МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И.ЛЕНИНА (ИГЭУ)

Кафедра «Электрические системы»

В.К. Слышалов

Основы расчета надежности систем электроснабжения

Конспект лекций

для студентов специальностей 140205 и 140211 факультета заочного обучения

Иваново 2012

УДК 621.311.019.3
С 47

Слышалов В.К. Основы расчета надежности систем электроснабжения: учеб. пособие / ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет им. В.И.Ленина». – Иваново, 2012. – 80 с.

Систематизировано излагаются основы теории надежности и методы расчета показателей надежности применительно к задачам электроснабжения.

Пособие предназначено для студентов специальностей 140205 и 140211, а также может быть полезно студентам других электротехнических специальностей при выполнении курсовых и дипломных проектов.

Табл. 6. Ил. 30. Библиогр.: 12 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета ГОУВПО «Ивановский государственный университет имени В.И. Ленина».

Научный редактор Шульпин А.А.

Рецензенты:

канд.техн.наук, профессор Белов В.И. (ИГАСУ),
канд.техн.наук, профессор Бушуева О.А. (ИГЭУ)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Интуитивный, обиходный смысл понятия *надежность* не требует пояснений и не вызывает споров – надежными, как известно, являются люди или устройства, которые никогда или почти никогда не подводят, т.е. люди не нарушают обещаний, а агрегаты не ломаются и выполняют исправно свои функции.

Следует подчеркнуть, что исправность, как одно из свойств надежности, не является абсолютной, и мы говорим о ней, используя в качестве меры оборот «почти никогда не…», т.к. нарушения и отклонения в работе могут возникать в силу множества непредсказуемых причин, т.е. случайно, и надежность, таким образом, имеет вероятностный характер.

Научное знание отличается от интуитивного наличием четких определений и числовых характеристик. Согласно принятому в современной терминологии определению, «надежность − это свойство объекта выполнять заданные функции в заданном объеме при определенных условиях функционирования».

В электроэнергетике, и электроснабжении в частности, надежность понимается как задача обеспечения потребителей электроэнергией в необходимом количестве и надлежащего качества. Напомним, что требования к качеству электрической энергии устанавливает ГОСТ 13109-87 путем введения показателей качества электроэнергии (ПКЭ): отклонения напряжения, размах изменения напряжения, доза колебаний напряжения, коэффициент несинусоидальности кривой напряжения, коэффициент υ-й гармонической составляющей, коэффициент обратной последовательности напряжения, коэффициент нулевой последовательности напряжения, отклонение частоты [1] .

Количественно надежность можно определить как вероятность того, что объект (элемент, устройство, система) будет в полном объеме выполнять свои функции в течение заданного промежутка времени при заданных условиях работы. Таким образом, в качестве меры надежности выступает математическая категория – вероятность – и соответственно для исследований в области надежности используются теория вероятностей и математическая статистика, теория случайных процессов, теория массового обслуживания, математическая логика, теория графов, теория оптимизации, теория экспертных оценок, теория больших систем. Задачи применения этого математического аппарата заключается в следующем:

- определение закономерностей, которым подчиняются отказы в работе оборудования;
- разработка способов измерения надежности и методов ее расчета;
- разработка методики испытаний на надежность;
- поиск средств повышения надежности.

В итоге должны быть получены количественные характеристики надежности и это, согласно известному постулату Д.И. Менделеева: «Наука начинается там, где начинается измерение», будет означать становление науки о надежности для данной области техники. На этом этапе научного знания, т.е. в периоде становления, находится проблема надежности в энергетике и электроснабжении. Многое уже сделано, хотя еще не устоялось, не стало классикой, но много и неясных, неисследованных, непроработанных вопросов. Нет фундаментальных, системообразующих трудов, хотя существуют технические характеристики надежности, критерии, нормы и нормативные документы.

Возвращаясь к оценке надежности на основе вероятности безотказного функционирования объекта в заданном интервале времени, заметим, что такая оценка применима только к неремонтируемым объектам, которые при отказе утилизируются и заменяются новыми (электрические лампочки, плавкие предохранители, изоляторы и т.п.). Большинство же энергетических объектов относится к классу устройств, которые ремонтируются после отказов и снова вводятся в эксплуатацию, и так вплоть до наступления так называемого предельного состояния, когда ремонт или восстановление после отказа (аварии) становятся экономически невыгодными. Показателем надежности для них является готовность – вероятность того, что устройство не будет находиться в состоянии отказа в случайно выбранный момент времени.

Готовность ремонтируемого устройства – восстанавливаемого объекта – это доля времени, когда устройство работает или готово к работе в том временном интервале, для которого готовность оценивается. Следовательно, нельзя оценить надежность объекта, не уточнив условий его эксплуатации.

В общем случае надежность является сложным комплексным свойством, которое в зависимости от назначения объекта и условий его эксплуатации может включать в себя следующие составляющие:

- безотказность – непрерывное сохранение работоспособности в течение некоторого интервала времени;
- долговечность – сохранение работоспособности до наступления состояния, когда эксплуатация объекта при установленной системе техобслуживания и ремонтов становится невозможной;
- ремонтопригодность – приспособленность к ликвидации последствий отказов, повреждений объекта путем проведения мероприятий по его восстановлению;
- живучесть – способность противостоять крупным возмущениям (нарушения типа стихийных бедствий), не допуская их каскадного развития с массовым нарушением электроснабжения потребителей;
- безопасность – способность не создавать ситуаций, опасных для людей и окружающей среды;
- некоторые частные свойства, например устойчивость и режимная управляемость, а также определенные комбинации перечисленных составляющих, например оперативная готовность.

