

**Дифференциальные уравнения движения**  
**идеальной жидкости (уравнения Эйлера).**

В пространстве, заполненном движущейся идеальной жидкостью плотностью  $\rho$ , выделим элементарный параллелепипед, рёбра которого со сторонами  $dx, dy, dz$  параллельны осям координат.

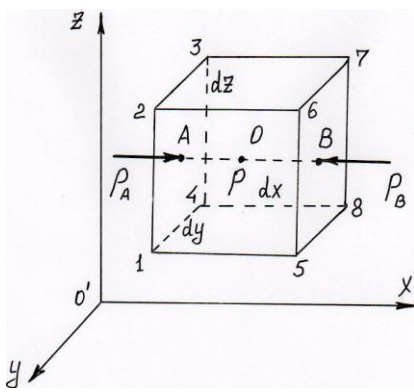
На этот элементарный объём действуют:

а) поверхностные силы (силы давления от нормальных и касательных напряжений).

Но т.к., жидкость идеальная, то при её движении отсутствуют силы внутреннего трения, т.е. касательные напряжения  $\tau = 0$ .

б) массовые силы.

Пусть в центре тяжести параллелепипеда в точке  $O$  гидростатическое давление равно  $p$ , координаты этой точки –  $x, y, z$ . Скорость движения в этой точке  $v$ . Составляющие этой скорости по осям координат –  $v_x, v_y, v_z$ .



Проведём через точку  $O$  горизонтальную линию, параллельную оси  $O'X$ . Точки пересечения с гранями параллелепипеда – точка  $A$  (грань 1234) и точка  $B$  (грань 5678).

Давление в этих точках по оси  $O'X$  соответственно равно  $p_A$  и  $p_B$ .

Гидростатическое давление изменяется непрерывно линейно, и приращение давления на единицу длины  $dx$  – равно  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$ ;  $dy$  –

равно  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$ ;  $dz$  – равно  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$ .

Следовательно, давления в точках  $A$  и  $B$  по оси  $O'X$  будут

различаться на величину  $\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$ .

Давления в точках  $A$  и  $B$  выразим в следующем виде:

$$p_A = p - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \quad \text{и} \quad p_B = p + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx.$$

Рассмотрим равновесие параллелепипеда, находящегося в движущейся жидкости, используя

принцип Д'аламбера.

Принцип Д'аламбера заключается в следующем:

При движении системы ее положение может рассматриваться, как положение равновесия, если к активным силам, действующим на систему, прибавить **фиктивные силы (силы инерции)**.

Тогда, проецируя все силы на ось  $O'X$ , получим:

$$\left( p - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) dydz - \left( p + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) dydz + q_x \rho dx dy dz + j_x \rho dx dy dz = 0,$$

где 1-е и 2-е слагаемое – силы давления на левую и правую грани;

3-е слагаемое – проекция массовой силы на ось  $O'X$ ;

4-е слагаемое – проекция силы инерции на ось  $O'X$ .

Раскрыв скобки, разделив полученное уравнение на  $\rho dx dy dz$  и, учитывая, что

$$j_x = -a_x = -\frac{dv_x}{dt}, \text{ получим: } q_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt}. \quad (1)$$

Аналогично можно получить уравнения по осям  $O'Y$  и  $O'Z$ , а именно:

$$q_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt}; \quad q_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dv_z}{dt}. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) можно записать в виде системы:

$$\left. \begin{aligned} q_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dv_x}{dt} \\ q_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dv_y}{dt} \\ q_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dv_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В общем случае величины  $v_x, v_y, v_z$  являются функцией координат  $x, y, z$ , а также времени  $t$ .

Следовательно, полный дифференциал скорости  $v_x$  будет равен:

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz + \frac{\partial v_x}{\partial t} dt.$$

Разделив леву и правую части уравнения на  $dt$ , получим:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad \text{где } \frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dy}{dt} = v_y; \quad \frac{dz}{dt} = v_z.$$

Тогда имеем: 
$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t}.$$

Аналогично можно получить дифференциалы скоростей -  $\frac{dv_y}{dt}; \frac{dv_z}{dt}$  и, внося их в систему,

получим:

$$\left. \begin{aligned} q_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ q_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ q_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Уравнения (4) представляют собой **дифференциальные уравнения движения идеальной (невязкой) жидкости - уравнения Эйлера.**

Уравнения Эйлера выражают связь между проекциями действующих сил, скоростей, давления и плотности жидкости.

