б) ***Силы давления покоящейся жидкости на криволинейные стенки.***

Распределённая нагрузка, действующая на любую криволинейную поверхность от сил давления жидкости, направленных по нормали в каждой её точке, может быть приведена к главному вектору и главному моменту.

Главный вектор определяется по трём составляющим (обычно по двум взаимно перпендикулярным горизонтальным составляющим и вертикальной), а главный момент – по сумме моментов этих составляющих:

$$P = f(P_x, P_y, P_z), \qquad M = \Sigma m_{x,y,z}.$$

Полная величина вектора сил определяется по формуле:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2},$$

а *направление* через косинусы направляющих углов (углы, образуемые между направлением вектора давления с осями координат:

$$\boldsymbol{cos(P\wedge x)=P_x/P; \quad cos(P\wedge y)=P_y/P; \quad cos(P\wedge z)=P_z/P.}$$

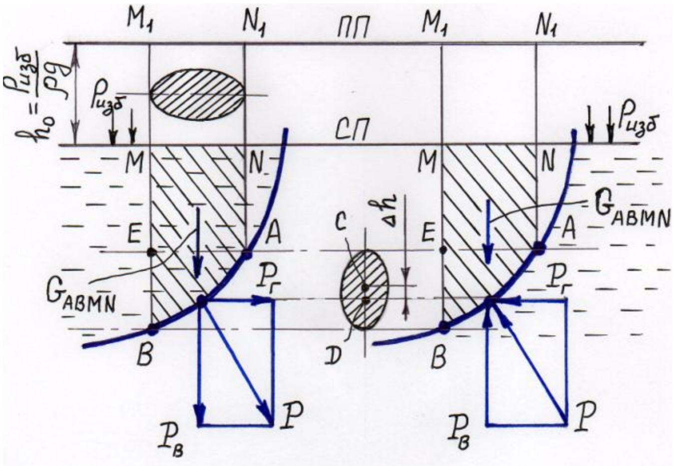
Рассмотрим общий случай определения полной силы давления жидкости на площадку ***AB*** криволинейной поверхности некоторого объёма, над СП которого имеется избыточное давление $\boldsymbol{p_{изб}}$.

Решение можно свести к решению задачи определения силы давления жидкости на криволинейную стенку, заменив внешнее избыточное давление действием столба эквивалентного слоя жидкости.

Чаще всего рассматриваются криволинейные стенки симметричные относительно вертикальной оси (цилиндрические, сферические, конические), поэтому ***рассмотрим плоскую задачу с двумя осями координат.***

Пусть плоскость симметрии рисунка является плоскостью симметрии для площадки ***AB.***

Возможны два варианта нагружения: жидкость расположена сверху (***схема «а»***) и жидкость расположена снизу (***схема «б»***).



а) – Жидкость сверху б) – Жидкость снизу
Схемы определения силы давления на криволинейную стенку

Рассмотрим схему «а».

Разложим силу давления жидкости на площадку ***AB*** на составляющие - вертикальную $\boldsymbol{P_в}$ и горизонтальную $\boldsymbol{P_г}$.

Выделим объём жидкости ***ABMN,*** ограниченный **СП**, площадкой ***AB*** и вертикальными поверхностями по отношению к **СП**, проведёнными по границе площадки ***AB***, и рассмотрим условия его равновесия в вертикальном и горизонтальном направлениях.

Вертикальная составляющая силы давления жидкости на площадку ***AB*** определяется как:

$$\boldsymbol{P_в = p_{изб} F_{MN} + G_{ABMN},}$$

где F_{MN} - площадь горизонтальной проекции площадки ***AB*;**
G_{ABMN} - сила тяжести жидкости в объеме ***ABMN*.**

Преобразуем это уравнение:

$$P_в = p_{изб}F_{MN}+G_{ABMN} = p_{изб}F_{MN}+\rho g V_{ABMN} =$$
$$= \rho g[(p_{изб}/\rho g)F_{MN} + V_{ABMN}] = \rho g V_{ABM1N1} = \rho g V_{ТД} = G_{ТД},$$

где $V_{ТД}$ – ***объём тела давления**, ограниченный самой площадкой **AB,** пьезометрической поверхностью (ПП) и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными тому направлению вдоль которого определяется сила давления.*

Тело ABM_1N_1 называется ***телом давления***.

Таким образом, сила $P_в$ численно равна «весу жидкости» в объёме тела давления, построенного на данной площадке ***AB*.**

Линия действия вертикальной составляющей силы давления жидкости на криволинейную площадку ***AB*** проходит через центр тяжести тела давления ABM_1N_1 и направлена вниз, если объём строится со «смоченной» стороны стенки, и вверх – если объём строится с «несмоченной» стороны стенки.

Горизонтальная составляющая силы давления жидкости на площадку ***AB*** определяется по правилам нахождения силы давления на плоскую стенку:

$$P_г = p_C F_{BE},$$

где F_{BE} – площадь вертикальной проекции площадки ***AB***;
p_c – величина гидростатического давления в ц.т. этой площадки.