Как уже отмечалось, основная задача электроэнергетики – снабжение потребителей электроэнергией в нужном количестве и надлежащем качестве. Как бы аккуратно, тщательно и предусмотрительно ни проектировались, ни строились, ни эксплуатировались системы электроснабжения, целый ряд случайных непредвиденных причин может либо прекратить подачу электроэнергии потребителям, либо недопустимо снизить ее качество. Поэтому мало дать определение надежности и научиться ее оценивать, необходимо еще разработать и использовать средства обеспечения надежности. Таковыми являются резервирование, техническое обслуживание, ремонт и управление процессами производства, передачи и распределения электроэнергии [2].

Резервирование можно определить как повышение надежности введением избыточности. Резервирование, в свою очередь, подразделяется на структурное, функциональное, временное и информационное.

Структурное резервирование – использование избыточных элементов структуры объекта, например установка вторых трансформаторов на подстанциях, сооружение вторых цепей и т.д.

Функциональное резервирование – использование способности элементов, систем, устройств выполнять дополнительные функции, например резервировать отказы генераторов на станциях работой межсистемных ЛЭП.

Временное резервирование – использование избыточного времени в графике работы оборудования.

Информационное резервирование – использование избыточных и дублирующих информационных каналов.

Техническое обслуживание – обеспечение надежности путем выполнения комплекса мероприятий для поддержания работоспособности объекта (систематическое диагностирование, поддержание режимов работы и т.п.). Техническими средствами обеспечения надежности являются: релейная защита (РЗ), автоматическое повторное включение (АПВ), автоматический ввод резерва (АВР), автоматическое регулирование возбуждение (АРВ), автоматическая частотная разгрузка (АЧР), автоматическое регулирование частоты и мощности (АРЧМ), автоматическая синхронизация генераторов, система автоматического отключения нагрузки (САОН).

Ремонт – обеспечение надежности путем выполнения комплекса работ для восстановления работоспособности объекта. Система ремонтов включает в себя предупредительные (текущие, расширенные текущие, капитальные) и аварийные ремонты.

Управление процессами производства, передачи и распределения энергии – обеспечение надежности путем создания системы управления оптимальной по критериям и показателям надежности.

Экономические аспекты надежности определяются зависимостью нормального функционирования жилищных, промышленных и сельскохозяйственных комплексов от снабжения электроэнергией, в силу чего нарушение систем и каналов электроснабжения приводит к экономическому ущербу, соизмеримому в ряде случаев с национальным бедствием. Так, авария в Нью-Йорке (ноябрь, 1965 г.) привела к тому, что территория с населением около 30 млн человек более чем на 10 часов осталась без электроэнергии; ущерб составил около 100 млн долларов. 13 июля 1977 г. новая авария в Нью-Йорке на 25 часов парализовала жизнь в городе – ущерб около 1 млрд долларов; авария энергосистемы Канады в 1989 г., вызванная магнитной бурей, на 9 часов лишила энергоснабжения провинцию Квебек. Эти примеры дают представление о возможных масштабах бедствий, связанных с отказами электроснабжающих систем, и делают очевидной актуальность проблемы надежности и необходимость ее всемерного повышения. Однако повышение надежности требует значительных затрат, поскольку пути ее повышения, например резервирование генераторов, систем передачи и распределения энергии, увеличение пропускной способности ЛЭП, трансформаторов, подстанций, являются весьма дорогостоящими. Существенно то, что зависимость степени надежности электроснабжения от затрат на ее повышение является нелинейной и по мере приближения надежности к 100 % затраты возрастают до бесконечности. Таким образом, абсолютная надежность является абстракцией, идеалом, достижение которого в реальной жизни по ряду причин, в том числе технических, неосуществимо. Следствием этого является тот факт, что ни одно техническое устройство, прибор или система не могут быть абсолютно надежными, и в каждом конкретном случае вопрос о требуемом уровне надежности должен решаться совместно с вопросом о стоимости его реального достижения. Надежность выступает здесь как экономическая категория, количественная оценка которой находится при решении задачи оптимизации, соотносящей затраты на повышение надежности электроснабжения конкретного потребителя с ущербом, нанесенным перерывом в электроснабжении, расходами на аварийный ремонт, оплатой недоотпуска продукции и прочими потерями потребителя.

Задачи и практические приложения теории надежности в электроэнергетике обусловлены необходимостью:

1) сравнивать виды оборудования по надежности;
2) устанавливать нормативы установок и систем по надежности их элементов;
3) оптимизировать величину резерва и структуру технических объектов;
4) выявлять наименее надежные элементы оборудования, установок, систем;
5) оценивать предельные сроки службы оборудования.

Перечисленные задачи, а также ряд других являются сферой деятельности лабораторий, отделов, бюро, групп по исследованию надежности на предприятиях, в проектных, научно-исследовательских и эксплуатационных организациях и могут быть условно разделены на теоретико-прикладные и сугубо практические. В задачах первой группы основой исследований является разработка математических моделей взаимосвязи отказов и восстановлений оборудования и систем (потоков отказов и восстановлений), установление критериев надежности на их основе и выработка предложений по установлению уровня и меры надежности. При решении задач второй группы проводятся: статистическая оценка и анализ надежности действующего оборудования и установок, испытания на надежность, нормирование уровня надежности, оптимизация технических решений по обеспечению надежности, экономическая оценка надежности и для других задач. Основой для их решения наряду с теорией надежности являются «Правила устройства электроустановок» (ПУЭ), руководящие указания, нормативные и директивные документы.