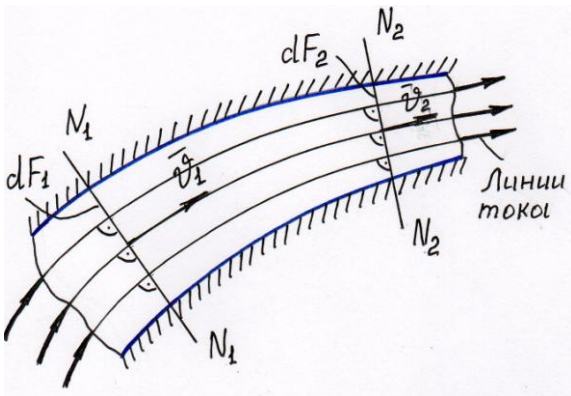
### **Уравнения гидродинамики для потоков реальной (вязкой) жидкости**

Отличия этих потоков:

- скорости течения по сечению распределены неравномерно из-за эффекта прилипания к стенкам и наличия трения между слоями жидкости и стенок внутри поверхности жидкости;
- диссипация механической энергии (рассеивание), обусловленное внутренним трением в потоке.

### **Нормальное (живое) сечение в потоке.**

**Нормальное сечение (живое)** – это в общем случае поверхность в пределах потока, проведённая нормально к линиям тока.



В дальнейшем будем рассматривать в потоках такие участки, в которых струйки можно считать параллельными и, следовательно, живые сечения – **плоскими.**

Скорость движения частиц в живом сечении – скорость струйки  $v$ .

Расход, проходящий через площадь  $dF$  в единицу времени  $dt$  равен:

$$dQ = v dF, [m^3/c].$$

Общий объёмный расход жидкости через любое нормальное сечение будет представлять собой сумму

элементарных расходов струек, т.е. не что иное, как:  $Q = \int_F v dF$ .

Если жидкость несжимаема, то  $Q_1 = Q_2 = Q_i = const$ .

Количество жидкости, протекающее в единицу времени через любое нормальное сечение, можно измерить через весовой и массовый расход:

$$dG = \rho g dQ, [H/сек],$$

$$dM = \rho dQ, [кг/сек].$$

Если же величина скорости по нормальному сечению одинакова, то объёмный расход равен:

$$Q = vF.$$

Однако, если закон изменения скорости по нормальному сечению неизвестен, то вводим понятие о **средней скорости**  $v_{cp}$ .

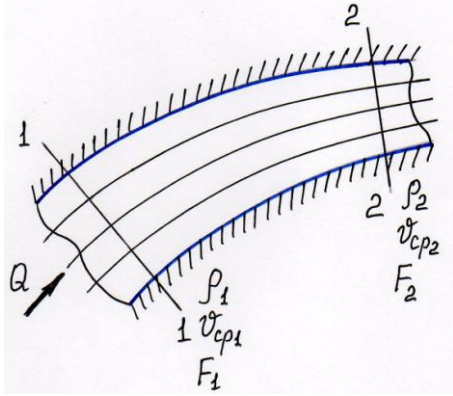
**Средняя скорость** – это воображаемая скорость, равномерно распределённая по сечению, при которой *расход равен действительному расходу*.

Тогда  $Q = \int v dF = v_{cp} F$ , т.е.  $v_{cp} = \frac{\int v dF}{F}$ ;  $v_{cp} = \frac{Q}{F}$ .

**Средняя скорость вводится даже в тех случаях, когда известен закон изменения скорости, так как это существенно упрощает расчёт.**

### Уравнение неразрывности (уравнение постоянства расхода).

Рассмотрим движение несжимаемой жидкости в вдоль твёрдой стенки (например, в трубе). Вывод уравнения начнём для установившегося движения.



