Гидродинамика. Основные понятия и определения.

Основным объектом изучения гидродинамики является ***поток жидкости***, т.е. ***движение массы жидкости между ограничивающими твёрдыми стенками.***

1) Течение в открытых руслах (***безнапорное течение***);
2) Течение с потоками без СП и с давлением отличным от атмосферного (течение внутри трубопроводов, насадков, т.е. ***напорное течение***).

В гидродинамике используют несколько моделей жидкости:

а) *несжимаемая идеальная (невязкая) жидкость:*

- плотность $\rho = \mathbf{const}$, вязкость $\mu = \mathbf{0}$, касательные напряжения $\tau = \mathbf{0}$.

б) *несжимаемая вязкая жидкость:*

- плотность $\rho = \mathbf{const}$, вязкость $\mu \neq \mathbf{0}$, касательные напряжения $\tau \neq \mathbf{0}$.

Течение жидкости м.б. установившимся и неустановившимся.

Установившееся течение – это течение, неизменное по времени, при котором давление и скорость в точках рассматриваемого пространства являются функциями лишь координат, но не зависят от времени:

$$p = f_1(x, y, z), \quad \upsilon = f_2(x, y, z).$$

Неустановившееся течение – это течение, все характеристики котрого (или некоторые из них) изменяются во времени. В общем случае НТ давление и скорость зависят как от пространственного положения точек, так и от времени:

$$p = F_1(x, y, z, t), \quad \upsilon = F_2(x, y, z, t).$$

Основные уравнения гидродинамики.

1) Уравнение неразрывности (уравнение постоянства расхода).

$$\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2 = Q = const.$$

2) Уравнение Бернулли (уравнение баланса энергии).

Энергетический смысл уравнения Бернулли **для потока идеальной жидкости** заключается в постоянстве вдоль потока полной удельной энергии жидкости.

В частности, для 2-х произвольных сечений имеем (течение установившееся):

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\upsilon_2^2}{2g} \Rightarrow H_1 = H_2 = const$$ (вдоль всего потока).

где ***H*** – полная уд. механическая энергия единицы веса перемещаемой жидкости (полный напор);

z_1, z_2 – энергия положения (или геометрический напор);

$\frac{p_1}{\rho g}, \frac{p_2}{\rho g}$ - потенциальная энергия (или пьезометрический напор);

$\dfrac{\upsilon_1^2}{2g}, \dfrac{\upsilon_2^2}{2g}$ - кинетическая энергия (или скоростной напор).

Для потока реальной (вязкой) жидкости имеем (при установившемся движении):

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{\upsilon_2^2}{2g} + h_n$$

где **h_n** – потери напора от 1-го до 2-го сечения;

υ_1 , υ_2 – средние скорости движения жидкости в этих сечениях;

α_1 , α_2 – коэффициенты кинетической энергии, учитывающие неравномерность распределения скорости по течению.

Для круглых труб:

- если **ламинарный режим** движения жидкости – **$\alpha = 2$;**
- если **турбулентный режим** движения жидкости - **$\alpha = 1$;**

Режимы движения жидкости.

Немецкий инженер-гидротехник ***Г.Хаген*** открыл существование 2-х принципиально разных режимов движения жидкости. Затем этот вопрос рассматривал также ***Д.И.Менделеев***, а дополнительно исследовал английский физик и инженер ***О.Рейнольдс***.

В результате проведённых опытов он установил, что при некотором значении скорости $\upsilon_{кр}$ ***происходит смена режима течения жидкости с ламинарного на турбулентный***:

$$Re_{кр} = \frac{\upsilon_{кр} d \rho}{\mu} \qquad \upsilon_{кр} = \frac{\mu Re_{кр}}{\rho d} = \frac{\nu Re_{кр}}{d},$$

где **ν** – кинематическая вязкость;

$Re_{кр}$ – критическое число Рейнольдса, соответствующее $\upsilon_{кр}$.

Т.е. число Рейнольдса характеризует режим движения потока жидкости в трубе.

При течении жидкости в различных каналах значения $Re_{кр}$ находятся в интервале $Re_{кр} = 2000 \dots 3000$.

Для труб круглого сечения принимают $Re_{кр} = 2300$.

Если $Re < Re_{кр}$ - ламинарный режим.

Если Re > $Re_{кр}$ - турбулентный режим.

Для потоков в трубах некруглого сечения число Re находят по выражению:

$$Re = \frac{\upsilon \cdot D}{\nu},$$

где D - гидравлический диаметр, который равен:

$$D = \frac{4 \cdot F}{\Pi},$$

где F - площадь сечения трубы;
Π - величина «смоченного» периметра сечения.

Пример 5.1

Определить критическую скорость, отвечающую переходу от ламинарного режима движения к турбулентному для трубопровода диаметром d = 100 мм при движении в ней воды, минерального масла и воздуха при температуре их t = 20°.

По таблице приложения П1 находим кинематическую вязкость:
вода $\nu = 1{,}00 \cdot 10^{-6}$ м^2/с;
минеральное масло $\nu = 400 \cdot 10^{-6}$ м^2/с;
воздух $\nu = 15{,}7 \cdot 10^{-6}$ м^2/с.

Считаем, что переход от ламинарного движения к турбулентному происходит при $Re_{кр} = 2300$

$$Re_{кр} = \frac{Vd}{\nu}, \quad V_{кр} = \frac{Re\,\nu}{d}.$$

$$\text{Для воды } V_{кр} = \frac{2300 \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-6}}{0{,}10} = 0{,}023 \text{ м/с}.$$

$$\text{Для масла } V_{кр} = \frac{2300 \cdot 400 \cdot 10^{-6}}{0{,}1} = 9{,}2 \text{ м/с}.$$

$$\text{Для воздуха } V_{кр} = \frac{2300 \cdot 15{,}7 \cdot 10^{-6}}{0{,}1} = 0{,}356 \text{ м/с}.$$

Задача № 2. В стенку бака с бензином (ρ = 700 кг/ м^3) вмонтирован короткий трубопровод с вентилем на конце (рис. 1.2). Участок с сужением имеет минимальный диаметр d = 100 мм. Заглубление осевой линии трубопровода под свободную поверхность жидкости H = 3 м. Показание манометра M равно 150 кПа. Барометрическое давление B = = 736 мм. рт. ст. Давление насыщенных паров бензина $p_{н.п.}$ = 30 кПа. Определить возможный максимальный расход бензина Q_{max} через трубопровод. Гидравлическими потерями напора пренебречь.

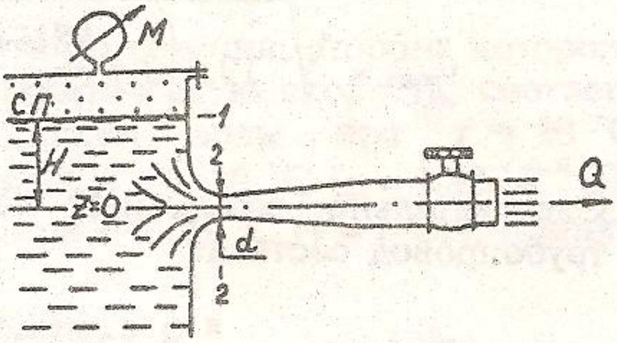


Рис. 1.2

Решение. Расход может быть определен из уравнения расхода $Q = v \cdot F$. При известной проходной площади узкого сечения задача по определению расхода сводится к нахождению скорости в нем. Последняя может быть найдена из уравнения Бернулли для двух сечений, показанных на чертеже с выбранной плоскостью отсчета z = 0:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

По мере открывания вентиля скорость в суженном сечении возрастает, а давление падает. В момент, когда абсолютное давление в этом месте достигнет $p_{н.п.}$, скорость будет максимальной. Дальнейшее открытие вентиля уже не приведет к увеличению расхода. В абсолютной системе уравнение Бернулли при заданных условиях имеет вид

$$H + \frac{p_{атм} + p_{и}}{\rho g} = \frac{p_{н.п.}}{\rho g} + \frac{v_{max}^2}{2g}$$

($\alpha_2 = 1$ – конфузор выравнивает скорости, поэтому считаем, что распределение скоростей по сечению равномерное). Значение v_{max} находим из следующего выражения:

$$v_{max} = \sqrt{2g\left(H + \frac{p_{атм} + p_{и} - p_{н.п.}}{\rho g}\right)},$$

где $p_{атм} = \rho_{рт} \cdot g \cdot h_{рт} = 13600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}736 = 98194$ Па, тогда

$$v_{max} = \sqrt{19{,}6\left(3 + \frac{98194 + 150000 - 30000}{700 \cdot 9{,}81}\right)} = 26{,}1 \text{ м/с}.$$

Следовательно, возможный максимальный расход бензина через трубопровод составит

$$Q_{max} = v_{max} \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = 26{,}1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}01 = 0{,}205 \text{ м}^3\text{/с} = 205 \text{ л/с}.$$