Целью настоящего пособия является изложение основ теории надежности применительно к проблемам и задачам электроснабжения, причем предпочтение отдано расширенному охвату и изложению материала с тем, чтобы восполнить отсутствие учебной литературы по дисциплине «Надежность электроснабжения», дать студентам электроэнергетических специальностей целостное, объемное представление о проблеме надежности в электроэнергетике и по возможности объединить разнородный учебный материал, содержащийся в литературных источниках [2÷6]. Материал пособия разбит на три раздела, соответствующих изложенным положениям и задачам.

Раздел первый является вводным и содержит определения понятий, характеристик и показателей надежности.

Раздел второй посвящен рассмотрению теорем теории вероятностей, законов распределения случайных величин и случайных процессов в применении к проблеме надежности в электроэнергетике и электроснабжении.

Раздел третий содержит изложение методов определения показателей надежности и описание математических моделей для оценки надежности.

Введение и разделы 1, 2 подготовлены д-ром техн. наук, проф. Слышаловым В.К., раздел 3 д-ром техн. наук, проф. Слышаловым В.К. и канд. техн. наук Тышкевичем И.В. Редактирование пособия в целом выполнено д-ром техн. наук, проф. Слышаловым В.К.

1. Основные понятия, характеристики и показатели надежности в электроэнергетике и электроснабжении

Рассматривая понятие *надежность*, приходится оперировать такими соподчиненными понятиями, как *элемент, система, объект.*

Под *системой* вообще понимается совокупность взаимосвязанных устройств, которая предназначена для самостоятельного выполнения заданных функций. Электроэнергетическая система, в частности, – это совокупность электрических станций, электрических сетей, узлов потребления, объединенных процессом преобразования, передачи и распределения электрической энергии.

Отдельные части, на которые можно подразделить систему, представляют собой законченные устройства, способные самостоятельно выполнять некоторые локальные функции в системе. Они называются *элементами* (генераторы, трансформаторы, линии и т.д. в электрической системе). Каждый из этих элементов также можно рассматривать как систему (ЛЭП имеет в качестве элементов опоры, изоляторы, провода, защитные тросы, заземлители и т.д.), т.е. деление на систему и элемент – условное, определяемое постановкой задачи.

Там, где нет необходимости подчеркивать свойства, присущие только системам или только элементам, будем говорить об *объектах*. В качестве объекта могут рассматриваться система, ее подсистема, элемент.

Если система или элемент (*объект*) выполняет заданные функции, будем говорить, что они находятся *в работоспособном состоянии*, если же происходит полная или частичная утрата способности к выполнению заданных функций, то будем говорить о *состоянии отказа* или просто об *отказе*, различая в случае необходимости полные и частичные отказы, внезапные и постепенные, независимые и зависимые, устойчивые и сбои, а также отказ срабатывания, ложное срабатывание, излишнее срабатывание и т.д.

Все объекты при рассмотрении вопросов надежности принято разделять на *восстанавливаемые и невосстанавливаемые* (см. введение). Характеристикой эксплуатационных свойств объекта является наработка, представляющая из себя *только продолжительность работы или только объем выполненной объектом работы.* Состояние объекта, при котором его дальнейшая эксплуатация должна быть прекращена из-за неустранимых нарушений (техника безопасности, параметры, снижение эффективности) или необходимости проведения капитального ремонта, называется *предельным состоянием*.

1.1. Основные свойства и показатели надежности

Перечисленные во введении свойства объекта, определяющие в совокупности его надежность: *безотказность, долговечность, ремонтопригодность, живучесть, безопасность, устойчивость* и др. – в большинстве своем могут быть охарактеризованы соответствующими количественными *показателями надежности.*

Свойство безотказности (невосстанавливаемый объект).

Характеристикой этого свойства является вероятность того, что время работы объекта до отказа в момент t_0 будет не меньше заданного времени t или вероятность безотказной работы за время t

$$P_0(t) = P(t \le t_0). \tag{1.1}$$

Статистически $P_0\,(t)$ можно оценить следующим образом [2]. Пусть под наблюдением находится N_0 одинаковых работающих объектов. К моменту времени t из-за отказов в работе остается $N(t) \le N_0$. Статистическая оценка вероятности $P_0\,(t)$ определяется так:

$$\hat{P}_0(t) = \frac{N(t)}{N_0}. \tag{1.2}$$

Вероятность отказа объекта за время t $Q(t)$ вычисляется через $P_0(t)$ по формуле

$$Q(t) = 1 - P_0(t). \tag{1.3}$$

Важнейшей характеристикой свойства безопасности является *интенсивность отказов* $\lambda(t)$ – число отказов за единицу времени на единицу работающих объектов. Статистически она вычисляется по соотношению [2]

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{N(t) - N(t+\Delta t)}{N(t)\Delta t} = \frac{\Delta N(t)}{N(t)\Delta t}, \tag{1.4}$$

в котором предельный переход при $\Delta t \to 0$ дает

$$\lambda(t) = \frac{1}{P_0(t)} \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{1}{P_0(t)} \frac{d}{dt}\left(1 - P_0(t)\right) \tag{1.5}$$

и соответственно дифференциальное уравнение для функции $P_0(t)$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda(t) P_0(t) = 0 \tag{1.6}$$

с начальным условием $P_0(0)=1$.

Решением (1.6) является зависимость P_0 от времени,

$$P_0(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}, \tag{1.7}$$

вид которой полностью определяется характеристикой жизни объекта λ(t) (рис. 1.1) .

