Случайные величины и их числовые характеристики.

Пример.1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

Решение. Дискретная случайная величина X (число отказавших элементов в одном опыте) имеет следующие возможные значения: $x_1=0$ (ни один из элементов устройства не отказал), $x_2=1$ (отказал один элемент), $x_3=2$ (отказали два элемента) и $x_4=3$ (отказали три элемента).

Отказы элементов независимы один от другого, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому применима формула Бернулли. Учитывая, что, по условию, n=3, p=0,1 (следовательно, q=1-0,1=0,9), получим:

$$P_3(0) = q^3 = 0{,}9 = 0{,}729\,; \quad P_3(1) = C_3^1 pq^2 = 3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^2 = 0{,}243\,;$$

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9 = 0{,}027\,;\ P3(3) = p3 = 0{,}13 = 0{,}001\,.$$

Контроль: $0{,}729 + 0{,}243 + 0{,}027 + 0{,}001 = 1$.

Напишем искомый биномиальный закон распределения X:

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

Пример.2. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

Решение. По условию, n=100000, p=0,0001, k=5. События, состоящие в том, что книги сброшюрованы неправильно, независимы, число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся распределением Пуассона

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k.$$

Найдем λ:

$$\lambda = np = 100000\cdot 0{,}0001 = 10.$$

Искомая вероятность

$$P_{100000}(5) = 10^5\cdot 0{,}000045/120 = 0{,}0375.$$

Пример.3. Плотность вероятности случайной величины равна

$$f(x) = ax^2e^{-kx}\ (k>0,\ 0\le x<\infty).$$

Требуется: а) найти коэффициент a; б) найти функцию распределения случайной величины X; в) вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(0, \frac{1}{k}\right)$.

Решение. а) Коэффициент *a* определяем с помощью равенства

$$\int_0^\infty ax^2 e^{-kx}\,dx = 1.$$

Отсюда

$$a = \frac{1}{\int_0^\infty x^2 e^{-kx}\,dx}.$$

Двукратным интегрированием по частям получаем

$$\int_0^\infty x^2 e^{-kx}\,dx = \frac{2}{k^3}.$$

Следовательно, $a = \frac{k^3}{2}$ и плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{k^3}{2} x^2 e^{-kx}.$$

б) Функция распределения *F(x)* случайной величины *X* определяется по формуле

$$F(x) = \int_0^x \frac{k^3}{2} x^2 e^{-kx}\,dx = 1 - \frac{k^2x^2 + 2kx + 2}{2} e^{-kx}.$$

в) Вероятность $P\left(0 < X < \frac{1}{k}\right)$ попадания случайной величины X в заданный промежуток вычисляется по формуле:

$$P\left(0 < X < \frac{1}{k}\right) = F\left(\frac{1}{k}\right) - F(0) = 1 - \frac{5}{2e} \approx 0{,}086.$$

Пример 4. В результате испытаний двух приборов (*A* и *B*) установлена вероятность появления помех, оцениваемых по трехбалльной системе (табл. 1). (В случае отсутствия помех их уровень принимается равным нулю).

Таблица 1.

Уровень помех		1	2	3
Вероятность появления помех данного уровня	Прибор *A*	0,20	0,06	0,04
	Прибор *B*	0,06	0,04	0,10

По приведенным данным выбрать лучший прибор, если лучшим является тот, который в среднем имеет меньший уровень помех.

Решение. Обозначим через *X* случайный уровень помех. Средний уровень помех для прибора *A*

$$M_A[X] = 0{,}20\cdot 1+0{,}06\cdot 2+0{,}04\cdot 3 = 0{,}44 \text{ балла}.$$

Для прибора B

$$M_B[X] = 0{,}06\cdot 1+0{,}04\cdot 2+0{,}10\cdot 3 = 0{,}44 \text{ балла}.$$

Итак, по среднему баллу оба прибора равноценны.