Задача № 4. Определить расход воды через отверстие с острой кромкой и диаметром $d = 150$ мм, выполненное в торце вертикальной трубы с диаметром $D = 300$ мм, если показание манометра M перед отверстием равно 150 кПа и высота расположения манометра над плоскостью отверстия $h = 1$ м (рис. 2.3). Коэффициент сопротивления отверстия принять $\zeta = 0{,}06$. Коэффициент сжатия струи при выходе из отверстия определить по эмпирической формуле, действительной при сопоставимых порядках D и d:

$$\varepsilon = 0{,}62 + 0{,}38(F_{отв}/F_1)^2.$$

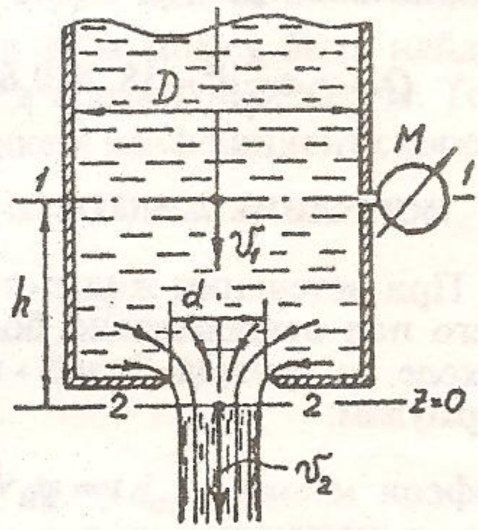


Рис. 2.3

Решение. Для выбранных сечений 1–1 и 2–2 с плоскостью отсчета $z = 0$, совпадающей с 2–2, записываем уравнение Бернулли в избыточной системе давлений:

$$h + \frac{p_и}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g}.$$

Полагая, что режим движения турбулентный, считаем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Уравнение постоянства расхода позволяет выразить среднюю скорость движения в трубопроводе v_1 через среднюю скорость истечения v_2:

$$v_1 F_1 = v_2 F_2;\; v_1 = v_2\frac{F_2}{F_1};\quad \text{так как}\;\; F_2 = \varepsilon F_{отв} = \varepsilon\frac{\pi}{4}d^2,\;\text{то}\;\; v_1 = v_2\varepsilon\left(\frac{d}{D}\right)^2;$$

$$\varepsilon = 0{,}62 + 0{,}38\left(\frac{150}{300}\right)^4 = 0{,}62 + 0{,}024 = 0{,}643.$$

Скорость истечения

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{p_и}{\rho g}\right)}{1 + \zeta - \varepsilon^2\left(\frac{d}{D}\right)^4}} = \sqrt{\frac{19{,}62\left(1 + \frac{1{,}5\cdot 10^5}{9{,}81\cdot 10^3}\right)}{1 + 0{,}06 - 0{,}103}} = 18{,}28\ \text{м/с}.$$

Искомый расход воды через отверстие

$$Q = v_2\cdot\varepsilon\cdot\frac{\pi}{4}d^2 = 18{,}28\cdot 0{,}643\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 0{,}0225 = 0{,}208\ \text{м}^3/\text{с} = 208\ \text{л/с}.$$

Задача № 5. По трубопроводу (рис. 2.5) с диаметром $D = 50$ мм, заканчивающемуся сходящимся соплом с диаметром $d = 25$ мм ($\zeta = 0{,}06$), керосин ($\rho = 700$ кг/м^3) под давлением поступает в большую емкость с отрицательным избыточным давлением (вакуумом). Показания манометра M и вакуумметра V равны соответственно 200 кПа и 40 кПа. Определить скорость истечения и расход через насадок.

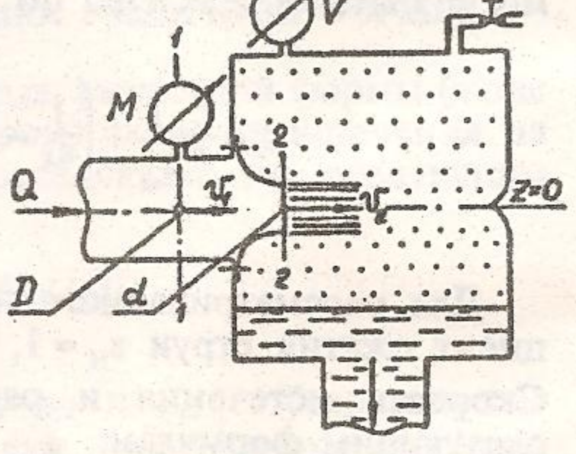


Рис. 2.5

Решение. Для определения скорости истечения записываем уравнение Бернулли в избыточной системе давлений для сечений 1–1 и 2–2 с плоскостью отсчета $z = 0$, совпадающей с осевой линией трубопровода:

$$\frac{p_и}{\rho g} + \alpha_1\frac{v_1^2}{2g} = -\frac{p_в}{\rho g} + \alpha_2\frac{v_2^2}{2g} + \zeta\frac{v_2^2}{2g}.$$

Полагая, что режим турбулентный, считаем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Имеем

$$\frac{p_и + p_в}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g}(1 + \zeta) - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Из уравнения постоянства расхода получим

$$v_1 \frac{\pi}{4} D^2 = v_2 \frac{\pi}{4} d^2;\ v_1 = v_2 \left(\frac{d}{D}\right)^2 = v_2 \left(\frac{25}{50}\right)^2 = 0{,}25 v_2.$$

Тогда

$$\frac{p_и + p_в}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g}(1 + \zeta - 0{,}0625) = 0{,}9975\,\frac{v_2^2}{2g},$$

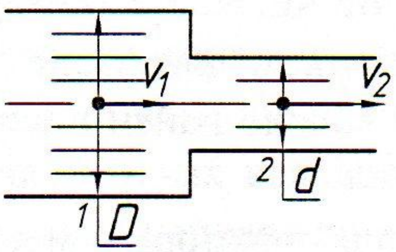
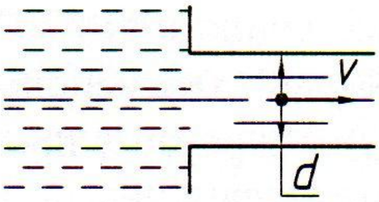
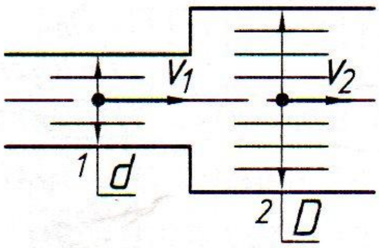
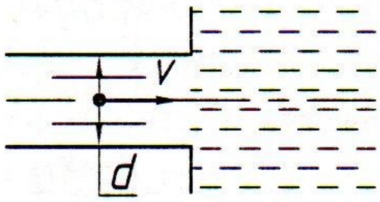
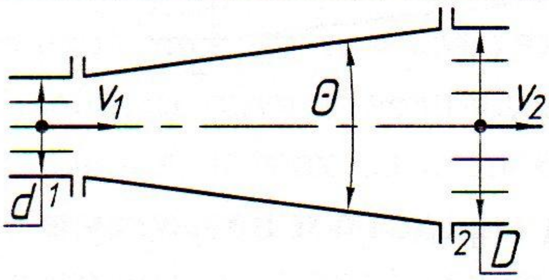
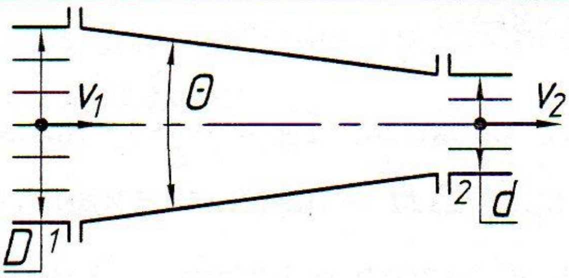
$$v_2 = \sqrt{2g\,\frac{p_и + p_в}{\rho g \cdot 0{,}9975}} = \sqrt{19{,}62\,\frac{200000 + 40000}{850 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}9975}} = 23{,}79 \text{ м/с}.$$

Искомый расход через сопло равен

$$Q = v_2 \frac{\pi}{4} d^2 = 23{,}79 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 625 \cdot 10^{-6} = 11{,}67 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с} = 11{,}67 \text{ л/с}.$$

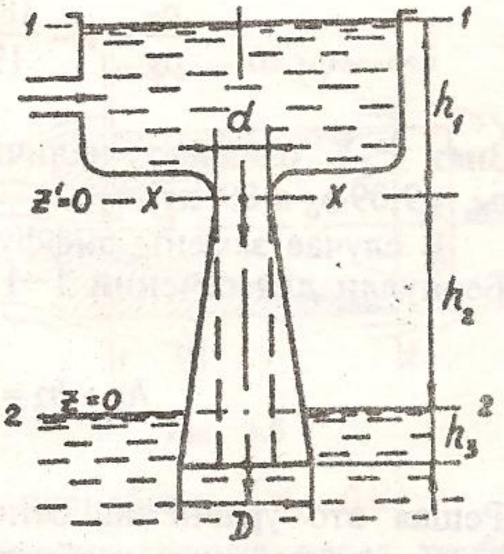
Местные сопротивления. Приборы для измерения расхода и скорости.

Расчётные формулы и значения коэффициента местного сопротивления для некоторых местных сопротивлений даны в таблице.