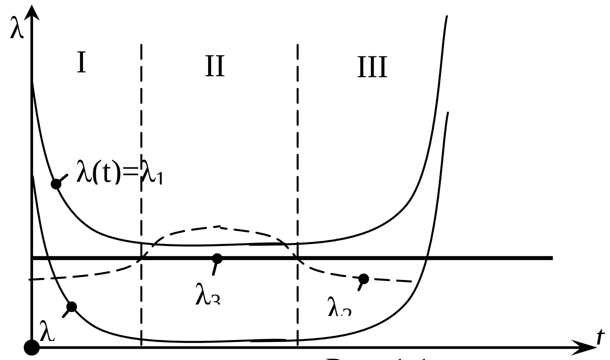


Рис. 1.1

На характеристике отчетливо различимы три периода. Период I, называемый *периодом приработки,* имеет повышенную интенсивность отказов за счет изъянов монтажа, настройки, дефектов изготовления, режимов эксплуатации объекта. По мере «выжигания» дефектов интенсивность отказов $\lambda_1(t)$ уменьшается. Период III имеет повышенную интенсивность отказов, обусловленную износом оборудования, и характеризует постепенную утрату объектом функциональных свойств. Этот процесс закономерен и проявляется даже при хранении объекта. Период III называется *периодом старения.* Время между периодами приработки и старения называется *периодом нормальной работы.* Для него характерна практически постоянная интенсивность отказов $\lambda_3=const$, нарушаемая за счет сезонных изменений условий эксплуатации (грозы, ветры, гололед и т.д.) $\lambda_2(t)$. График полной интенсивности отказов получается путем суммирования перечисленных составляющих и имеет седловидную форму $\lambda(t)$. Для освоенного и отработанного оборудования допустимо принять в расчетах $\lambda=const$ не только в периоде нормальной работы, но и в первом периоде. В периоде старения, как это будет показано в разд. 3 пособия, выполнение условия $\lambda \cong const$ можно добиться путем профилактических ремонтов. При условии постоянства λ для вероятности безотказной работы и вероятности отказа из формул (1.7) и (1.3) получаем

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \tag{1.8}$$

Представление о численных значениях показателя λ дает табл. 1.1 [2, с. 233].

Таблица 1.1

Вид оборудования	Един. измер.	Характеристики отказов при напряжении, кВ						
		1150	750	500	330	220	110	35
Воздушные линии электропередачи (ВЛЭП) одноцепные	Отказ* / 100 км/год	0,4 / 0,3	0,45 / 0,35	0,5 / 0,4	0,8 / 1,6	1,0 / 2,4	1,4 / 3,2	1,5 / 3,3
ВЛЭП двухцепные	Отказ** / 100 км/год	-	-	-	0,6-0,2 / 1,6	0,8-0,2 / 2,4	1-0,4 / 3,2	1-0,5 / 3,3
Автотрансформаторы и трансформаторы	Отказ / год	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,01

* Числитель – устойчивые отказы, знаменатель – неустойчивые.

** 0,6-0,2 первое число – отказ одной цепи, второе – отказ двух цепей.

На основе экспериментальных зависимостей (1.8) сравнительно легко определяются и другие характеристики надежности объекта: дифференциальная характеристика – *плотность распределения отказов*

$$q(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \tag{1.9}$$

и соответствующая ей характеристика надежности – *средняя наработка до отказа,* вычисляемая по выражению [7]

$$T_{оср} = \int_0^\infty q(t)t dt = \int_0^\infty -\frac{dP_0(t)}{dt} t dt = \int_0^\infty P_0(t) dt = \frac{1}{\lambda}\,. \tag{1.10}$$

Существенной особенностью экспоненциального закона (1.8) является независимость вероятности безотказной работы объекта на заданном интервале времени [t_1, t_2] от длительности предшествующей работы, т.е. от величины интервала [0, t_1]. Иными словами, если объект работоспособен в момент времени t_1 , то его работоспособность на последующем интервале времени [t_1, t_2] определяется только длиной этого интервала.

Действительно, объект не откажет на интервале [0, t_2], если он не отказал на интервале [0, t_1] и затем на интервале [t_1, t_2], т.е. первое событие (работа на интервале [0, t_2] без отказа) есть произведение двух других. Поэтому

$$P_0(t_2) = P_0(t_1) P_0({}^{t_2}\!/_{t_1}),$$

где $P_0({}^{t_2}\!/_{t_1})$ – условная вероятность безотказной работы объекта на интервале времени [t_1, t_2], вычисленная при условии безотказной работы объекта на интервале [0, t_1].

$$P_0({}^{t_2}\!/_{t_1}) = \frac{P_0(t_2)}{P_0(t_1)} = e^{-\lambda(t_2 - t_1)} = e^{-\lambda \Delta t} = P_0(\Delta t)\,. \tag{1.11}$$

Итак, *свойство безотказности* невосстанавливаемого объекта характеризуют вероятность безотказной работы или вероятность отказа – функции $P_0(t)$, $Q(t)$, интенсивность отказов λ(t), вычисляемая по кривой жизни объекта или по выражениям (1.4),(1.5), и средняя наработка до отказа (1.10).

Для *восстанавливаемых объектов* характерной является цикличная работа, когда чередуются отдельные периоды с интервалами исправного функционирования и восстановления (ремонта). При изучении и описании надежностных свойств таких объектов принято использовать понятие *потока отказов и восстановлений* (рис. 1.2).