При таком потоке жидкость между сечениями (1) и (2) не накапливается. Количество жидкости, проходящее через оба сечения одинаково.

Следовательно,  $m_1 = m_2$ , т.е.  $\rho_1 v_{cp1} F_1 = \rho_2 v_{cp2} F_2$ .

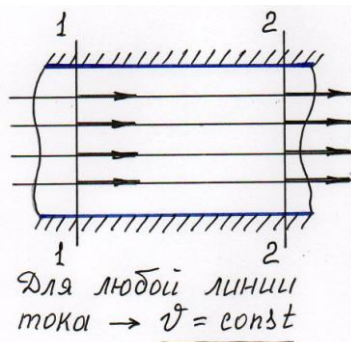
Но т.к. для капельных жидкостей имеем:  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ .

Тогда получаем, что:

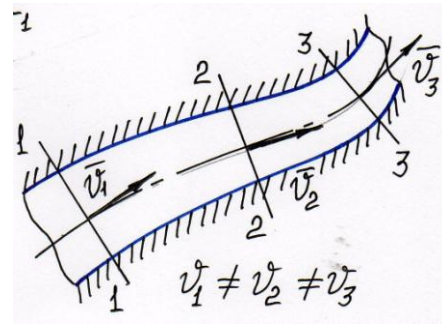
$$v_{cp1} F_1 = v_{cp2} F_2 = \text{const.} \quad \text{- уравнение неразрывности.}$$

Все потоки в каналах принято делить на две основные группы:

- равномерные;



- неравномерные.



Во втором случае имеет место неравномерное распределение скорости по потоку, а, следовательно, и неравномерное распределение механической энергии вдоль потока.

Из предыдущей лекции мы знаем, что напор элементарной струйки равен:

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}, \text{ [м].}$$

Введём понятие мощности элементарной струйки, которая представляет собой произведение удельной энергии жидкости в данной точке на элементарный массовый расход:

$$dN = gH \cdot \rho dQ, \text{ [Вт].}$$

Но так как, расход элементарной струйки равен:  $dQ = v dF$ , [м<sup>3</sup>/с],

то тогда мощность всего потока будет равна:

$$N = \int_F gH \cdot \rho dQ = \int_F \rho g \cdot \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) \cdot v dF.$$

Введя понятие средний напор потока, получим:

$$H_{cp} = \frac{N}{\rho g Q}, \text{ [м],}$$

где  $\rho g Q$  – число весовых единиц;

$H_{cp}$  – средний запас уд. мех. энергии, приходящейся на единицу веса перемещающейся ж-ти.

Тогда получаем:

$$H_{cp} = \frac{1}{Q} \int_F \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) \cdot v dF,$$

где 1-х два слагаемых представляют собой статический напор, а 3-е слагаемое – динамический (скоростной) напор.

Отсюда получаем:  $H_{cp} = H_{cm} + H_{ск}$

или  $H_{cm} = \frac{1}{Q} \int_F \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) \cdot v dF;$   $H_{ск} = \frac{1}{Q} \int_F \left( \frac{v^3}{2g} \right) \cdot dF.$

Умножив и разделив выражение для  $H_{ск}$  на  $v_{cp}^3$  и зная, что  $Q = v_{cp} F$ , получим:

$$H_{ск} = \frac{v_{cp}^3}{2g v_{cp} F} \int_F \left( \frac{v^3}{v_{cp}^3} \right) \cdot dF = \frac{v_{cp}^2}{2g} \frac{1}{F} \int_F \left( \frac{v}{v_{cp}} \right)^3 dF = \alpha \cdot \frac{v_{cp}^2}{2g}, \quad \text{или} \quad H_{ск} = \alpha \cdot \frac{v_{cp}^2}{2g},$$