Вид местного сопротивления	Расчетные формулы
	Внезапное сужение $h_м = \zeta \dfrac{v_2^2}{2g}$; $\zeta = 0{,}5\left[1 - \left(\dfrac{d}{D}\right)^2\right]$
	Вход в трубу из резервуара $h_м = \zeta \dfrac{v^2}{2g}$; $\zeta = 0{,}5$
	Внезапное расширение $h_м = \dfrac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$; если $h_м = \zeta \dfrac{v_2^2}{2g}$, то $\zeta = \left[\left(\dfrac{D}{d}\right)^2 - 1\right]^2$
	Выход из трубы в резервуар $h_м = \zeta \dfrac{v^2}{2g}$; $\zeta = 1$
	Конический диффузор $h_м = \varphi_д \dfrac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$; если $\theta = 10°$, то $\varphi_д = 0{,}25$
	Конический конфузор $h_м = \zeta \dfrac{v_2^2}{2g}$; если $\dfrac{D}{d} = 2$ и $\theta = 10°$, то $\zeta = 0{,}07$

Задача № 8. Вода перетекает из верхнего открытого резервуара в нижний по диффузору, диаметры которого $d = 250$ мм и $D = 500$ мм (рис.3.3). Коэффициент сопротивления плавно сходящегося входного участка $\zeta_с = 0{,}06$, а коэффициент потерь в диффузоре $\varphi_д = 0{,}25$. Уровни в баках постоянны, а высоты $h_1 = 1$ м; $h_2 = 1{,}5$ м; $h_3 = 0{,}5$ м. Определить расход $Q_д$ через диффузор и значение давления p_x в сечении х—х. Построить график напоров.

Как изменятся расход $Q_{тр}$ и давление p'_x, если диффузор заменить цилиндрической трубой диаметром $d = 250$ мм и длиной $l = h_2 + h_3$, имеющей коэффициент сопротивления трения $\lambda = 0{,}025$? Коэффициент сопротивления трубы ζ определить по формуле $\zeta = \lambda l/d$.



Решение. Уравнение Бернулли, записанное для сечений 1—1 и 2—2 при выбранной плоскости отсчета $z = 0$, имеет вид

$$h_1 + h_2 = \zeta_с \frac{v_d^2}{2g} + \varphi_д \frac{(v_d - v_D)^2}{2g} + \zeta_{вых} \frac{v_D^2}{2g}.$$

Из уравнения постоянства расхода следует

$$v_D = v_d \left(\frac{d}{D}\right)^2 = v_d \left(\frac{250}{500}\right)^2 = 0{,}25 v_d.$$

Тогда

$$h_1 + h_2 = 0{,}06\frac{v_d^2}{2g} + 0{,}14\frac{v_d^2}{2g} + 0{,}0625\frac{v_d^2}{2g} = 0{,}2625\frac{v_d^2}{2g};$$

$$v_d = \sqrt{\frac{2g(h_1 + h_2)}{0{,}2625}} = \sqrt{\frac{19{,}62 \cdot 2{,}5}{0{,}2625}} = 13{,}67 \text{ м/с}.$$

Искомый расход через диффузор

$$Q_д = v_d \frac{\pi}{4} d^2 = 13{,}67 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}0625 = 0{,}670 \text{ м}^3/\text{с} = 670 \text{ л/с}.$$

Для определения значения давления p_x в узком сечении перед диффузором запишем уравнение Бернулли для сечений 1–1 и x–x при новой плоскости отсчета $z' = 0$:

$$h_1 = \frac{p_x}{\rho g} + \frac{v_d^2}{2g} + \zeta_c \frac{v_d^2}{2g}; \quad \frac{p_x}{\rho g} = h_1 - \frac{v_d^2}{2g}(1 + \zeta_c);$$

$$\frac{p_x}{\rho g} = 1 - \frac{186{,}87}{19{,}62} \cdot 1{,}06 = -\ 9{,}09 \text{ м.}$$

Знак "-" означает наличие вакуума в этом сечении, равного $p_{в_x} = 9{,}09 \cdot \rho g \cong 89$ кПа.

В случае замены диффузора цилиндрической трубой уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2 имеет вид

$$h_1 + h_2 = \zeta_c \frac{v_d^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v_d^2}{2g} + \zeta_{вых} \frac{v_d^2}{2g}.$$

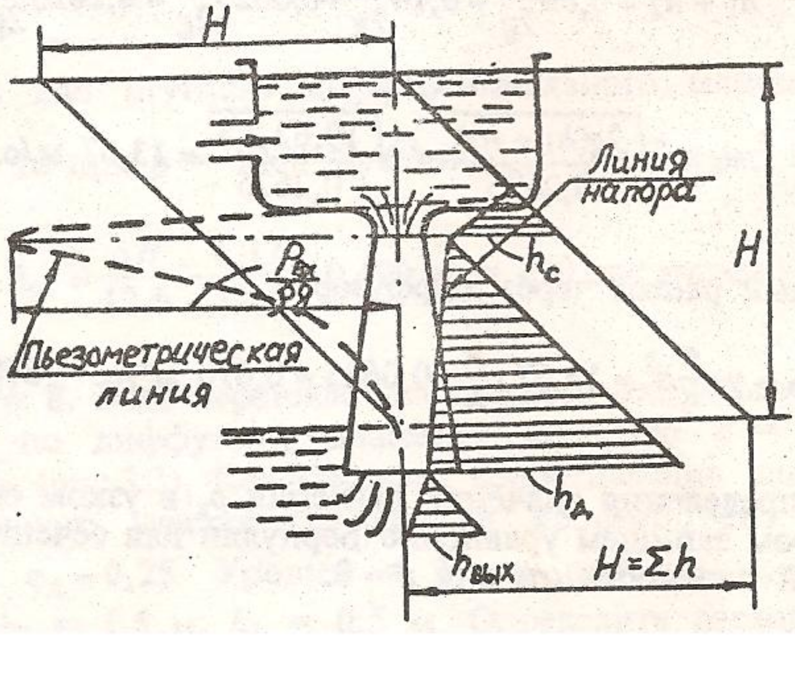
Решая это уравнение относительно v_d, получаем $v_d = 4{,}05$ м/с. Тогда расход через трубу равен

$$Q_{тр} = 6{,}24 \frac{\pi}{4} 0{,}0625 = 0{,}306 \text{ м}^3/\text{с} = 306 \text{ л/с.}$$

Следовательно, расход через диффузор больше расхода через трубу при прочих равных условиях в 2,12 раза.

Аналогичный расчет по определению давления p'_x на входе в цилиндрическую трубу приводит к результату $p_{вх} \cong 10{,}8$ кПа.

График напоров при течении жидкости через диффузор показан на рис. 3.4. Напоры в каждом сечении откладывают по горизонтали таким образом, чтобы ось трубы являлась началом отсчета пьезометрических напоров.



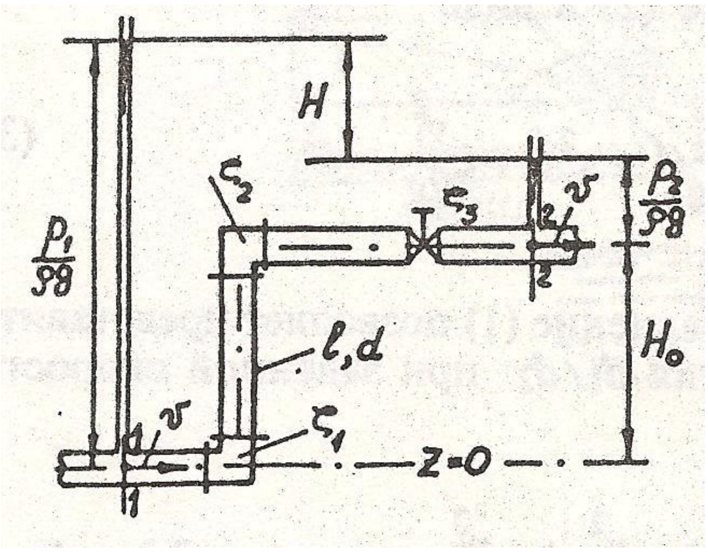
<u>Расчёт простых трубопроводов.</u>

<u>**Простым трубопроводом**</u> называется трубопровод без промежуточных ответвлений, по которому жидкость подаётся от источника гидравлической энергии к приёмному устройству.

Источниками и приёмниками в гидросистемах могут быть различные технические устройства – <u>*насосы, гидродвигатели, гидропневмоаккумуляторы, резервуары и др.*</u>

ПТ может иметь постоянный диаметр по всей длине или же может включать в себя ряд последовательно соединённых участков различного диаметра.

<u>Жидкость движется благодаря тому, что энергия ***в начале трубопровода больше, чем в конце.***</u>



Исходным при расчёте ПТ является <u>уравнение Бернулли.</u>

Так для трубопровода с постоянным диаметром ***d*** и длиной ***l*** (между сечениями (1-1) и (2-2), который имеет три мест. сопр. ζ_1, ζ_2, ζ_3 уравнение имеет вид:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\upsilon_1^2}{2g} = H_0 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{\upsilon_2^2}{2g} + \sum h_n .$$

Так как, $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon$, то получаем:

$$\frac{p_1}{\rho g} - (H_0 + \frac{p_2}{\rho g}) = \sum h_n .$$

Введя понятие располагаемого напора трубопровода - $H = \frac{p_1}{\rho g} - (H_0 + \frac{p_2}{\rho g})$,<u>*который представляет собой перепад гидростатических напопров в сечениях (1-1) и (2-2) и выражается разностью пьезометрических уровней в этих сечениях, получаем расчётное уравнение простого трубопровода:*</u>

$$H = \sum h_n ,$$

<u>т.е. раполагаемый напор затрачивается на преодоление гидравлических сопротивлений.</u>

Потери напора на трение по длине и местные потери выражаются общими формулами

$$h_{\text{тр}} = \lambda \frac{l\,v^2}{d\,2g}; \; h_{\text{м}} = \zeta \frac{v^2}{2g}.$$

Для рассмотренного выше простого трубопровода с длиной l и постоянным диаметром d уравнение (1) имеет вид

$$H = \frac{v^2}{2g}\left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta\right),$$

где $\sum \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$. Выражая скорость через расход и принимая g = 9,81 м/с^2, получаем

$$H = 0{,}0827 \frac{Q^2}{d^4}\left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta\right), \quad (2)$$

где Q — расход, м^3/с; величины H, l и d выражены в метрах.