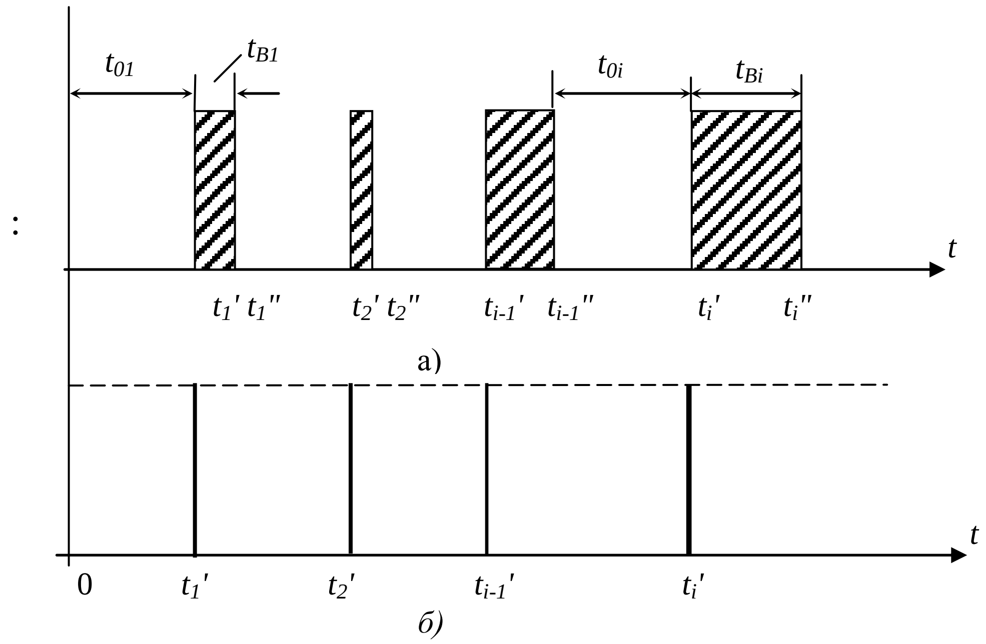


Рис.1.2

Каждый период (цикл) состоит из двух интервалов: t'_{0i} – время безотказной работы, $t_{вi}$ – время восстановления в цикле номера «*i*». Значения t'_{0i}, $t_{вi}$ являются случайными величинами, причем в среднем $t_{вi} << t'_{0i}$, т.е. допустимо принять время восстановления равным нулю и *говорить о потоке отказов* (рис. 1.2.б), отложив рассмотрение восстановлений объекта до разбора свойства *ремонтопригодности.* Полагаем, что при отказе объекта он восстановливается и заново включается в работу моментально (замена), поэтому рассматриваем *поток отказов* (рис. 1.2.б). Отметим некоторые свойства таких потоков [7]. Поток называется *ординарным*, если вероятность двух и более отказов за промежуток времени Δt равна нулю при $\Delta t \to 0$. Поток отказов называется *потоком без последствия,* если на любых неперекрывающих друг друга интервалах времени число событий на последующих интервалах не зависит от числа событий на предшествующих. Потоки могут быть *стационарными* и *нестационарными,* причем поток является стационарным, если вероятность появления «*n»* отказов на интервале времени [t,t+Δt] не зависит от положения интервала на оси времени *t*. *Ординарные потоки без последствия* называются *пуассоновскими*[*]*, стационарный пуассоновский* поток называется *простейшим.*

Количественным показателем свойства безотказности на каждом *к*-м цикле от начала работы до отказа служит вероятность безотказной работы $P_{OK}(t_K)$, причем время t_K отсчитывается от начала работы. На каждом цикле, начинающемся, согласно рис. 1.2.а, после завершения ремонта, объект оказывается в различных точках характеристики жизни и поэтому в общем случае каждому циклу соответствуют разные интенсивности отказов $\lambda_к$ и зависимости $P_{ок}(t_к)$. Однако после завершения периода приработки можно принять $\lambda = const$ для всех циклов. В качестве характеристики потока отказов инспользуется *средний параметр потока отказов или частота отказов,* вычисляемая статистически по формуле

$$\hat{\omega}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i(t+\Delta t) - \sum_{i=1}^{N} m_i(t)}{N\Delta t}, \quad \Delta t << t\,. \tag{1.12}$$

где $m_i(t)$ – число отказов *i*-го объекта до времени *t; N* – число испытуемых объектов.

Средняя наработка на отказ для восстанавливаемого объекта определяется аналогично этому показателю для невосстанавливаемого объекта:

[*] По фамилии французского математика Симона Пуассона (1781–1840).

$$\hat{T}_{O_{CP}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_{OK}\ , \qquad (1.13)$$

где $t_{ок}$ – наработка до первого, второго, n-го отказа, n – число отказов от момента начала эксплуатации до окончания наблюдения.

Наряду с этим показателем может использоваться *показатель наработки на отказ* $T_{O_{CP}}$, определяемый как отношение общей наработки к математическому ожиданию числа его отказов в течение этой наработки [2].

Для энергетических объектов, например линий электропередачи, допустимо считать потоки отказов ординарными, стационарными, с отсутствием последействия, т.е. полагать их простейшими. Поэтому рекомендуется использовать в расчетах следующие формулы:

$$\begin{gathered} \lambda_k\left(t_k\right) = \lambda = const \quad P_{ok}\left(t_k\right) = P_o(t) = e^{-\lambda t}; \\ \omega(t) = \lambda; \quad T_{O_{CP}} = \frac{1}{\lambda}; \quad P_k\left(t\right) = \frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}e^{-\lambda t}. \end{gathered} \qquad (1.14)$$

Последняя формула позволяет рассчитать вероятность k отказов объекта за время эксплуатации t.

Свойство долговечности

Основными характеристиками долговечности являются *средний срок службы* и *средний ресурс* [2].

Средний ресурс – это *средняя наработка* объекта от начала эксплуатации или ее возобновления после предупредительного ремонта до наступления *предельного состояния* (см. введение). Практически эта величина совпадает со средней наработкой до отказа $T_{O_{CP}}$.

Средний срок службы – календарная продолжительность эксплуатации объекта от ее начала или возобновления после *предупредительного* ремонта до наступления предельного состояния.