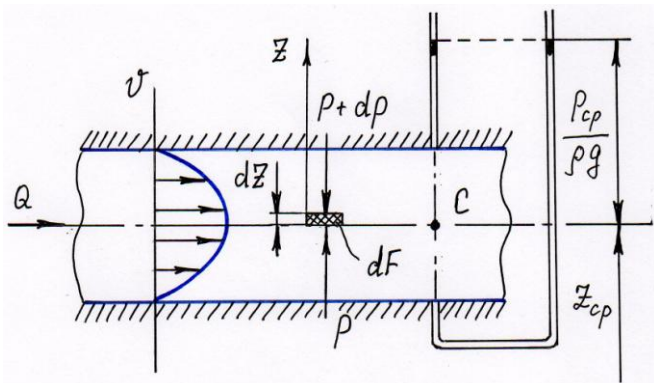
где  $\alpha = \frac{1}{F} \int_F \left( \frac{v}{v_{cp}} \right)^3 dF$  - коэффициент кинетической энергии, учитывающий неравномерность

распределения скорости по нормальному сечению ( $\alpha$  – величина безразмерная).

При  $v \neq v_{cp}, \Rightarrow \alpha > 1;$   
 При  $v = v_{cp}, \Rightarrow \alpha = 1;$

Вычислим также значение  $H_{cm}$  для равномерных потоков жидкости.

Рассмотрим движущийся поток жидкости. Выделим внутри потока элементарный объём жидкости и рассмотрим равновесие этого объёма под действием всех сил в проекции на ось  $z$ .



Тогда,  $\sum z = 0;$

$$p dF - (p + dp) dF - \rho g \cdot dF dz = 0.$$

Раскрыв скобки и проведя сокращения, получим:

$$dp + \rho g \cdot dz = 0; \quad d(p + \rho g \cdot z) = 0.$$

Следовательно:  $z + \frac{p}{\rho g} = const.$

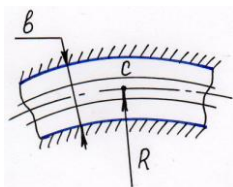
Потенциальная энергия для всех частиц жидкости в потоке одинакова.

В частности для точки  $C$  имеем:  $z_{cp} + \frac{p_{cp}}{\rho g} = const,$

$$H_{cm} = z_{cp} + \frac{p_{cp}}{\rho g}.$$

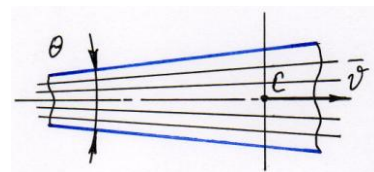
Полученное уравнение справедливо для следующих потоков:

потоки малой кривизны

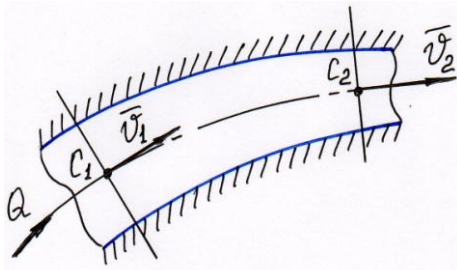


Должно быть  $b \ll R$

потоки с малой конусностью



Угол раствора:  $\Theta < (10^\circ - 15^\circ)$

**Баланс напоров.**

$$\left. \begin{aligned} \text{Напор в сечении 1: } H_1 &= z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g}; \\ \text{Напор в сечении 2: } H_2 &= z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} \end{aligned} \right\}$$

При движении реальной (вязкой) жидкости  $H_2 < H_1$  (из-за диссипации механической энергии), т.е.

$$H_2 - H_1 = h_n,$$

где  $h_n$  – гидравлические потери энергии напора.

В итоге получаем:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_n,$$

Данное уравнение является **уравнением Бернулли для конечного потока реальной (вязкой) жидкости при установившемся движении.**

От уравнения для элементарной струйки идеальной жидкости это уравнение отличается четвертым членом - потерей полного напора, и коэффициентами кинетической энергии  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , учитывающими неравномерность распределения скоростей.

Скорости, входящие в это уравнение, являются средними скоростями в первом и втором сечениях потока.

Это уравнение Бернулли применимо не только для жидкостей, но и для газов, при условии, что скорость их движения значительно меньше скорости звука.

Графически это уравнение представляется диаграммой подобно уравнению Бернулли для идеальной жидкости с учётом потерь напора. Потери напора вдоль потока возрастают.