При расчете длинных трубопроводов, в которых доминируют потери напора на трение по длине, целесообразно заменить местные сопротивления эквивалентными длинами в соответствии с соотношением $l_э = \zeta d / \lambda$. При такой замене расчетное уравнение (2) можно представить в форме, отвечающей трубопроводу без местных сопротивлений:

$$H = \lambda \frac{L\,v^2}{d\,2g} = 0{,}0827 \lambda \frac{L}{d^5} Q^2,$$

где $L = l + \sum l_э$ — приведенная длина трубопровода.

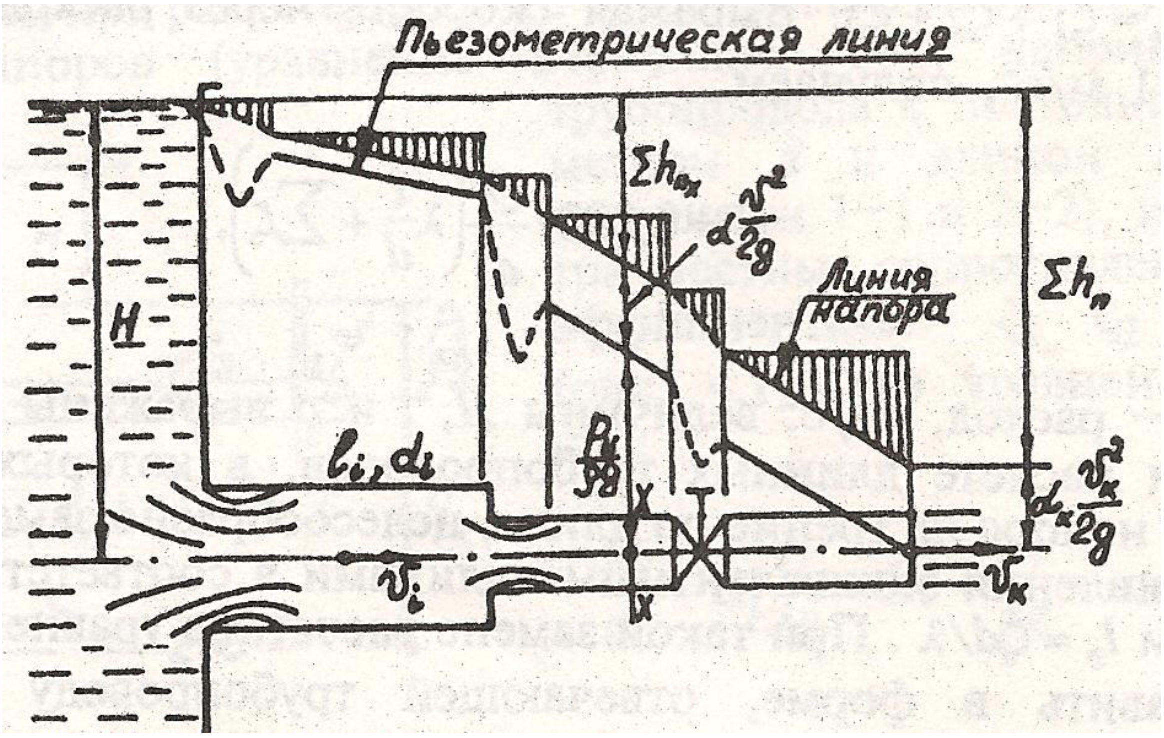
В случае, если трубопровод включает в себя n последовательных участков с различным диаметром, имеем аналогичное соотношение

$$H = 0{,}0827 Q^2 \sum_1^n \lambda_i \frac{L_i}{d_i^5}.$$

Приведённые выше расчётные зависимости являются общими для задач, соответствующих схеме «питатель-трубопровод-приёмник».

В случае **истечения жидкости от питателя через трубопровод в атмосферу** уравнение Бернулли имеет вид:

$$H = \alpha_k \frac{\upsilon_k^2}{2g} + \sum h_n ,$$



где H – располагаемый напор трубопровода, определяемый высотой (высота пьезометрического уровня в резервуаре-питателе над центром выходного сечения трубопровода);

$\alpha_k \frac{\upsilon_k^2}{2g}$ - скоростной напор в выходном сечении;

$\sum h_n$ - сумма потерь напора в трубопроводе.

Линию напора (ЛН) (удельной механической энергии потока) строят путём последовательного вычитания потерь, нарастающих вдоль потока, из начального значения напора потока (заданного пьезометрическим уровнем в питающем резервуаре).

Пьезометрическую линию (ПМЛ) (показывающую изменение гидростатического напора потока) строят путём вычитания скоростного напора в каждом сечении из полного напора потока.

Значение пьезометрического напора $\frac{p_u}{\rho g}$ в каждом сечении *(например,p_u – избыточное давление в сечении x-x)* определяется на графике, как заглубление центра сечения под пьезометрической линией, а значение скоростного напора $\alpha_k \frac{\upsilon_k^2}{2g}$ - вертикальным расположением между пьезометрической линией и линией напора.

На участках местной деформации потока, где ход изменения напоров м.б. показан только качественно, линии напора обозначаются обычно пунктиром.

Возможные варианты расчёта трубопровода сведены в таблицу. Значком «х» обозначены заданные параметры, а «?» - параметр, который нужно определить в той или иной задаче:

Номер варианта	**Параметр**		
	H	***Q***	***d, l, Δ, ν***
I	?	x	x
II	x	?	x
III	x	x	*d=?* x

Методика расчёта:

Вариант I. 1. По известным Q, d, ν находят число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{4Q}{\pi d \nu}$ и определяют режим движения жидкости.

2. В случае ламинарного режима напор H определяют как

$$H = \frac{32 L \nu v}{g d^2} = \frac{128 L Q \nu}{\pi g d^4}.$$

При турбулентном режиме напор H определяют из формул

$H = \frac{\upsilon^2}{2g}\left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta\right)$ - короткий трубопровод;

$H = \lambda \frac{L}{d}\frac{\upsilon^2}{2g} = 0{,}0827 \lambda \frac{L}{d^5} Q^2$ - длинный трубопровод с преобладающими потерями на трение.

В этих формулах по известным Re, d и Δ выбираются соответствующие - λ и ζ,.

Вариант II. 1. Определяют режим движения путём сравнения напора H с его критическим значением: $H_{кр} = \frac{32 \upsilon^2 L}{g d^3} \mathrm{Re}_{кр}$ ($\mathrm{Re}_{кр} = 2300$).

Если $H < H_{кр}$, то режим ламинарный, а если $H > H_{кр}$ – турбулентный.

2. Задачу решают методом последовательных приближений. В случае ламинарного режима расход определяют по формуле: $Q = \frac{H \pi g d^4}{128 L g d^3 \nu}$, в которой последовательными приближениями уточняются выбранные значения эквивалентных длин местных сопротивлений и приведённой длины трубопровода L.

В случае турбулентного режима в качестве первого приближения принимают квадратичную область сопротивления, в которой по известным d и Δ определяют значения λ и ζ, позволяющие найти либо v, либо Q из формул приведённых в варианте I. Подсчёт числа Re по одному из найденных параметров даёт возможность уточнить значения коэффициентов сопротивлений и определить расход во втором приближении, что часто оказывается достаточным.

Вариант III. 1. Определяют режим движения путем сравнения напора H с его критическим значением

$$H_{кр} = \frac{\pi^3 \nu^5 L}{2gQ^3} \mathrm{Re}_{кр}^4 \quad (\mathrm{Re}_{кр} = 2300).$$

Если $H < H_{кр}$, режим ламинарный, если $H > H_{кр}$ – турбулентный.

2. В случае ламинарного режима диаметр определяется по формуле

$$d = \sqrt[4]{\frac{128 L Q \nu}{\pi g H}},$$

при турбулентном режиме

$$d = \sqrt[5]{\frac{0{,}0827 \lambda L Q^2}{H}}.$$

Задача по определению диаметра трубопровода d может быть решена и графическим способом, путем построения зависимости $H = f(d)$ при $Q = \mathrm{const}$. Задавая ряд значений d, вычисляют соответствующие значения напора H из приведенных в варианте I уравнений связи между H и Q с учетом области сопротивления. Из построенного графика по заданному H определяют необходимый d. Далее следует уточнить значение H при выборе ближнего большего стандартного диаметра.

Задача № 10. Из резервуара-питателя с избыточным давлением над свободной поверхностью, равным 50 кПа по показаниям манометра M, масло (плотность $\rho = 950$ кг/м^3, коэффициент кинематической вязкости $\nu = 0{,}725$ Ст) по горизонтальной трубе с диаметром d = 30 мм и длиной l = 40 м вытекает в атмосферу. Заглубление осевой линии трубы под уровень H = 3 м. Определить расход Q. Сопротивлением входа в трубу пренебречь (рис. 4.3).