Свойство ремонтопригодности (только для восстанавливаемых объектов)

Восстановление объектов осуществляется в ходе ремонтов, причем выделяются два вида ремонтов аварийно-восстановительные (или внеплановые) и предупредительные (плановые).

Аварийно-восстановительные ремонты. Время восстановления объекта t_B в ходе ремонтов этого типа складывается из времени обнаружения повреждения, доставки бригады ремонтников, материалов, собственно времени ремонта, зависящего от степени повреждения объекта и т.д., поэтому длительность ремонта *является случайной величиной* и следует говорить о *вероятности восстановления объекта за данное время t:*

$$G_{ak}(t_k) = P(t_{\hat{a}k} < t_k)\ ,$$

где a – вид ремонта (аварийный), индекс k – номер цикла, на котором рассматривается восстановление объекта; t_k – текущее время этого цикла, отсчитываемое от момента отказа.

Статистически функцию $G_{ак}(t_к)$ можно определить с помощью соотношения [2]

$$\hat{G}_{ak}\left(t_k\right) = \frac{M_k\left(t_k\right)}{M_{ok}}, \qquad (1.15)$$

где M_{ok} – число одинаковых объектов, находящихся в ремонте; $M_k(t_k)$ – число объектов из общего количества M_{ok}, ремонт которых закончился за время t_k.

Аналогом интенсивности отказов $\lambda(t)$ при восстановлении объекта служит *интенсивность восстановления* $\mu(t)$. Статистически этот показатель определяется по выражению

$$\hat{\mu}_k\left(t_k\right) = \frac{M_k\left(t_k + \Delta t_k\right) - M_k\left(t_k\right)}{M_k\left(t_k\right)\Delta t} = \frac{\Delta M_k\left(t_k\right)}{M_k\left(t_k\right)\Delta t}. \qquad (1.16)$$

Аналитически выражение для $\mu_к(t_к)$ получается как отношение условной вероятности восстановления работоспособности объекта на малом интервале после данного момента $t_к$

при условии, что до этого момента восстановление не завершено) к продолжительности этого интервала [2]:

$$\mu_k(t_k) = \frac{1}{1 - G_{ak}(t_k)} \cdot \frac{dG_{ak}(t_k)}{dt_k}. \tag{1.17}$$

Рассматривая выражение (1.17) как дифференциальное уравнение для функции $G_{ак}(t_к)$ с очевидным начальным условием $G_{ак}(0)=0$ и решая его, находим

$$G_{ak}(t_k) = 1 - e^{-\int_0^{t_к} \mu_k(t_k)dt_k}. \tag{1.18}$$

Важным показателем, характеризующим процесс восстановления объекта, является *среднее время* восстановления

$$\hat{T}_{Bcp} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k, t_{Bk}\ , \tag{1.19}$$

где n – число отказов от момента начала эксплуатации до окончания наблюдения, t_{Bk} – время обнаружения и устранения $к$-го отказа

Аналитическое выражение для T_{Bcp} определяется при известной зависимости $G_{ak}(t)$ по формуле (1.10):

$$T_{Bcp} = \int_0^{\infty} t\frac{dG_a(t)}{dt}dt. \tag{1.20}$$

В тех случаях, когда допустимо принять $\mu_k=const$, по (1.18), (1.20) получаем

$$G_{ak}(t_k) = 1 - e^{-\mu_{kt}}, \quad T_{Bcp} = \frac{1}{\mu_k}. \tag{1.21}$$

Предупредительные ремонты. Эти ремонты имеют следующие разновидности: текущие, капитальные, различные промежуточные ремонты (расширенные, средние и т.п.) – причем момент наступления ремонта и перечень работ регламентируются; однако как вывод в ремонт, так и его длительность подвержены случайным колебаниям. Длительность, например, изменяется в зависимости от целого ряда факторов: наличие материалов, инструментов, оборудования (техническое оснащение), погодные условия и т.д. Поэтому согласно предельной теореме Ляпунова (центральная предельная теорема), длительность ремонта подчинена нормальному закону распределения, что подтверждается статистическими исследованиями [2].

Для плановых ремонтов, как и для аварийных, может быть введена функция $G_{П_k}(t_k) = P(t_{П_k} < t_k)$ – вероятность восстановления объекта за время t в ходе планового ремонта.

Рассмотрим среднее время предупредительных ремонтов. Поскольку каждый вид предупредительного ремонта имеет свое среднее время и частоту проведения, будем нумеровать виды ремонта индексом i, т.е. различать $T_{\eta i}$, ω_{ii} для ремонтов первого, второго и так далее видов. Относительная длительность нахождения объекта в предупредительном ремонте вида i определяется по формуле

$$\tau_i = \omega_{\eta i}\tau_{\eta icp} \tag{1.22}$$

где τ – число часов в год, использованных на ремонт вида i; $\omega_{\eta i}$ – 1/год, размерность $\tau_{\eta icp}$ – часы,

Относительная длительность нахождения во всех видах ремонта и частота промежуточных ремонтов:

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \omega_{\eta i} T_{\eta i cp}; \quad \omega_n = \sum_{i=1}^{n} \omega_{\eta i}, \tag{1.23}$$

где n – общее количество различных видов предупредительных ремонтов.

Порядок величин T_{Bcp}, $\omega_П$ для некоторых объектов позволяет оценить табл. 1.2, составленная по данным, приведенным в работе [6].