В качестве дополнительного критерия сравнения используем среднее квадратическое отклонение уровня помех:

$$\sigma_A = \sqrt{D_A[X]} = \sqrt{M_A\left[X^2\right] - (\bar{x}_A)^2} = \sqrt{0{,}80 - 0{,}44^2} \approx 0{,}78 \text{ балла},$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B[X]} = \sqrt{M_B\left[X^2\right] - (\bar{x}_B)^2} = \sqrt{1{,}12 - 0{,}44^2} \approx 0{,}96 \text{ балла}.$$

Таким образом, прибор *A* дает более устойчивые показания относительно средних, и, следовательно, он лучше прибора *B*.

Пример.5. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 *м* в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ=100 *м*. Найти: 1) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 *м*; 2) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

Решение. Обозначим через X суммарную ошибку измерения дальности. Ее систематическая составляющая $\bar{x}$= -50 *м*. Следовательно, плотность вероятности суммарной ошибки имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{100\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+50)^2}{20000}}.$$

1. Согласно общей формуле имеем

$$P(|X| < 150) = P(-150 < X < 150) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{150+50}{100}\right) - \Phi\left(\frac{-150+50}{100}\right)\right] = \frac{1}{2}[\Phi(2) - \Phi(-1)].$$

Интеграл вероятности является функцией нечетной, поэтому

$$\Phi(-1) = -\Phi(1).$$

Отсюда

$$P(|X| < 150) = \frac{1}{2}[\Phi(2) + \Phi(1)].$$

Из таблицы 1 находим

$$Ф(2)=0,9545,\ Ф(1)=0,6827$$

окончательно

$$P(|X| < 150) = 0,8186.$$

2) Вероятность того, что измеренная дальность не превзойдёт истинной,

$$P(-\infty < X < 0) = \frac{1}{2}[\Phi(0,5) + \Phi(\infty)].$$

Так как $\Phi(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x)=1$, а из таблицы 1 находим Ф(0,5)=0,3829, то

$$P(-\infty < X < 0)=0,6914.$$

Таблица 1.

Функция Лапласа $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

z	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,	0	797	1585	2358	3108	3829	4515	5161	5763	6319
1,	6827	7287	7699	8064	8385	8664	8904	9109	9231	9426
2,	9545	9643	9722	9786	9836	9876	9907	9931	9949	9963
3,	9973	9981	9986	9990	9993	9995	9997	9998	9999	9999

В таблице приведены значения $\Phi(z)\cdot 10^4$. В первом столбце указаны целые, а в верхней строке- десятые доли аргумента z.

Приведем также некоторые значения z, отвечающие круглым значениям функции Ф(z).

Ф(z)	0,80	0,90	0,95	0,99	0,999
z	1,2816	1,6449	1,9600	2,5758	3,2905

Задачи.

6.5.1. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задаёт студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0,9. Требуется: а) составить закон распределения случайной дискретной величины X –числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту; б) найти наивероятнейшее число k_0 заданных студенту дополнительных вопросов.

6.5.2. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету p=0,01. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью P, не меньшей, чем 0,95?

6.5.3.При каком значении a функция

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

является плотностью вероятности величины X?

Найти: а) функцию распределения случайной величины X; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (-1, 1).

6.5.4.Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид (экспоненциальный закон распределения)

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0).$$

Найти: а) вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T, б) плотность вероятности $f(t)$

6.5.5. Случайное время простоя радиоэлектронной аппаратуры в ряде случаев имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{M}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lg x - \lg x_0)^2}{2\sigma^2}} \qquad (x>0),$$

где $M=lg\ e$=0,4343… (логарифмически нормальный закон распределения).

Найти: а) моду распределения при $x_0 = 1$ и $\sigma = \sqrt{5M}$; б) функцию распределения.

6.5.6. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 *м* и среднюю квадратическую ошибку 75 *м*. Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 *м*?