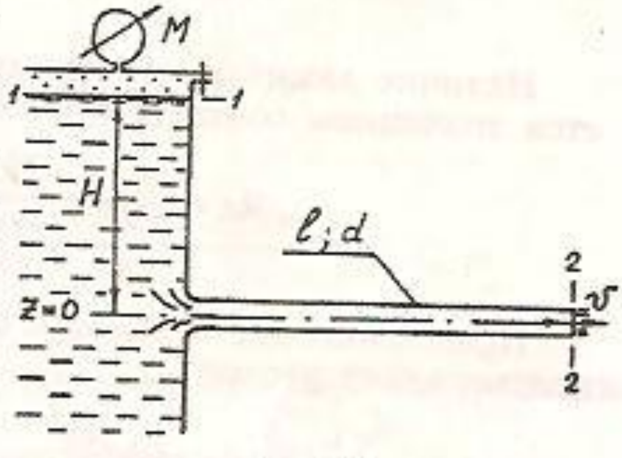


Рис. 4.3

Решение. Запишем уравнение Бернулли, в избыточной системе давлений для сечений 1–1 и 2–2:

$$H + \frac{p_и}{\rho g} = \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_п.$$

В этом уравнении коэффициент кинетической энергии α_2 и потери напора на трение $h_п$ зависят от режима движения жидкости в трубе. Режим движения может быть определен путем сравнения располагаемого напора $H_\Sigma = H + \frac{p_и}{\rho g}$ с его критическим значением $H_{кр} = \frac{32\nu^2 L}{g d^3} \mathrm{Re}_{кр}$:

$$H_\Sigma = 3 + \frac{50000}{950 \cdot 9{,}81} = 8{,}36 \text{ м};$$

$$H_{кр} = \frac{32 \cdot (0{,}725)^2 \cdot 10^{-8} \cdot 40 \cdot 2300}{9{,}81 \cdot 27 \cdot 10^{-6}} = 58{,}35 \text{ м}.$$

Так как $H_\Sigma < H_{кр}$, то режим движения жидкости ламинарный. Следовательно, в уравнении Бернулли α_2 = 2, $v_2 = v$ средняя скорость движения жидкости в трубе, потери напора на трение $h_п = \frac{32 l \nu v}{g d^2}$, тогда

$$H + \frac{p_и}{\rho g} = 2\frac{v^2}{2g} + \frac{32 l \nu v}{g d^2}.$$

Если предположить, что скоростной напор на выходе мал $\left(\alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} \cong 0\right)$, то значение скорости в соответствии с последним выражением

$$\vartheta = \left(H + \frac{p_н}{\rho g}\right)\frac{gd^2}{32lv} = \frac{8{,}36 \cdot 9{,}81 \cdot 9 \cdot 10^{-4}}{32 \cdot 40 \cdot 0{,}725 \cdot 10^{-4}} = 0{,}79 \text{ м/с}.$$

Наличие ламинарного движения жидкости в трубе подтверждается значением соответствующего числа Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{0{,}79 \cdot 0{,}03}{0{,}725 \cdot 10^{-4}} = 327 < 2300.$$

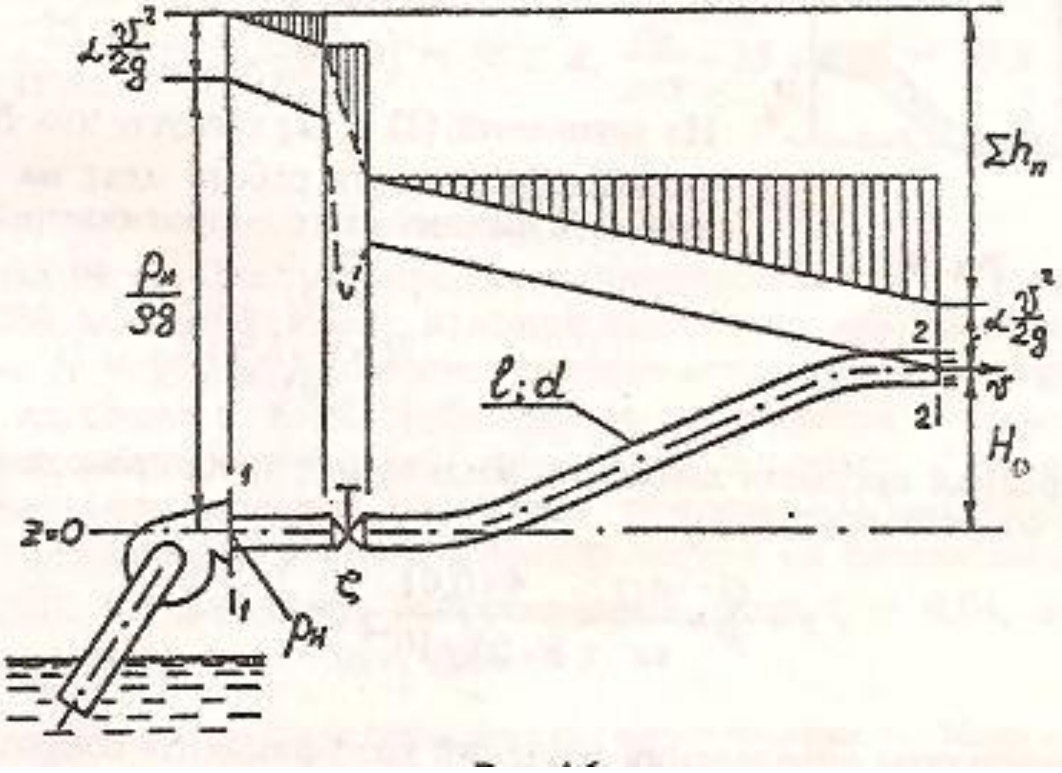
Предположение о малости скоростного напора на выходе также подтверждает расчет:

$$\alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} = 2 \cdot \frac{(0{,}79)^2}{19{,}62} = 0{,}06 \text{ м} \ll H_\Sigma = 8{,}36 \text{ м}.$$

Искомый расход равен

$$Q = v\frac{\pi}{4}d^2 = 0{,}79 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 9 \cdot 10^{-4} = 5{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с} = 0{,}56 \text{ л/с}.$$

Задача № 12. Центробежный насос должен обеспечить подачу Q = 10 л/с жидкости на отметку H_0 = 15 м по нагнетательному трубопроводу с диаметром d = 50 мм и длиной l = 50 м (рис. 4.6). Шероховатость стенок трубопровода Δ = 0,1 мм, задвижка установленная в нем, имеет коэффициент сопротивления ζ=5.



Определить давление $p_н$, создаваемое насосом на входе в нагнетательный трубопровод и обеспечивающее заданный режим работы по расходу. В трубопроводе учитывать только потери напора на трение по длине и потери на задвижке. Задачу решить в двух вариантах: 1) перекачиваемая жидкость – вода, $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, ν = 1 сСт; 2) масло, $\rho_м$ = 900 кг/м3, ν = 50 сСт.

Решение. Уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2:

$$\frac{p_н}{\rho g} + \alpha\frac{v^2}{2g} = H_o + \alpha\frac{v^2}{2g} + \sum h_п;$$

где $\sum h_п = \lambda\frac{l\,v^2}{d2g} + \zeta\frac{v^2}{2g}$, тогда

$$\frac{p_н}{\rho g} = H_o + \frac{v^2}{2g}\left(\lambda\frac{l}{d} + \zeta\right). \tag{1}$$

Разность гидростатических напоров между входным и выходным сечениями трубопровода (рис. 4.7), равная $H = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right)$,

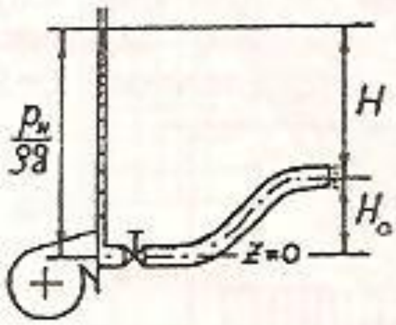


Рис. 4.7

представляет собой работу внешних сил по перемещению единицы веса перекачиваемой жидкости. Для нашего случая

$$H = \frac{p_н}{\rho g} - H_o. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что $H = \sum h_п$. Таким образом, эта работа идет на преодоление гидравлических сопротивлений:

$$H = \frac{v^2}{2g}\left(\lambda\frac{l}{d} + \zeta\right).$$

Средняя скорость движения жидкости в трубопроводе (независимо от рода жидкости):

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}01}{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 5 \text{ м/с}.$$

Результаты определения значений коэффициента сопротивления трения λ для обеих жидкостей сведены в табл. 3. По предварительно подсчитанным d/Δ и числу Re коэффициент λ может быть определен по приводимым в лекциях полуэмпирическим формулам, справочным таблицам* или найден из графика $\lambda = f(\mathrm{Re};\ d/\Delta)$ на рис. 4.5.

Таблица 3

Перекачиваемая жидкость	d/Δ	$\mathrm{Re} = vd/\nu$	λ
Вода	500	$2{,}5 \cdot 10^5$	0,0234
Масло	500	$5 \cdot 10^3$	0,0380

Следует отметить, что найденное значение $\lambda = 0{,}0234$ находится в квадратичной зоне сопротивления, а $\lambda = 0{,}038$ — в области гидравлически гладких труб.

