СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЁ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Случайной величиной называется числовая функция $X(\omega)$, заданная на пространстве элементарных событий Ω и измеримая относительно σ-поля событий S (для любого $x \in \mathbb{R}: \{\omega: X(\omega) < x\} \in S$). Далее случайные величины будут обозначаться прописными латинскими буквами(например, *X, Y, Z*) или строчными греческими(например, ξ, η, ζ).

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ
И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЁ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Законом распределения вероятностей случайной величины называется правило, устанавливающее соответствие между значениями этой случайной величины (или множествами значений) и вероятностями того, что случайная величина примет данное значение(или попадёт в соответствующее множество).

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЁ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Функцией распределения вероятностей (или, короче, функцией распределения) случайной величины X называется функция

$$F_x\,(X) = P\{X < x\}, x \in \mathbb{R}. \qquad (3.1)$$

Под $\{X < x\}$ понимается $\{\omega : X(\omega) < x\}$, т.е. событие, состоящее в том, что случайная величина X примет значение, меньшее чем число x. Если известно, о какой случайной величине идёт речь, то индекс, обозначающий эту случайную величину, опускается: $F(x) \equiv F_X(x)$.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЁ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Как числовая функция от числового аргумента *x*, функция распределения *F*(*x*) произвольной случайной величины обладает следующими свойствами:

для любого $x \in \mathbb{R}: 0 \le F(x) \le 1$; (3.2)

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0\,; \qquad (3.3)$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1\,; \qquad (3.4)$$

F(*x*) является неубывающей функцией, т.е. для любых $(x_1 < x_2) \in \mathbb{R}$

$$F(x_1) \le F(x_2); \qquad (3.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЁ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$F(x)$ непрерывна слева, т.е. для любого

$$x \in \mathbb{R}: F(x) = F(x-0) = \lim_{\substack{z \to x \\ z < x}} F(z). \qquad (3.6)$$

Для любой случайной величины X и любых $(x_1 < x_2) \in \mathbb{R}$ вероятность попадания случайной величины X в полуинтервал $[x_1; x_2)$ можно рассчитать по формуле

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1). \qquad (3.7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЁ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

147. Доказать свойства функции распределения (3.2) – (3.6).

РЕШЕНИЕ. Для любого

$x \in \mathbb{R}: F(x) = P\{X < x\} \in [0; 1]$

по свойству ограниченности вероятности.

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} P\{X < x\} = P\{-\infty\} = P\{\emptyset\} = 0$$

по тому же свойству.

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} P\{X < x\} = P\{+\infty\} = P\{\Omega\} = 1$$

по аксиоме нормированности вероятности.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЁ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Если $x_1 < x_2$, то

$$F(x_2) = P\{X < x_2\} = P\{(X < x_1) \cup (x_1 \le X < x_2)\},$$

но поскольку события $\{X < x_1\}$ и $\{x_1 \le X < x_2\}$ – несовместны, то по аксиоме аддитивности вероятности

$$F(x_2) = P\{X < x_1\} + P\{x_1 \le X < x_2\} =$$
$$= F(x_1) + P\{x_1 \le X < x_2\} \ge F(x_1),$$

так как $P\{x_1 \le X < x_2\} \ge 0$ по аксиоме нормированности вероятности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЁ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$F\,(x-0)=\lim_{\substack{z\to x\\ z<x}}F(z)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}F\left(x-\frac{1}{n}\right)=\lim_{x\to+\infty}F\left(X<x-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(X<x-\frac{1}{n}\right)\right\}=P\{X<x\}=F(x).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЁ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

149. Функция распределения некоторой случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ cx^2, & 0 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

Найти все возможные значения параметра c.

РЕШЕНИЕ. Из условия (3.2) следует, что $cx^2 \ge 0$. При этом $0 \le x < 2$. Отсюда $0 \le c < \frac{1}{4}$. Кроме того, из условия (3.5) следует, что производная $F'(x) \ge 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЁ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Значит, $2cx \geq 0$, откуда $0 \leq c < 1$. Условия (3.3), (3.4), (3.6), очевидно, выполнены. Поэтому окончательно $0 \leq c < \frac{1}{4}$.

150. В условиях предыдущей задачи известно, что $F(x)$ непрерывна в точке $x = 2$. Найти значение постоянной c, а также $P\{X \geq 1\}$.

РЕШЕНИЕ. Из условия непрерывности функции $F(x)$ в точке $x = 2$ следует, что

$$cx^2\Big|_{x=2} = c \cdot 2^2 = 4c = 1,$$

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЁ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

откуда $c = \frac{1}{4}$.

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X < 1\} = 1 - F(1) = 1 - \left.\frac{x^2}{4}\right|_{x=1} = \frac{3}{4}.$$

151. Функция распределения некоторой случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ (x-a)^2, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

Найти значение постоянной a, а также $P\{1 \leq X < 2{,}5\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЁ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

148. Доказать формулу (3.7).

