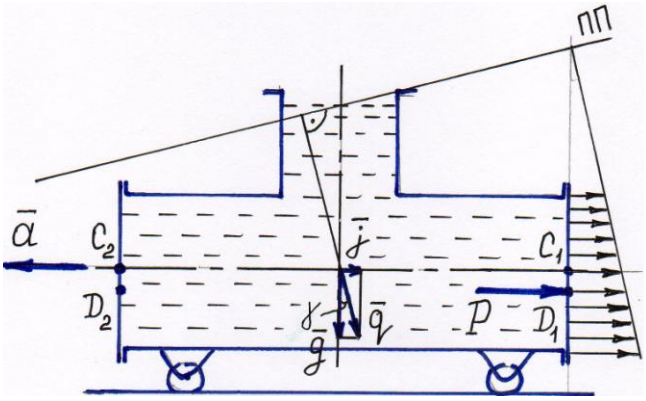
Лекция № 6.

Пример 1.



Цистерна движется с ускорением ***a***.

j – вектор единичной силы инерции переносного движения.

Определить ускорение ***a***, при котором жидкость не будет выливаться.

Решение задач такого рода необходимо начинать с определения по величине и направлению *вектора единичной массовой силы* – ***q***.

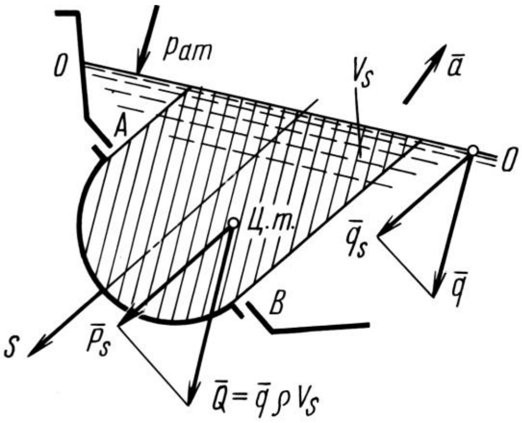
$$tg\gamma = \frac{a}{g}; \qquad q = \sqrt{a^2 + g^2}\ .$$

Силы давления жидкости на стенки в этом случае, благодаря однородности поля массовых сил, определяются зависимостями, аналогичными тем, которые были приведены в случае равновесия жидкости в неподвижном сосуде.

В частности: - силы давления на плоскую стенку: $P = p_c F$.

- силы давления на криволинейную стенку: $P = \sqrt{P_Г^2 + P_В^2}$.

Пример 2. В случае решения задачи графоаналитическим методом сила давления жидкости на криволинейную стенку вычисляется суммированием составляющих по координатным осям.



Составляющая силы давления по направлению ***S*** равна:

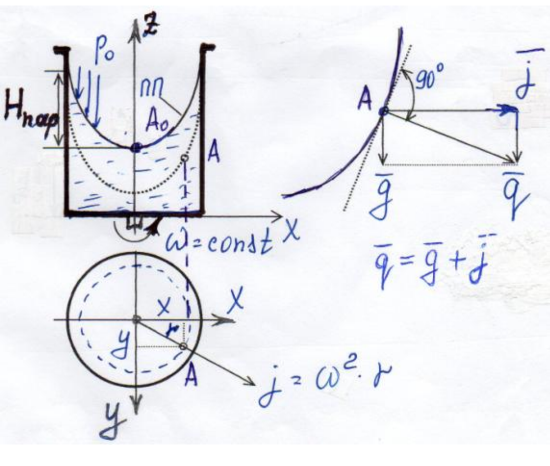
$$P_S = \rho q_S V_{ТДs},$$

где q_S – проекция вектора единичной массовой силы на направление ***S;***

$V_{ТДs}$ – объём тела давления, построенного парал-лельно направлению ***S***, между поверхностью стенки и ПП.

б) Равномерное вращение сосуда с жидкостью вокруг вертикальной оси.

Возьмём открытый цилиндрический сосуд с жидкостью и сообщим ему вращение *с постоянной угловой скоростью* ***(ω = const)*** вокруг его вертикальной оси.



Силы трения о стенки вращающегося сосуда будут увлекать за собой жидкость. Она постепенно приобретёт ту же угловую скорость, что и сосуд, т.е. *приобретёт состояние относительного покоя*.

Траектория любой частицы жидкости, находящейся в покое относительно стенок сосуда – есть окружность с центром на оси вращения.

К ускорению силы тяжести частицы жидкости ***g*** добавляется ускорение переносного движения, равное по величине и противоположное по направлению центростремительному ускорению:

$$j = \omega^2 r,$$

где ω – угловая скорость вращения;

r - радиус расположения вращаемой частицы.