Далее решаем задачу отдельно для каждого варианта:

1. Рабочая жидкость — вода:

$$H = \frac{25}{19{,}62}\left(0{,}0234\frac{50}{0{,}05} + 5\right) = 36{,}2\ \text{м};\ \frac{p_{\text{н}}}{\rho_{\text{в}} g} = 15 + 36{,}2 = 51{,}2\ \text{м};$$

$$p_{\text{н}} = 502\ \text{кПа}.$$

2. Рабочая жидкость — масло:

$$H = \frac{25}{19{,}62}\left(0{,}0380\frac{50}{0{,}05} + 5\right) = 54{,}8\ \text{м};\ \frac{p_{\text{н}}}{\rho_{\text{м}} g} = 15 + 54{,}8 = 69{,}8\ \text{м};$$

$$p_{\text{н}} = 616\ \text{кПа}.$$

Задача № 13. Для трубопровода с диаметром $D = 0{,}5$ м и длиной $L = 1000$ м, снабженного в конце соплом и работающего под напором $H = 400$ м, установить зависимость мощности струи на выходе из сопла и КПД трубопровода от диаметра d выходного отверстия сопла. Определить, при каком значении d мощность струи будет максимальной. Каков будет при этом КПД трубопровода $\eta_{\text{тр}}$? В трубопроводе учитывать только потери на трение по длине ($\lambda = 0{,}02$). Коэффициент сопротивления сопла $\zeta = 0{,}04$, сжатие струи на выходе отсутствует (рис. 4.8).

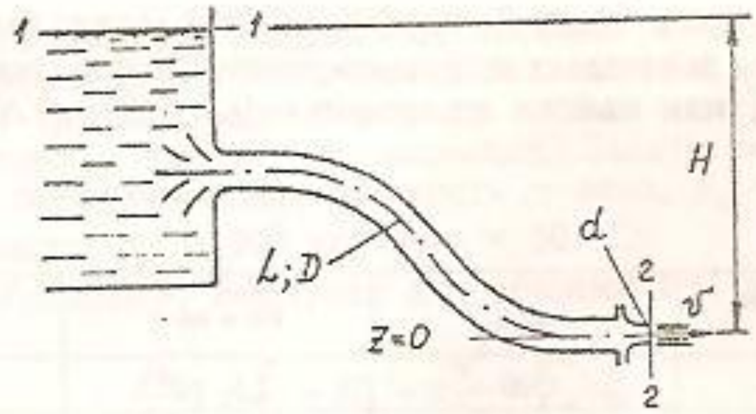


Рис. 4.8

Решение. Запишем уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2:

$$H = \alpha\frac{v^2}{2g} + \sum h_{\text{п}},$$

где $\alpha = 1$ (режим движения турбулентный), а потери напора

$$\sum h_{\text{п}} = \lambda\frac{L}{D}\frac{v_{\text{тр}}^2}{2g} + \zeta\frac{v^2}{2g}.$$

Средняя скорость движения жидкости в трубопроводе и средняя скорость течения через сопло связаны формулой $v_{\text{тр}} = v\left(\frac{d}{D}\right)^2$ (в соответствии с уравнением постоянства расхода). Подставляя последнее выражение в уравнение Бернулли, получаем:

$$H = \frac{v^2}{2g}\left[1 + \zeta + \lambda\frac{L}{D}\left(\frac{d}{D}\right)^4\right].$$

Отсюда $\frac{v^2}{2g} = \frac{H}{1 + \zeta + \lambda\frac{L}{D}\left(\frac{d}{D}\right)^4}$; $v = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{1 + \zeta + \lambda\frac{L}{D}\left(\frac{d}{D}\right)^4}}$.

Расход жидкости через сопло $Q = v \cdot f = v\frac{\pi}{4}d^2$.

Мощность струи $N = \rho Q\frac{v^2}{2} = \rho\frac{\pi}{4}d^2 v\frac{v^2}{2} =$

$$= \rho g \frac{\pi}{4} H\sqrt{2gH}\frac{d^2}{\left[1+\zeta+\lambda\frac{L}{D}\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]^{3/2}} = A\frac{d^2}{\left[1+\zeta+\lambda\frac{L}{D}\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]^{3/2}},$$

где $A = \rho g \frac{\pi}{4} H\sqrt{2gH} = \text{const}$. Введем обозначение $d^2 = x$. Тогда

$$N = A\frac{x}{\left[1+\zeta+\lambda\frac{L}{D^5}x^2\right]^{3/2}}.$$

Далее определяем значение d, при котором мощность струи будет максимальной: $\frac{dN}{dx} = 0$. Имеем

$$A\frac{\left(1+\zeta+\lambda\frac{L}{D^5}x^2\right)^{3/2} - x\frac{3}{2}\left(1+\zeta+\lambda\frac{L}{D^5}x^2\right)^{1/2}2\lambda\frac{L}{D^5}x}{\left[1+\zeta+\lambda\frac{L}{D^5}x^2\right]^3} = 0;$$

$$\left(1+\zeta+\lambda\frac{L}{D^5}x^2\right)^{3/2} - \frac{3}{2}x\left(1+\zeta+\lambda\frac{L}{D^5}x^2\right)^{1/2}2\lambda\frac{L}{D^5}x = 0;$$

$$\left(1+\zeta+\lambda\frac{L}{D^5}x^2\right)^{1/2}\left(1+\zeta+\lambda\frac{L}{D^5}x^2 - \frac{3}{2}x^2\,2\lambda\frac{L}{D^5}\right) = 0;$$

$$1+\zeta+\lambda\frac{L}{D^5}x^2 - \frac{3}{2}x^2\,2\lambda\frac{L}{D^5} = 0;$$

$$1+\zeta-2\lambda\frac{L}{D^5}x^2 = 0;$$

$$1+\zeta-2\lambda\frac{L}{D}\left(\frac{d}{D}\right)^4 = 0;$$

$$\frac{d}{D} = \sqrt[4]{\frac{1+\zeta}{2\lambda \frac{L}{D}}}.$$

Подстановка численных значений и решение последнего уравнения приводит к результату $d = 0{,}17$ м.

КПД трубопровода может быть определен как отношение скоростного напора струи на выходе из трубопровода к располагаемому перепаду гидростатистических напоров

$$\eta_{тр} = \frac{\frac{v^2}{2g}}{H} = \frac{H}{\left[1+\zeta+\lambda\frac{L}{D}\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]H} = \frac{1}{1+\zeta+\lambda\frac{L}{D}\left(\frac{d}{D}\right)^4};$$

$$\eta_{тр} = \frac{1}{1+0{,}04+0{,}02\frac{1000}{0{,}5}\left(\frac{0{,}17}{0{,}5}\right)^4} = 0{,}635 = 64\%.$$

Задача № 14. Из бака A, в котором поддерживается постоянный уровень, вода перетекает по сифонному трубопроводу (общая длина $l_1 = 20$ м, $d_1 = 40$ мм, $\lambda_1 = 0{,}0304$), имеющему приемный клапан с сеткой ($\zeta_к = 5$), в бак B, из которого сливается в атмосферу по трубопроводу ($l_2 = 100$ м, $d_2 = 60$ мм, $\lambda_2 = 0{,}0277$), включающему в себя задвижку ($\zeta = 10$) и сходящееся сопло ($d_с = 30$ мм, $\zeta_с = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}97$). Напор $H = 25$ м.

Определить: 1) расход Q в системе; 2) вакуум $p_{Вс}$ в сечении С–С, расположенном выше уровня жидкости в баке A на $h_с = 1$ м, длина восходящей линии сифонного трубопровода до сечения С–С $l_с = 6{,}5$ м. Потерями напора на плавных поворотах в трубопроводах пренебрегать (рис. 4.9).

Решение. 1. Уравнение Бернулли, записанное для сечений 1–1 и 2–2 (плоскость отсчета $z = 0$), имеет вид

$$H = h_п + \frac{v^2}{2g}(1+\zeta_с) = 0{,}0827\left[\lambda_1\frac{L_1}{d_1^5} + \lambda_2\frac{L_2}{d_2^5} + (1+\zeta_с)\frac{1}{d_с^4\varepsilon^2}\right]Q^2,$$

где v – средняя скорость струи при выходе из сопла; $\varepsilon = \frac{F_{стр}}{F_с} = \left(\frac{d_{стр}}{d_с}\right)^2 = 0,97$ – коэффициент сжатия струи; L_1 и L_2 – приведенные длины трубопроводов (местные сопротивления заменены эквивалентными длинами по соотношению $l_э = \zeta \frac{d}{\lambda}$);

$$l_{э1} = \frac{d_1}{\lambda_1}(\zeta_к + \zeta_{вых}) = \frac{0,04 \cdot 6}{0,0304} = 7,89 \text{ м};$$

$$l_{э2} = \frac{d_2}{\lambda_2}(\zeta_{вх} + \zeta) = \frac{0,06 \cdot 10,5}{0,0277} = 22,74 \text{ м};$$

$$L_1 = l_1 + l_{э1} = 20 + 7,89 = 27,89 \text{ м};$$

$$L_2 = l_2 + l_{э2} = 100 + 22,74 = 122,74 \text{ м}.$$

Подставляем численные значения:

$$25 = 0,0827\left[0,0304\frac{27,89}{(0,04)^5} + 0,0277\frac{122,74}{(0,06)^5} + (1+0,1)\frac{1}{(0,03)^4 \cdot (0,97)^2}\right]Q^2;$$