Комплексные показатели. Чаще всего употребляются следующие показатели: *коэффициент готовности, коэффициент технического использования, коэффициент оперативной готовности, средний недоотпуск энергии* и *экономический ущерб от ненадежности.*

Коэффициент готовности. Характеризует совокупность свойств безотказности и ремонтопригодности и представляет собой вероятность того, что объект окажется работоспособным в произвольный момент времени [2]:

$$K_Г = \frac{T_{Ocp}}{T_{Ocp} + T_{Bcp}}. \tag{1.24}$$

Это выражение справедливо для любых законов распределения, наработки до отказа и времени восстановления. Следовательно, *стационарное значение* коэффициента готовности и вероятности нахождения объекта в произвольный момент времени в работоспособном состоянии *равна относительной длительности пребывания объекта в работоспособном состоянии.*

Таблица 1.2

Объект	T_{Bcp}, ч	$\omega_П$, 1/год
Возд. линия 35,110 кВ одноцепная, на 1км	6	0,1
Возд. линия 6,10 кВ одноцепная, на 1км	5	0,2
Возд. линия 0,38 кВ на 1км	4	0,25
Кабельная линия 6,10 кВ на 1км	15	0,3
Трансф. 35,110 кВ	25	0,3
Ячейка выключателя 35,110 кВ	5,5	0,2
Ячейка выключателя 6,10 кВ внутренней установки	5	0,15

Статистически коэффициент готовности определяется по формуле [2]

$$\hat{K}_Г = \sum \frac{t_{o\Sigma i}}{\left(NT_{РАБ}\right)}, \tag{1.25}$$

где $t_{o\Sigma i}$ – суммарное время пребывания i-го объекта в работоспособном состоянии; N – количество интервалов, $T_{РАБ}$ – продолжительность эксплуатации объекта, состоящая из последовательно чередующихся интервалов работы и аварийного восстановления, или по формуле

$$\hat{K}_Г = \frac{t_{H\Sigma}}{t_{H\Sigma} + t_{B\Sigma}}, \tag{1.26}$$

в случае если $T_{РАБ}$ различна для каждого из наблюдаемых объектов, причем $t_{H\Sigma}$ – суммарное время аварийных ремонтов.

Найдем зависимость $K_Г(t)$ для *нестационарного состояния объекта* при изменении его состояния на интервале от t до $t+\Delta t$, *полагая,* что предупредительные ремонты производятся за интервал $\Delta t_П \to 0$, а показатели $\lambda_K = const$, $\mu_K = const$ – одинаковы во всех циклах работы и восстановления, т.е. в предположении, что, независимо от номера цикла,

$$P_{ок}(t_к) = P_о(t) = e^{-\lambda t}; \quad G_{ак}(t) = G_а(t) = 1 - e^{-\mu t} .$$

В момент времени t объект мог находиться в работоспособном состоянии с вероятностью $K_Г(t)$ (согласно определению $K_Г(t)$) или в состоянии восстановления после отказа с вероятностью $1 - K_Г(t)$. В момент времени $t+\Delta t$ объект может оказаться в работоспособном состоянии, попав в него либо из первого состояния, если не было отказа за время Δt, либо из второго, если за Δt была восстановлена его работоспособность. Используя теорему полной вероятности, можем записать

$$K_Г(t+\Delta t) = K_Г(t) P_O(\Delta t) + [1 - K_Г(t)] G_a(\Delta t). \tag{1.27}$$

Для малых значений Δt допустимо в разложениях $P_O(\Delta t), G_a(\Delta t)$ в ряд Тейлора сохранить только линейные члены:

$$P_O(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} \approx 1 - \lambda \Delta t, \quad G_a(\Delta t) = 1 - e^{-\mu \Delta t} \approx \mu \Delta t .$$

Подставляя эти выражения в (1.27) и полагая $\Delta t \to 0$, получаем дифференциальное уравнение, описывающее изменения коэффициента готовности во времени:

$$\frac{dK_Г(t)}{dt} + (\lambda + \mu) K_Г(t) = \mu . \tag{1.28}$$

Вид решения (1.28) определяется значением $K_Г(0)$ в начальный момент отсчета времени. Например, при $K_Г(0)=1$ (объект заведомо работоспособен) имеем

$$K_Г(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} . \tag{1.29}$$

Стационарное значение этого коэффициента, т.е. значение в допустимо удаленный от начала работы объекта момент времени

$$K_{Г\infty} = \lim_{t\to\infty} K_Г(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} . \tag{1.30}$$

Для экспоненциальных законов отказа и восстановления $\lambda = 1/T_{Оср}$, $\mu = 1/T_{Вср}$, $K_{Г\infty} = T_{Оср}/(T_{Оср} + T_{Вср})$ (см. формулу (1.24)).

В энергетике широко используется и показатель, характеризующий состояние, противоположное рассмотренному – вероятность нахождения объекта в момент времени t в неработоспособном состоянии – *коэффициент неготовности или аварийного состояния*

$$q_{ab} = 1 - K_Г = \frac{T_{Вср}}{T_{Оср} + T_{Вср}} . \tag{1.31}$$

Коэффициент технического использования. Этот коэффициент характеризует те же свойства, что и коэффициент готовности, но учитывает дополнительно предупредительные ремонты и определяется как отношение времени наработки оборудования за некоторый период эксплуатации к сумме этой наработки и времени всех простоев, вызванных техобслуживанием и ремонтами за тот же период эксплуатации.

$$K_{ТИ} = \frac{T_{Оср}}{T_{Оср} + T_{Вср} + T_{Пср}} . \tag{1.32}$$

В энергетике вместо коэффициента технического использования применяют еще такие коэффициенты:

$$q = 1 - K_{ТИ}, \quad q_{ПЛ} = q - q_{ав} ,$$

хотя они и не входят в терминологию по надежности систем энергетики.