Получим закон распределения давления для данного случая, воспользовавшись ур-нием Эйлера:

$$dp = \rho\,(q_x \cdot dx + q_y \cdot dy + q_z \cdot dz).$$

Для нашего случая проекции вектора единичной массовой силы на оси координат равны:

$$q_x = \omega^2 r \cos(x \wedge r) = \omega^2 r \frac{x}{r} = \omega^2 x .$$ Аналогично получаем: $q_y = \omega^2 y$, $q_z = -g$.

Подставляя эти значения в уравнение Эйлера, получим:

$$dp = \rho\,(\omega^2 x \cdot dx + \omega^2 y \cdot dy - g \cdot dz)$$

Проинтегрировав данное выражение, получаем:

$$p = \rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz\right) + C ,$$ где $r^2 = x^2 + y^2$.

Постоянная интегрирования C может быть получена из следующих начальных условий.

Точка A_0 (вершина параболоида) имеет координаты (x_0, y_0, z_0), $r = r_0 = 0$, а давление $p = p_0$, тогда получаем:

$$p_0 = -\rho g z_0 + C ,$$ откуда $C = p_0 + \rho g z_0$.

Подставив значение для C в выражение для p и, приведя его к удобному виду, получим:

$$p = p_0 + \rho g\left[(z_0 - z) + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right].$$

Полученное уравнение есть ни что иное, как ***закон распределения давления в жидкости в сосуде, равномерно вращающемся относительно вертикальной оси.***

Анализ полученного закона:

1) ПУ представляют собой конгруэнтные параболоиды вращения, ось которых совпадает с осью вращения сосуда.

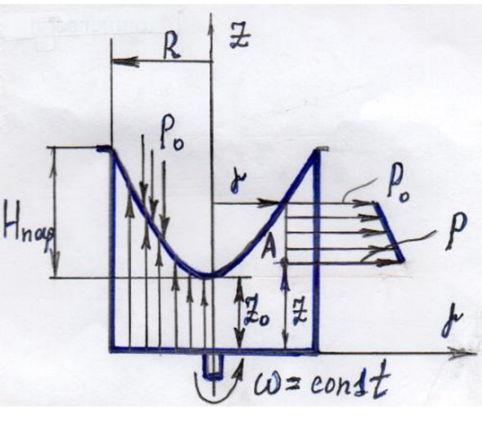
Примечание: Две геометрические фигуры называются конгруэнтными, если их можно совместить одну с другой, изменив только её положение в пространстве.

В частности для СП $(p = p_0)$ уравнение имеет вид: $$z - z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g},$$

где z_0 – вертикальная координата вершины параболоида СП;

r, z – координаты любой точки СП.

2) Из закона следует линейность распределения давления в жидкости по вертикальному направлению и квадратичное распределение давления по горизонтальному направлению.



На чертеже слева показана эпюра распределения давления в точках дна сосуда, а справа – эпюра распределения давления по вертикали.

Если $r = R$, $z - z_0 = H_{пар}$, тогда высота параболоида:

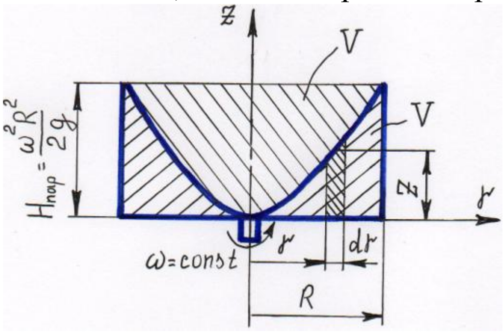
$$H_{пар} = \frac{\omega^2 R^2}{2g},$$

где R – радиус сосуда.

3) Свойство параболоида.

Пусть имеем сосуд, вращающийся с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси.

Сосуд заполнен жидкостью таким образом, что при его вращении вершина параболоида касается дна, а боковая грань - верхнего края цилиндра.