$$25 = 1165695\,Q^2.$$

Решение этого уравнения приводит к результату

$$Q = 0,0046 \text{ м}^3/\text{с} = 4,6 \text{ л/с}.$$

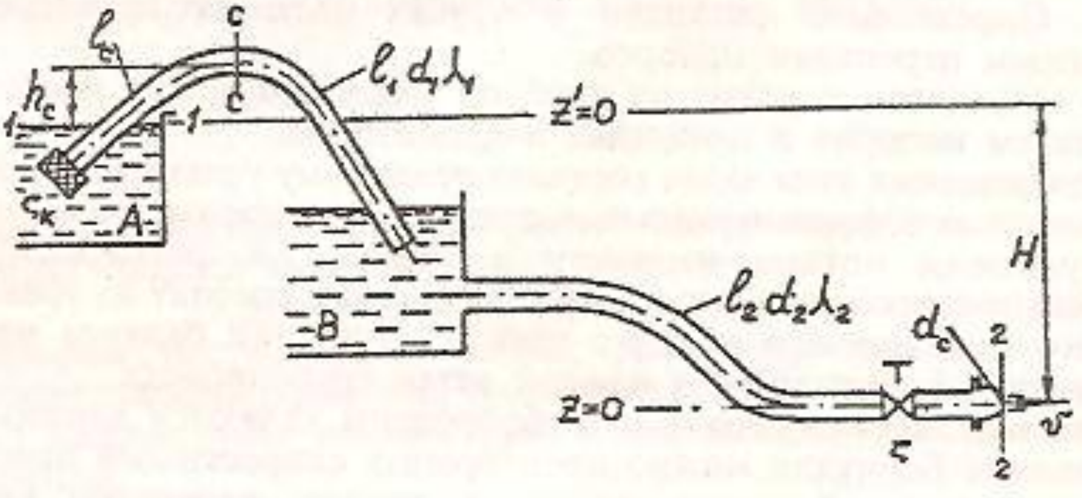


Рис. 4.9

2. Для определения вакуума $p_{вс}$ в сечении С–С, запишем уравнение Бернулли для сечений 1–1 и С–С с новой плоскостью отсчета $z' = 0$:

$$\frac{p_{вс}}{\rho g} = h_c + 0{,}0827\frac{Q^2}{d_1^4}\left[\lambda_1\frac{l_c}{d_1} + (1 + \zeta_к)\right] =$$

$$= 1 + 0{,}0827\frac{(0{,}0046)^2}{(0{,}04)^4}\left[0{,}0304\frac{6{,}5}{0{,}04} + (1 + 5)\right] = 8{,}22 \text{ м.}$$

Искомое значение вакуума равно

$$p_{вс} = 80638 \text{ Па} \cong 80{,}6 \text{кПа.}$$

Расчёт сложных трубопроводов.

К категории сложных относятся трубопроводы, имеющие разветвленные участки и состоящие из нескольких труб (ветвей). Сечения трубопровода, в которых смыкаются несколько ветвей, называют узлами. Для каждого узла может быть составлен баланс расходов. В зависимости от конструктивного исполнения разветвленных участков различают следующие основные типы сложных трубопроводов: с параллельными ветвями, с концевой раздачей жидкости, с непрерывной раздачей жидкости, а также разнообразные сложные трубопроводы комбинированного типа.

Как и при расчете простого трубопровода (см. раздел 4), можно выделить три основные группы задач расчета сложных трубопроводов:

1. Определение перепадов напоров в питателях и приемниках для обеспечения требуемых расходов в трубах заданных размеров.
2. Определение расходов в трубах заданных размеров по известным перепадам напоров.
3. Определение размеров труб по заданным в них расходам и перепадам напоров в питателях и приемниках.

Для решения этих задач составляют систему уравнений, которые устанавливают функциональные связи между параметрами, характеризующими потоки жидкости в трубах, т.е. размерами труб, расходами жидкости и напорами. Эта система состоит из уравнений баланса расходов для каждого узла и уравнений баланса напоров (уравнений Бернулли) для каждой ветви трубопровода.

Так как обычно сложные трубопроводы являются длинными, в уравнениях Бернулли можно пренебрегать скоростными напорами, принимая полный напор потока в каждом расчетном сечении трубопровода практически равным гидростатическому и выражая его высотой пьезометрического уровня над принятой плоскостью отсчета. Кроме того, в сложных трубопроводах можно также пренебрегать относительно малыми местными потерями напора в узлах. Это значительно упрощает расчеты, поскольку позволяет считать одинаковыми напоры потоков в концевых сечениях труб, примыкающих к данному узлу, и оперировать в уравнениях Бернулли понятием напора в данном узле.

Потери напора в трубах выражаются формулой

$$h_п = 0{,}0827\lambda\frac{L}{d^5}Q^2,$$

где L — приведенная длина трубы, учитывающая местные сопротивления в ней с помощью их эквивалентных длин:

$$L = l + l_э; \quad l_э = \sum\zeta\frac{d}{\lambda}.$$

Введение коэффициента $a = 0{,}0827\lambda\frac{L}{d^5}$ упрощает выше приведенную формулу, которая теперь принимает вид $h_п = aQ^2$. Такая запись удобна для составления расчетной системы уравнений и ее решения.

В случае ламинарного режима движения жидкости потери напора в трубах могут быть определены по формуле

$$h_п = \frac{128\nu L}{\pi g d^4}Q.$$

По аналогии, введя коэффициент $b = \frac{128\nu L}{\pi g d^4}$, получаем

$$h_п = bQ.$$

Конкретный вид системы расчетных уравнений и способы ее решения (общий аналитический, графический) определяются типом сложного трубопровода и характером поставленной задачи. Для получения однозначного решения система расчетных уравнений должна быть замкнутой, т.е. число независимых неизвестных в ней должно быть равно числу уравнений.

Решение составленной системы уравнений для сложного трубопровода с заданными размерами при различных постановках задач расчета удобно получать в ряде случаев графическим методом. Чтобы выполнить такое решение, прежде всего строят характеристики всех труб системы по уравнению $h_п = aQ^2$ ($h_п = bQ$). Характеристика представляет собой зависимость потерь напора в трубе от расхода. При турбулентном течении в трубе ее характеристика имеет форму параболы (квадратичный закон сопротивления), при ламинарном — прямой.

Ниже рассмотрены способы расчета нескольких видов сложных трубопроводов. В задачах предложены для анализа принципиальные схемы подачи жидкости под давлением от питателя к приемнику через сложный трубопровод с разветвленными участками. Питателями и приемниками в гидросистемах могут быть различные устройства — насосы, гидродвигатели, гидропневмоаккумуляторы, резервуары и др.

Задача № 17. Определить расходы воды Q_1, Q_2 и Q_3, поступающие под напором $H = 5$ м из открытого резервуара в баки-приемники (рис. 5.4). Трубы имеют одинаковую длину $l = 20$ м и диаметр $d = 100$ м, коэффициент сопротивления трения $\lambda = 0{,}02$. Учитывать только потери напора на трение по длине труб и потери напора в вентиле с коэффициентом сопротивления $\zeta = 12$. Задачу решить в двух вариантах: I — $\zeta = 0$; II — $\zeta = 12$.

Решение. Основные уравнения, которые применимы для обоих вариантов:

Уравнение баланса расходов для узла *K*:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3. \tag{1}$$

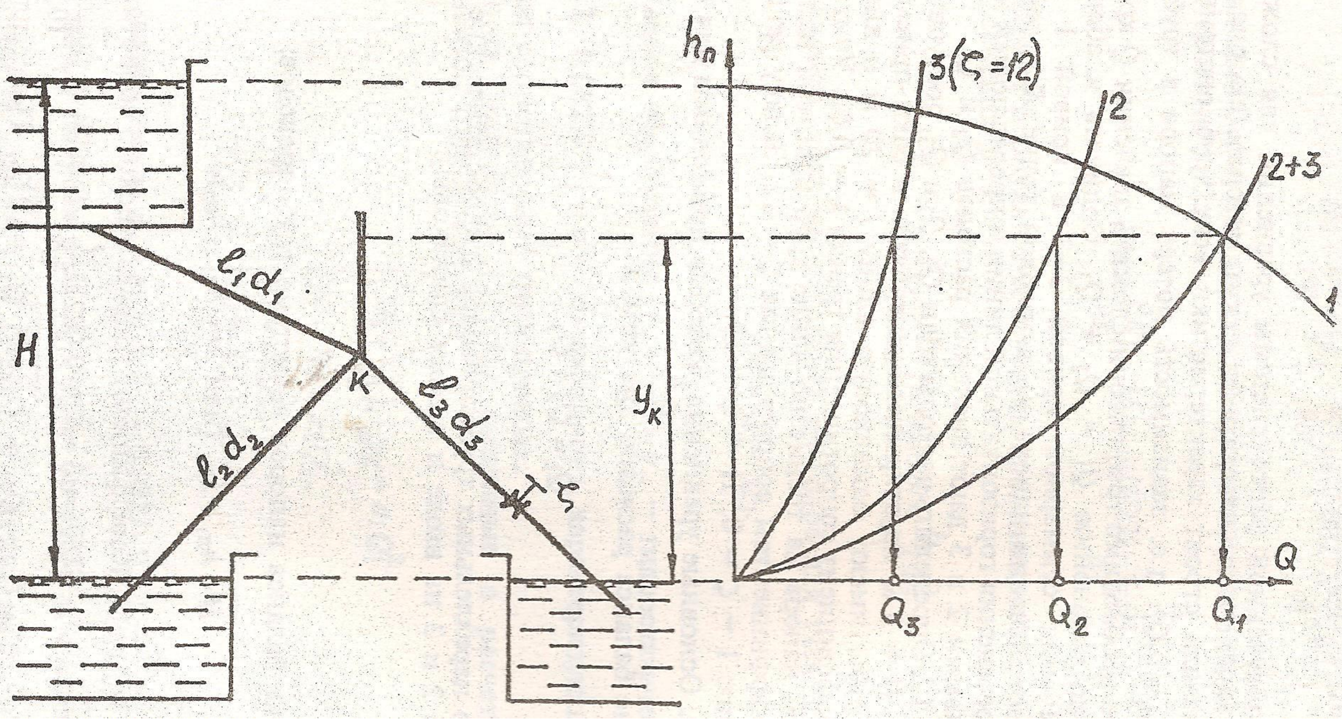
Свойство параллельных трубопроводов (гидростатические напоры для труб 2 и 3 на входе и выходе одинаковы):

