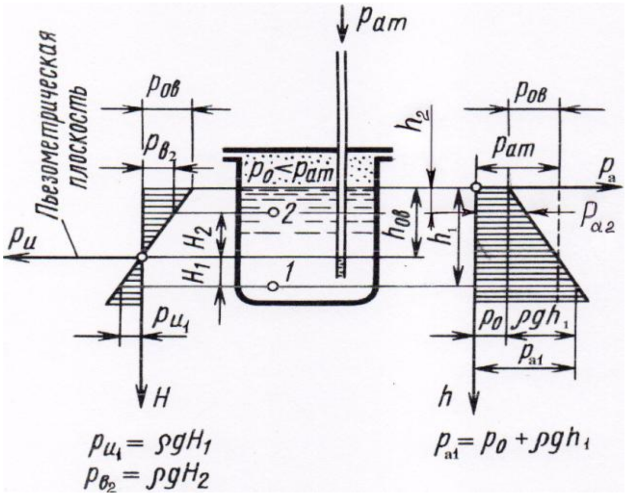
Тогда *избыточное давление в точке 1* будет равно:

$$p_{u1} = p_{0u} + \rho g h_1 = \rho g h_{0u} + \rho g h_1 = \rho g(h_{0u} + h_1) = \rho g H.$$

Величина *абсолютного давления в измеряемой точке 1* будет равна:

$$p_{a1} = p_0 + \rho g h_1 = (p_{am} + \rho g h_{0u}) + \rho g h_1 = p_{am} + \rho g(h_{0u} + h_1) = p_{am} + \rho g H.$$

б) измерение $\boldsymbol{p_в}$.



Если резервуар закрыть герметичной крышкой, и откачать из-под неё давление, так что давление над СП уменьшится $p_o < p_{am}$, уровень жидкости в пьезометре под действием атмосферного давления опустится ниже уровня свободной поверхности на величину:

$$h_{0в} = (p_{am} - p_0) / \rho g = p_{0в} / \rho g,$$

где $p_{ов}$ – вакуум на поверхности жидкости.

Величина абсолютного давления в точке «2» будет равна:

$$p_{a2} = p_0 + \rho g h_2 = p_{am} - p_{0в} + \rho g h_2 = p_{am} - \rho g h_{0в} + \rho g(h_{0в} - H_2) =$$

$$= p_{am} - \rho g h_{0в} + \rho g h_{0в} - \rho g H_2 = p_{am} - \rho g H_2.$$

Поскольку отрицательных давлений не бывает, минус при значении избыточного давления означает, что это недостаток до атмосферного давления **или вакуум на поверхности, проходящей через точку «2», т.е.**

$$p_{в2} = \rho g H_2.$$

Приборы для измерения давления.

В практике гидравлических измерений все приборы можно классифицировать:

а) *по характеру измеряемой величины:*

- манометры ($p_{изб}$);
- вакуумметры ($p_в$);
- мановакуумметры ($p_{изб}, p_в$);
- барометры ($p_{ат}$);
- дифференциальные манометры (для измерения разности давлений в 2-х точках; Δp).

б) *по принципу действия:*

- жидкостные (измеряют относительно небольшие давления; от 1 до 3 атм);
- пружинные;
- поршневые (очень точные; служат для тарировки технических приборов);
- электрические манометры (комбинированного типа – включают в себя датчики давления и вторичную аппаратуру).