Выделим в жидкости элементарный объём в виде кольца, который равен:

$$dV = 2\pi r dr \cdot z.$$

Обозначив $z = A \cdot r^2$, где $A = \dfrac{\omega^2}{2g}$, и проинтегрировав объём кольца, получим:

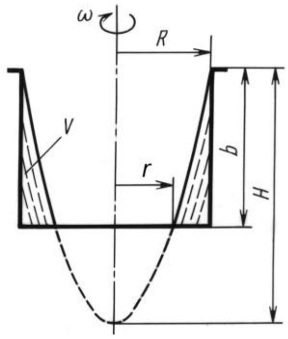
$$V = \int_0^R 2\pi r dr z = \int_0^R 2\pi r^3 A dr = 2\pi \frac{AR^4}{4} = \frac{1}{2}\pi R^2 AR^2 = \frac{1}{2}\pi R^2 H_{пар}.$$

В итоге получили, что объём под параболоидом, также равен объёму параболоида, а именно <u>*половине произведения площади основания цилиндра на высоту:*</u>

$$V_{пар} = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot H_{пар}.$$

<u>**Свойство параболоида вращения**</u> – <u>*параболоид вращения, построенный в цилиндре, делит цилиндр на две равные части.*</u>

4) Объём жидкости во вращающемся цилиндрическом сосуде в случае, когда СП жидкости пересекает дно сосуда, определяется по формуле:

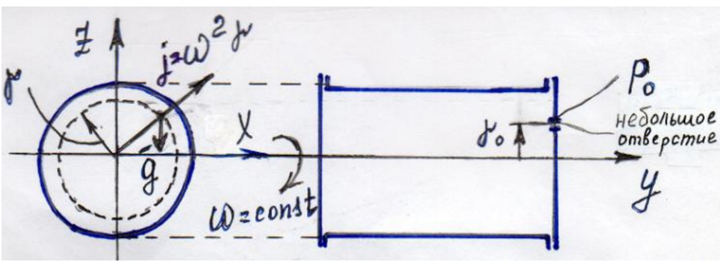


$$V = \pi(R^2 - r^2)\frac{b}{2} = \frac{\pi g}{\omega^2} b^2.$$

<u>***Общим методом определения сил давления жидкости на стенки сосуда является получение функции, выражающей закон распределения давления на заданной поверхности и интегрирование этой функции по площади стенки.***</u>

в) <u>Равномерное вращение сосуда с жидкостью вокруг горизонтальной оси.</u>

В этом случае имеем поле массовых сил, неоднородных и несимметричных относительно оси вращения.



Равномерность распределения давления происходит <u>***при высоких частотах вращения***</u>, т.е. когда центробежные силы, действующие на частицы жидкости, значительно превышают силы тяжести этих же частиц и <u>***ими можно пренебречь.***</u>

<u>Рассмотрим пример.</u> Имеем цилиндрический сосуд радиусом – $r = 100$ ***мм,*** который вращается вокруг горизонтальной оси с постоянным числом оборотов - $n = 500$ ***об/мин.***

Следовательно, $\omega = 52{,}33$ ***рад/с.***

$$j = \omega^2 r = 2738{,}4 \cdot 0{,}1 = 273{,}84 \text{ м/с}^2 \gg g = 9{,}81 \text{ м/с}^2.$$

Для получения закона распределения давления вновь воспользуемся уравнением Эйлера:

$$dp = \rho\,(q_x \cdot dx + q_y \cdot dy + q_z \cdot dz).$$

В нашем случае имеем:

$$q_x = \omega^2 x; \qquad q_y = 0; \qquad q_z = \omega^2 z.$$

Подставив эти значения в уравнение Эйлера, получаем:

$$dp = \rho\,\omega^2 (x \cdot dx + z \cdot dz).$$

Проинтегрировав, получим:

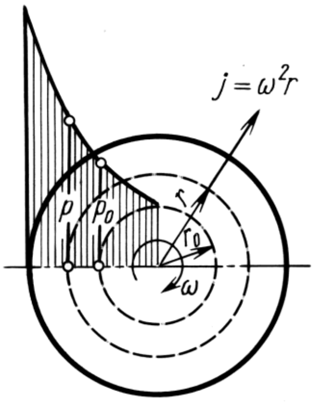
$$p = \rho \frac{\omega^2}{2}(x^2 + z^2) + C \quad \text{или} \quad p = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + C$$

При начальных условиях: $r = r_o$, $p = p_o$, определим значение постоянной интегрирования C, и подставив его в выражение для p, получаем выражение:

$$p = p_0 + \rho \frac{\omega^2}{2}(r^2 - r_0^2),$$

<u>определяющее **закон распределения давления в объёме жидкости, вращающейся вокруг горизонтальной оси,**</u>

где p_0 – давление в точках цилиндрической поверхности радиуса r_0 ;
p – давление в точках цилиндрической поверхности произвольного радиуса r .



<u>ПУ представляют собой цилиндрические поверхности с осями, совпадающими с осью сосуда.</u>

<u>Закон распределения давления по радиусу – параболический.</u>

<u>Формула определения давления может применяться при любом расположении оси вращения сосуда, если сила тяжести мала по сравнению с центробежной силой.</u>