152. Определить, может ли функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{x}, & x \in [0; 1), \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

быть функцией распределения какой-либо случайной величины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЁ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

153. Пусть X и Y – независимые случайные величины, $g(x),\ \ x \in \mathbb{R}$ и $h(y),\ \ y \in \mathbb{R}$ – некоторые взаимно однозначные функции. Доказать, что случайные величины $U = g(X)$ и $V = h(Y)$ независимы.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Дискретная случайная величина X – это случайная величина, принимающая значения из конечного или счётного множества. Закон распределения дискретной случайной величины задаётся чаще всего не функцией распределения, а ***рядом распределения***, т. е. таблицей

$$\begin{array}{c|ccccc} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ \hline p & p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{array}, \qquad (3.9)$$

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

в которой $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ – расположенные по возрастанию значения дискретной случайной величины X , а $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ – отвечающие этим значениям вероятности. Число столбцов в этой таблице может быть конечным (если соответствующая случайная величина принимает конечное число значений) или бесконечным.

Очевидно, что

$$\sum_i p_i = 1. \qquad (3.10)$$

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Кривой распределения вероятностей дискретной случайной величины X называется при этом ломаная, соединяющая точки $(x_i; p_i)$ в порядке возрастания.

По ряду распределения дискретной случайной величины можно восстановить её функцию распределения, и наоборот.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Наиболее употребительной числовой характеристикой центра группирования значений случайной величины является математическое ожидание. ***Математическим ожиданием дискретной случайной величины X*** называется число

$$\mathbf{M}X = \sum_i x_i p_i \,, \tag{3.11}$$

равное средневзвешенному значению случайной величины с весами-вероятностями.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Математическое ожидание дискретной случайной величины обладает следующими свойствами (здесь X, Y – дискретные случайные величины, а $c \in \mathbb{R}$ — произвольная (неслучайная) постоянная):

$$\mathbf{M}c = c; \tag{3.12}$$

$$\mathbf{M}(cX) = c\mathbf{M}X; \tag{3.13}$$

$$\mathbf{M}(X + Y) = \mathbf{M}X + \mathbf{M}Y; \tag{3.14}$$

для независимых случайных величин X и Y

$$\mathbf{M}(XY) = \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y. \tag{3.15}$$

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Наиболее употребительной характеристикой степени вариации значений случайной величины (произвольной, не обязательно дискретной) вокруг центра группирования является дисперсия.

Дисперсией случайной величины X называется число

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2, \qquad (3.16)$$

равное математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания.

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Для вычисления дисперсии иногда проще использовать формулу

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X^2) - (\mathbf{M}X)^2. \qquad (3.17)$$

Для дискретных случайных величин формулы (3.16) и (3.17) принимают вид

$$\mathbf{D}X = \sum_i (x_i - \mathbf{M}X)^2 p_i\,; \qquad (3.18)$$

$$\mathbf{D}X = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbf{M}X)^2\,. \qquad (3.19)$$

соответственно.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Дисперсия дискретной случайной величины обладает следующими свойствами:

$$\mathbf{D}c = 0; \qquad (3.20)$$

$$\mathbf{D}(cX) = c^2\mathbf{D}X; \qquad (3.21)$$

для независимых случайных величин X и Y

$$\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y. \qquad (3.22)$$

Средним квадратичным отклонением (или ***стандартным отклонением***) ***случайной величины X*** называется неотрицательное значение квадратного корня из дисперсии:

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

$$\sigma_X = +\sqrt{\mathbf{D}X}. \tag{3.23}$$

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени.

Поток событий называется ***стационарным***, если его вероятностные характеристики не зависят от времени (более строго, если вероятность того, что за время Δt наступит ровно k событий, не зависит от начала отсчёта промежутка Δt, а зависит только от его длины).

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Поток событий называется *ординарным*, если за малый промежуток времени Δt наступление двух или более событий маловероятно (т.е. если вероятность наступления двух или более событий за малый промежуток времени Δt пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события за этот промежуток).

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Поток событий называется ***потоком с отсутствием последействия***, если будущее наступление событий не зависит от того, как они наступали в прошлом (т.е. если вероятность наступления k событий в любом промежутке времени не зависит от того, сколько событий уже наступило к началу этого промежутка, и в какие моменты времени они наступили).

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Поток событий называется *простейшим*, если он обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия.

Интенсивностью потока μ называется среднее число событий, наступающих в единицу времени.