Линия действия горизонтальной составляющей силы давления жидкости на криволинейную площадку ***AB*** проходит через центр давления вертикальной проекции площадки ***AB*** и смещена относительно центра тяжести вертикальной проекции на расстояние

$$\Delta h = \frac{J_C}{h_C \cdot F_{BE}},$$

где J_c – момент инерции площади F_{BE} относительно оси, проходящей через ц. т. (точку С).
Окончательно получаем:

$$P = \sqrt{P_Г^2 + P_В^2}.$$

Схема «б». Когда жидкость расположена снизу, то гидростатическое давление во всех точках поверхности ***AB*** имеет те же значения, что и ***в случае «а»***, но направление его будет противоположным, и суммарные силы $P_в$ и $P_г$ определяются теми же формулами, но с противоположным знаком.

При двухстороннем воздействии жидкости на стенку сначала определяют горизонтальные и вертикальные составляющие **с каждой стороны** стенки в предположении одностороннего воздействия жидкости, а затем суммарные горизонтальную и вертикальную составляющие от воздействия обеих жидкостей.

Задачи по определению силы давления жидкости на криволинейные стенки можно решать и **методом сечений,** при котором рассматривают равновесие объёма жидкости, заключённого между стенкой и плоским сечением, проведённым через её граничный контур ***(введение к главе 3 Сборника задач).***

Примечание:

1. Безразлично, где выбрана вертикальная плоскость;
2. Горизонтальная составляющая силы давления не зависит от формы стенки, а зависит *от контура стенки.*

Плавание тел.

Рассмотренный нами способ нахождения вертикальной составляющей силы давления жидкости на криволинейные стенки используют и для доказательства ***закона Архимеда.***

Поместим полностью в жидкость тело произвольной формы ***ABCD*** объёмом V_{ABCD}.

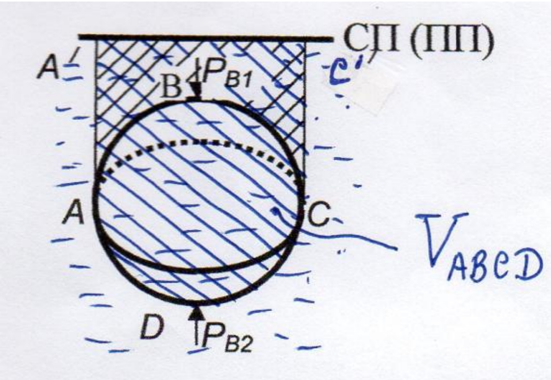


Схема определения выталкивающей силы на погруженное в жидкость тело

Разделим поверхность тела на две части. Построим объём тела давления на верхней части и нижней части.

Все горизонтальные силы, действующие на тело, должны взаимно уравновешиваться, так как каждой горизонтальной силе давления, действующей на поверхность тела в произвольно выбранном направлении, всегда будет соответствовать **другая сила**, действующая на тело с противоположной стороны и **равная первой:**

$$P_x = P_y = 0.$$

Суммарная сила воздействия жидкости на тело будет равна:

$$P_Z = P_{B2} - P_{B1} = \rho g\, V_{A'ADCC'} - \rho g\, V_{A'ABCC'} = \rho g V_{ABCD} = G_{ABCD}.$$

где P_{B1} – вертикальная составляющая силы давления на стенку ABC;

P_{B2} – вертикальная составляющая силы давления на стенку ADC.

Силу P_Z называют выталкивающей силой или ***архимедовой силой***, а *точка её приложения, т.е. центр тяжести объёма V_{ABCD} - центром водоизмещения.*

Закон Архимеда:

На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх, численно равная весу жидкости, вытесненной телом, и приложенная в центре тяжести объёма погруженной части тела.

Частные случаи закона Архимеда:

1) $G > P_Z$ - отрицательная плавучесть *(тело тонет)*;
2) $G < P_Z$ - положительная плавучесть *(тело всплывает и плавает на поверхности жидкости)*;
3) $G = P_Z$ - нулевая плавучесть *(тело плавает погруженным в жидкость полностью)*.

Относительный покой (равновесие) жидких сред.

Рассмотренные случаи равновесного состояния жидкости относятся к случаю ***абсолютного покоя***, под которым понимается *покой находящейся в сосуде жидкости, неподвижном относительно Земли, т.е. система координат жёстко связана с Землёй.* Частицы жидкости при таком состоянии находятся под действием только сил тяжести.

Если при движении сосуда на частицы жидкости, кроме сил тяжести *действуют ещё и силы инерции*, то под действием этих сил жидкость принимает новое положение равновесия - ***положение относительного покоя.***

Относительным покоем называется равновесие жидкости, находящейся под действием сил тяжести и инерции в движущемся сосуде.

Равновесие жидкости в сложных силовых полях.

а) Прямолинейное поступательное движение с постоянным ускорением.