$$h_{п_2} = h_{п_3}. \tag{2}$$

Уравнение баланса напоров в системе трубопроводов:

$$H = h_{п_1} + h_{п_2} \ (\text{или } H = h_{п_1} + h_{п_3}). \tag{3}$$

Вариант I ($\zeta = 0$). Коэффициент гидравлического сопротивления труб по условию $a_1 = a_2 = a_3 = a = 0{,}0827\lambda\dfrac{l}{d^5} = 0{,}0827 \cdot 0{,}02\dfrac{20}{(0{,}01)^5} =$ $= 3308$ с^2/м^5. Так как $Q_2 = Q_3$, то $Q_1 = 2Q_2$. Подставляя это выражение в уравнение (3), получим:



$$H = aQ_1^2 + a\frac{Q_1^2}{4} = \frac{5}{4}aQ_1^2; \quad Q_1 = \sqrt{\frac{4}{5}\cdot\frac{H}{a}} = \sqrt{\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3308}} = 0{,}0346 \text{ м}^3/\text{с}.$$

В итоге $Q_1 = 34{,}6$ л/с; $Q_2 = Q_3 = 17{,}3$ л/с.

Вариант II ($\zeta = 12$). Коэффициент гидравлического сопротивления для трубы 3

$$a_3 = 0{,}0827\lambda\frac{L}{d^5}, \text{ где } L = l_3 + l_{\text{экв}},$$

$$l_{\text{экв}} = d\frac{\zeta}{\lambda} = 0{,}1\frac{12}{0{,}02} = 60 \text{ м}; \; L = 20 + 60 = 80 \text{ м}.$$

$$a_3 = 13232 \text{ с}^2/\text{м}^5; \; a_1 = a_2 = a = 3308 \text{ с}^2/\text{м}^5.$$

Согласно уравнению (2) $a_2 Q_2^2 = a_3 Q_3^2$; $Q_2 = Q_3 \sqrt{\frac{a_3}{a_2}} = 2Q_3$.

Далее, используя уравнения (1) и (3), получим

$$Q_1 = Q_2 + \frac{Q_2}{2} = 1{,}5Q_2;\ H = a_1 Q_1^2 + a_2 \left(\frac{Q_1}{1{,}5}\right)^2 = \frac{3{,}25}{2{,}25} a Q_1^2;$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2{,}25}{3{,}25} \cdot \frac{H}{a}} = \sqrt{0{,}692 \cdot \frac{5}{3308}} = 0{,}0316\ \text{м}^3/\text{с}.$$

В итоге $Q_1 = 31{,}6$ л/с; $Q_2 = \frac{Q_1}{1{,}5} = 21{,}07$ л/с; $Q_3 = \frac{Q_2}{2} = 10{,}53$ л/с.

Примечание. Задача может быть также решена графическим методом после составления расчетной системы уравнений по методике, изложенной в предыдущей задаче. Система уравнений имеет вид

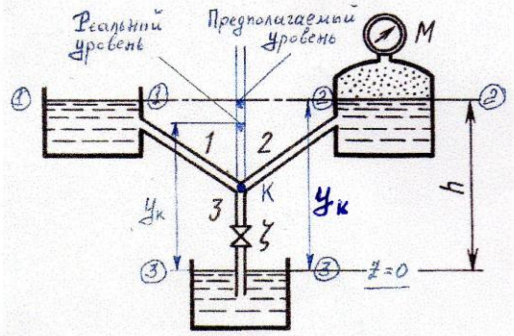
$$\begin{cases} H - y_K = a_1 Q_1^2, \\ y_K = a_2 Q_2^2, \\ y_K = a_2 Q_3^2, \\ Q_1 = Q_2 + Q_3. \end{cases}$$

Образец решения задач по сложному трубопроводу.

Задача 10.39. Определить коэффициент сопротивления ζ вентиля, при котором расход воды в трубе *3* будет $Q_3 = 9$ л/с, если трубы *1*, *2* и *3* имеют одинаковые длины $L_1 = L_2 = L_3 = 9$ м и диаметры $d_1 = d_2 = d_3 = 50$ мм ($\lambda = 0{,}025$), высота уровней в резервуарах $h = 15$ м и избыточное давление $M = 15$ кПа. Учитывать только потери напора на трение по длине труб и потерю напора в вентиле.

Указание. В данной задаче нельзя определить направление потока в трубе *1* методом ее выключения, поскольку неизвестно сопротивление трубы *3*. Следует использовать метод нулевого расхода, т. е. предположить, что при совместной работе всех трех труб расход в трубе *1* равен нулю и напор в узле равен напору в резервуаре *1*. При этом вычисляется расход Q2; сравнение этого расхода с требуемым расходом позволяет установить направление потока в трубе *1*.

Решение:



1) Предполагаем, что расход в трубе 1 равен нулю, т.е. $Q_1 = 0$.
Тогда напор в узле «К» равен напору в резервуаре 1 ($y_к = h$).
Далее, записываем уравнение Бернулли для сечения (2-2) – узел «К» и вычисляем расход Q_2, чтобы сравнить его с расходом Q_3.

$$h + \frac{p_и}{\rho g} = h + \Sigma h_{п2}; \quad \text{Тогда} \quad \frac{p_и}{\rho g} = 0{,}0827\lambda \frac{L_2}{d_2^5} Q_2^2.$$

Отсюда:

$$Q_2 = \sqrt{\frac{p_и d_2^5}{\rho g 0{,}0827 \lambda L_2}} = \sqrt{\frac{15000 \cdot 0{,}05^5}{1000 \quad 9{,}81 \quad 0{,}0827 \quad 0{,}025 \quad 9}} = 0{,}00507 (м^3/с) = 5{,}07 (л/с).$$

Так как $Q_2 = 5{,}07 (л/с) < Q_3 = 9 (л/с)$, *следовательно, резервуар 1 является питателем (т.е. $y_к < h$).*

2) Составляем систему уравнений, состоящую из уравнений Бернулли и уравнения баланса расходов:

$$\begin{cases} h = y_k + a_1 Q_1^2; & \text{- для сеч. (1-1) – узел «К»} \\ h + \dfrac{p_и}{\rho g} = y_k + a_2 Q_2^2; & \text{- для сеч. (2-2) – узел «К»} \\ y_k = a_3 Q_3^2; & \text{- для сеч. узел «К» - (3-3)} \\ Q_1 + Q_2 = Q_3; \end{cases}$$

$$a_1 = a_2 = 0{,}0827\lambda \frac{L_1}{d_1^5} = \frac{0{,}0827 \quad 0{,}025 \quad 9}{0{,}05^5} = 59544 (1/м^4); \qquad a_3 = \frac{0{,}0827}{d_3^4}\left(\lambda \frac{L_3}{d_3} + \zeta\right).$$

Из 1-го уравнения получаем: $y_k = h - a_1 Q_1^2$.

Подставив это значение «y_k» во 2-е уравнение, получим:

$$h + \frac{p_и}{\rho g} = h - a_1 Q_1^2 + a_2 Q_2^2; \quad \text{или} \quad \frac{p_и}{\rho g} = a_2 Q_2^2 - a_1 Q_1^2.$$

Из 4-го уравнения следует, что $Q_2 = Q_3 - Q_1$. Подставив это выражение в предыдущее уравнение, получим:

$$\frac{p_и}{\rho g} = a_2 (Q_3 - Q_1)^2 - a_1 Q_1^2 = a_2 Q_3^2 - 2a_2 Q_3 Q_1.$$

Отсюда находим расход Q_1:

$$Q_1 = \frac{Q_3^2 - \dfrac{p_и}{\rho g a_2}}{2Q_3} = 0{,}00308 (м^3/с) = 3{,}08 (л/с).$$

Тогда, $Q_2 = Q_3 - Q_1 = 9 - 3{,}08 = 5{,}92 (л/с)$.

Из 1-го уравнения системы: $y_k = h - a_1 Q_1^2 = 14{,}43 (м)$.

Из 3-го уравнения системы:

$$y_к = \frac{0{,}0827}{d_3^4}\left(\lambda \frac{L_3}{d_3} + \zeta\right) Q_3^2. \qquad \text{Отсюда } \zeta \text{ равно:} \quad \zeta = \frac{y_k \, d_3^4}{0{,}0827 Q_3^2} - \lambda \frac{L_3}{d_3} \approx 9$$

Остальные задачи рассмотреть самостоятельно в учебнике - Никитин О.Ф. «Гидравлика и гидропневмопривод» и методичке Шабловского А.С. (часть 2).