Наиболее часто встречающиеся законы распределения дискретных случайных величин приведены в табл. 3.1.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Таблица 3.1

Основные законы распределения дискретных случайных величин

Название закона распределения	Краткое обозначение закона	Обозначение случайной величины, механизм её формирования и обозначения параметров закона	Формула закона распределения	Выражение математического ожидания и дисперсии через параметры закона
альтерна-тивный	$X \sim$ A(n; p)	X =1 означает успех в единичном испытании (с вероятностью p), X=0 – неудачу (с вероятностью (1−p))	$P\{X = 1\} = p$ $P\{X = 0\} = 1 - p$	$MX = p$ $DX = p(1 - p)$

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ
И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Таблица 3.1

Основные законы распределения дискретных случайных величин

Название закона распределения	Краткое обозначение закона	Обозначение случайной величины, механизм её формирования и обозначения параметров закона	Формула закона распределения	Выражение математического ожидания и дисперсии через параметры закона
биноми-альный	$X \sim \mathrm{Bi}(n;\, p)$	X — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью p успеха в единичном испытании	$P\{X = x\} =$ $= C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$ $x = 0,1,2,\ldots,n$	$MX = np$ $DX = np(1-p)$

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Таблица 3.1

Основные законы распределения дискретных случайных величин

Название закона распределения	Краткое обозначение закона	Обозначение случайной величины, механизм её формирования и обозначения параметров закона	Формула закона распределения	Выражение математического ожидания и дисперсии через параметры закона
геометрический	$X \sim \mathrm{G}(p)$	X — число испытаний Бернулли, которые придётся произвести до первого успеха	$P\{X = x\} = p(1-p)^{x-1}$, $x = 0,1,2,\ldots$	$MX = \frac{1}{p}$ $DX = \frac{1-p}{p^2}$

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Таблица 3.1

Основные законы распределения дискретных случайных величин

Название закона распределения	Краткое обозна-чение закона	Обозначение случай-ной величины, меха-низм её формирования и обозначения параметров закона	Формула закона распределения	Выражение математического ожидания и дисперсии через параметры закона
Пуассона	$X \sim П(\lambda)$	1. X – число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью p успеха в единичном испытании, когда n велико (несколько десятков или более), а $\lambda=np<10$.	$P\{X=x\}= =p(1-p)^{x-1}$ $x=0,1,2,\ldots$	$MX=\frac{1}{p}$ $DX=\frac{1-p}{p^2}$

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Таблица 3.1

Основные законы распределения дискретных случайных величин

Название закона распределения	Краткое обозначение закона	Обозначение случайной величины, механизм её формирования и обозначения параметров закона	Формула закона распределения	Выражение математического ожидания и дисперсии через параметры закона
Пуассона	$X \sim П(\mu t)$	2. X – число наступлений события простейшего потока с интенсивностью μ за время t	$P\{X = x\} = \frac{(\mu t)^x}{x!} e^{-\mu t}$, $x = 0,1,2,\ldots$	$MX = DX = \mu t$

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Способы задания и числовые характеристики дискретных случайных величин

154. Дан ряд распределения (3.9) дискретной случайной величины X. Построить её функцию распределения.

155. Доказать, что функция распределения дискретной случайной величины является ступенчатой (кусочно-постоянной).

156. Дана функция распределения $F(X)$ дискретной случайной величины X. Построить её ряд распределения.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

157. Доказать, что для дискретных случайных величин X и Y условие независимости (3.8) эквивалентно следующему условию:

$$\boldsymbol{P}\{(X = x) \cap (Y = y)\} = \boldsymbol{P}\{X = x\}\boldsymbol{P}\{Y = y\}.$$

158. В лотерее на каждые 100 билетов приходится 15 выигрышей. Количество и размеры выигрышей таковы:

Размер выигрыша, руб.	2000	500	100
Количество билетов	1	4	10.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Случайная величина X описывает размер выигрыша на один случайно выбранный билет. Составить ряд распределения случайной величины X. Построить кривую распределения вероятностей. Найти функцию распределения $F_X(x)$ и построить её график. Найти $\boldsymbol{P}\{X < 500\}, \boldsymbol{P}\{X < 2100\}$, $\boldsymbol{P}\{-100 < X \leq 1000\}$, средний выигрыш на один билет и дисперсию выигрыша.

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

159. В результате анализа счетов 400 инвесторов на фондовой бирже получена следующая информация о количестве сделок за последний месяц:

X, количество сделок	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество инвесторов	146	97	73	34	23	10	6	3	4	2	2

Определить вероятности того, что случайно выбранный инвестор произвёл: а) ноль сделок; б) по крайней мере, одну сделку; в) более пяти сделок; г) менее шести сделок.

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

161. Банк выдал ссуду в 510000 руб. под 10% годовых сроком на один год под залог дома клиента. В случае, если дом сгорит, разрушится и т.п. (т.е. произойдёт страховой случай), клиент ничего не вернёт банку, поэтому для уменьшения риска банк обязал клиента приобрести страховой полис на 500000 руб., заплатив за него 10000 руб. Дом был оценён экспертами страховой компании в 500000 руб., а вероятность наступления страхового случая с таким домом в течение года – в 0,001. Составить ряды распределения дохода банка $X_б$ и дохода страховой компании $X_{с/к}$ за год. Найти ожидаемые доходы банка и страховой компании.