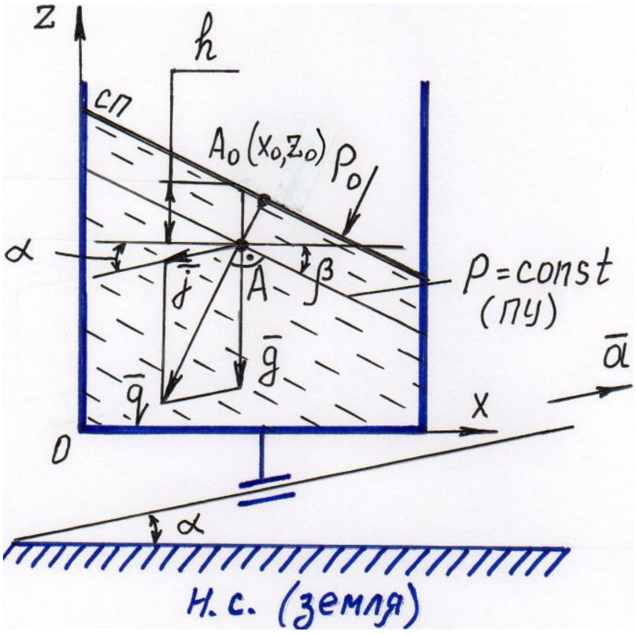
На жидкость, находящуюся в относительном покое, действуют *результирующие массовые силы (сила тяжести и сила инерции переносного движения),* а из *поверхностных – только силы давления.*

При относительном покое жидкость перемещается как твёрдое тело.

В системе прямоугольных осей координат рассмотрим равновесие жидкости, находящейся в покое относительно сосуда, движущегося с постоянным ускорением ***a*** *под углом* ***α*** *к горизонту.*

Ось **Oy** направлена *перпендикулярно* плоскости *движения.*

Н.с. – неподвижная система, связанная с землёй.



Для любой частицы жидкости к ускорению силы тяжести ***g*** добавляется ускорение переносного движения ***j = - a,*** т.е. оно направлено в сторону противоположную ускорению сосуда.

Т.е. при движении сосуда в поле силы тяжести *вектор единичной массовой силы* ***q*** в каждой точке жидкости представляет собой сумму *единичной силы тяжести* ***g*** и *единичной силы инерции* ***j*** *переносного движения:*

$$\boldsymbol{q = g + j}.$$

Основное свойство поверхностей уровня - равнодействующая массовых сил всегда нормальна к этим поверхностям.

Воспользуемся дифференциальным уравнением Эйлера:

$$dp = \rho\,(q_x \cdot dx + q_y \cdot dy + q_z \cdot dz),$$

Для нашего случая

$$q_x = a \cdot \cos\alpha\,; \quad q_y = 0; \quad q_z = -\,g + a \cdot \sin\alpha\,,$$

подставив, получим:

$$dp = \rho \cdot a \cdot \cos\alpha \cdot dx \; - \; \rho \cdot (g - a \cdot \sin\alpha) \cdot dz\,.$$

Проинтегрировав данное выражение, найдём ***закон распределения давления в жидкости***

$$p = \rho \cdot a \cdot \cos\alpha \cdot x - \rho \cdot (g - a \cdot \sin\alpha) \cdot z + C, \tag{1}$$

где *C* - постоянная интегрирования.

На произвольной ПУ давление постоянно (***p = const, dp = 0)***, тогда уравнение семейства ПРД *(плоскостей, параллельных 0у)*:

$$\rho \cdot a \cdot \cos\alpha \cdot x - \rho \cdot (g - a \cdot \sin\alpha) \cdot z + C_1 = 0\,, \tag{2}$$

где C_1 - постоянная интегрирования, уравнения семейства ПРД.

Так как СП также является ПУ, для которой – **($x = x_0$, $z = z_0$).** Тогда, с учётом этих условий из выражения (2), найдём значение C_1 для СП и затем, подставив его в данное выражение, получим **уравнение СП:**

$$z - z_0 = \frac{a\cos\alpha}{g - a\sin\alpha}(x - x_0) = \mathrm{tg}\beta(x - x_0)$$ - ***уравнение для СП.***

С учётом граничных условий - $x = x_0$; $z = z_0$ и, так как давление на СП равно (**$p = p_0$**), получим **закон распределения давления по объёму жидкости:**

$$p = p_0 + \rho \cdot a \cdot \cos\alpha \cdot (x - x_0) - \rho \cdot (g - a \cdot \sin\alpha) \cdot (z - z_0).$$

Анализ полученного уравнения позволяет сделать заключения:

1) **Давление в жидкости** меняется по всем направлениям, кроме ПРД, которые нормальны суммарному вектору равнодействующей единичной массовой силы q .

2) **Давление в жидкости** изменяется линейно по любому направлению, кроме оси $0y$, которой параллельны ПРД.

3) При опускании (свободном падении) сосуда с жидкостью - $\alpha = 90^o$; $q_x = 0$; $q_y = 0$; $q_z = 0$; дифференциальное уравнение примет вид $dp = 0$; откуда имеем $p_1 = p_2 = p_0$ - **во всем сосуде давление одинаково и не зависит от высоты свободной поверхности.**