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

160. В условиях задачи 159 найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа сделок.

162. Клиент должен вернуть банку кредит до сегодняшнего дня. Неделю назад он отправил денежный перевод из другого города, который до сих пор не дошёл. Время *T* прибытия денег оценивается клиентом так:

T	1	2	3	4	5
p	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

За каждый день опоздания возврата кредита клиент должен выплатить банку 3% от его суммы (проценты простые). Есть возможность обратиться к частному детективу, который обязуется за 5% от суммы разыскать её в течение дня. Определить, что клиенту выгоднее – обратиться к детективу или ждать прихода денег.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

163. Вечером Пете понадобилось обменять валюту. Он знает, что из трёх пунктов обмена валюты, расположенных поблизости, в это время работает лишь один, но не помнит, какой именно. Составить ряд распределения числа N обменных пунктов, которые придётся посетить Пете, если считать, что каждый из пунктов может работать с вероятностью $^1/_3$. Оценить ожидаемое время T, которое Петя потратит на обмен валюты, если на каждое посещение уходит полчаса.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

164. Инвестор рассматривает четыре операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 с рядами распределения

Q_1	-5	0	5	10
p	0,1	0,2	0,5	0,2

Q_2	-5	0	5
p	0,1	0,4	0,5

Q_3	-5	0	5	10
p	0,4	0,1	0,1	0,4

Q_4	-5	0	5
p	0,1	0,7	0,2

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Найти ***ожидаемые эффективности операций*** $\overline{Q_i} = \boldsymbol{M}Q_i$ и ***риски операций*** $r_i = \sqrt{\boldsymbol{D}Q_i}, \;\; i = 1,2,3,4$. Нанести точки $(\overline{Q_i}; r_i)$ на единый рисунок. Определить операции, ***оптимальные по Парето***.

Пояснение. Операция i *доминирует* операцию j, если $\overline{Q_i} \geq \overline{Q_j}, r_i \leq r_j$ и хотя бы одно из этих неравенств строгое. Операция i называется ***оптимальной по Парето***, если не существует операций, которые бы ее доминировали.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

166. Инвестор рассматривает три операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами Q_1, Q_2, и Q_3 с рядами распределения

Q_1	-5	0	5	10
p	0,1	0,2	0,5	0,2

Q_1	-5	0	5	10
p	0,3	0,2	0,1	0,4

Q_1	-5	0	5	10
p	0,1	0,2	0,6	0,1

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Найти ожидаемые эффективности и риски операций. Нанести точки $(Q_i;r_i)$ на единый рисунок. Определить операции, оптимальные по Парето. С помощью взвешивающей формулы $E(Q,r)=\gamma Q-r$, в которой положить коэффициент склонности инвестора к риску $\gamma=2$, определить лучшую и худшую операции (операция i лучше операции j, если $E(\overline{Q_i},r_i)>E(\overline{Q_j},r_j)$).

Предложить какое-нибудь значение γ , при котором лучшая и худшая операции будут другими.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

167. Независимые случайные величины X и Y имеют распределения

X	-1	0	1
p	0,1	0,1	?

X	-2	2
p	?	0,7

здесь знаком «?» отмечены неизвестные вероятности.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Найти **M***X*, **M***Y*, **D***X*, **D***Y*. Составить ряд распределения случайной величины $Z = X + Y$, найти **M***Z* и **D***Z* , убедиться в справедливости (3.14) и (3.22). Составить ряд распределения случайной величины $V = XY$, найти **M***V* и **D***V*, убедиться в справедливости (3.15). Составить ряд распределения случайной величины $W = \min\{0, X\}$, найти **M***W* и **D***W* .

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ
И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

168. Случайная величина X принимает значения 7; 9; 10; 11 и 13 (каждое с вероятностью $^1/_5$), а случайная величина Y принимает значения 22; 24; 25; 26; 28 (также каждое с вероятностью $^1/_5$). Найти **D***X* и **D***Y*, проверить, выполняется ли

равенство $\boldsymbol{D}Y = \boldsymbol{D}X$.

169. Привести пример зависимых случайных величин, для которых формула (3.15) несправедлива.

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

170. Выразить **D**(XY) для независимых случайных величин X и Y через **M**X, **M**Y, **M**X^2 , **M**Y^2.

171. Доказать, что для независимых случайных величин X и Y $\boldsymbol{D}(XY) \geq \boldsymbol{D}X \cdot \boldsymbol{D}Y$.

172. Случайные величины X и Y распределены одинаково:

,

, , , ,

X Y

p