Коэффициент оперативной готовности Этот показатель представляет собой вероятность того, что объект, находясь в режиме ожидания, оказывается работоспособным в произвольный момент времени t и, начиная с этого момента времени, работает безотказно в течение заданного интервала времени $t_{раб}$ [2].

$$K_{ОГ} = K_{Г}(t)P_{О}(t_{раб}). \tag{1.33}$$

В частном случае экспоненциальных законов для вероятностей отказа и восстановления имеем

$$K_{ОГ} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}e^{-\lambda t_{раб}}. \tag{1.34}$$

Средний недоотпуск энергии. Экономический ущерб от ненадежности. Эти показатели характеризуют математическое ожидание недоотпуска энергии потребителям за расчетный период и свойства надежности системы с учетом режима ее загрузки и значимости потребителя энергии [2].

2. Основные понятия, аксиомы и теоремы теории вероятностей в применении к проблеме надежности в электроэнергетике и электроснабжении

Базовыми для количественной оценки различных показателей надежности являются *понятия случайного события, случайной величины и случайного процесса.*

Понятие случайного события. Массовые явления и процессы характеризуются многократным повторением при постоянных условиях некоторых опытов, операций и т.п. Абстрагируясь от специальных свойств этих опытов, в теории вероятностей вводят понятие испытания. *Испытанием* называют осуществление какого-нибудь определенного комплекса условий, которое может быть воспроизведено сколь угодно большое число раз. Явления, происходящие при реализации этого комплекса, т.е. в результате испытаний, называется *событиями* [7]. Существенным здесь является то, что одни и те же условия *реализуются многократно,* наличие же наблюдателя необязательно.

Например, для каждого атома радиоактивного вещества можно рассматривать событие – распад атома – в течение некоторого фиксированного промежутка времени; отключение ЛЭП в грозовой обстановке – событие отказа; для множества электродвигателей на предприятии аварийный останов – случайное событие, не подчиняющееся никаким функциональным зависимостям от времени.

Таким образом, *под событием понимается всякий факт, который в результате испытания (опыта) может произойти или не произойти* [7].

Во всех приведенных примерах количество произошедших событий и время (величина интервала, в пределах которого события наблюдались) не связаны функциональной зависимостью (нет причинной закономерности), но существует *вероятностная* (стохастическая) *закономерность* в появлении события.

Понятие случайной величины. Случайной называется величина, которая в результате испытаний может принять то или иное числовое значение в зависимости от случайного исхода испытания [7].

Например, электрическую прочность изоляционных конструкций можно характеризовать непрерывным распределением предразрядных времен при заданной амплитуде и форме воздействующего напряжения (рис. 2.1) [8].

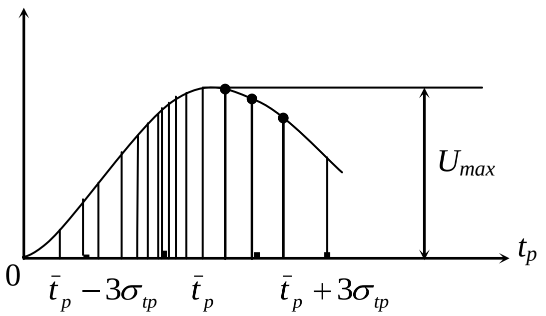


Рис. 2.1

Значение t_p – временя от момента включения до момента перекрытия изоляции – *является непрерывной случайной величиной,* подчиняющейся так называемому нормальному распределению, характеристиками которого служат математическое ожидание $\bar{t}_p$ (среднее значение) и среднее квадратическое отклонение δ_{tp}:

$$\bar{t}_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_{pi}, \quad \sigma_{tp} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_{pi} - \bar{t}_p\right)^2},$$ определяемые тем точнее, чем больше число опытов n.

Аналогичным образом оценивается действие электрического тока на человека [9], при определении пороговых значений ощутимого и неотпускающего токов, где также имеем нормальный закон распределения этих случайных величин с характеристиками $\bar{\Pi}$ и σ.

Наконец, значения погрешностей измерения любых величин любыми приборами – непрерывные случайные величины, удовлетворяющие тому же нормальному закону распределения.

Случайная величина может быть и *дискретной.* Например: число дефектных изделий в крупной партии приборов, электрических ламп, деталей и т.п.; число вызовов, поступающих на телефонную станцию, число отказов у работающего оборудования и т.д.

Понятие случайного процесса (случайной функции)

В теории случайных процессов изучаются *закономерности изменения случайных величин* в зависимости от изменения *неслучайного параметра* [7] (время, пространственные координаты и т.д.), например: описанный выше поток отказов является случайным процессом, для которого случайную величину – число отказов – следует рассматривать как случайную функцию времени; процесс распада атомов радиоактивного вещества и процесс испускания электронов раскаленным катодом, загрузка телефонной станции – примеры *дискретных случайных процессов,* в ходе которых случайная величина может принимать с течением времени *лишь целочисленные значения.* Исследуя броуновское движение частиц и регистрируя при этом координаты частицы $x(t), y(t), z(t)$ в различные моменты времени для совокупности случайных частиц x, y, z, получим описание *непрерывного случайного процесса.* Обрабатывая на токарном станке изделие, будем иметь непрерывный случайный процесс отклонения профиля изделия по длине $x(l)$ от заданного размера.

2.1. Основные сведения из теории случайных событий

Частость и вероятность. Полагаем, что в серии из N испытаний, проведенных в одних и тех же условиях, событие A произошло $K_N(A)$ раз. Отношение $\frac{K_N(A)}{N} = W_N(A)$ называется *частостью* или относительной частотой.

Очевидно, что $0 \le W_N(A) \le 1$; при $K_N(A)=0$ событие A невозможно; если $K_N(A)=1$ – оно достоверно. Если N невелико, то частость может сильно меняться при повторных испытаниях. Однако в длинных повторных сериях испытаний частость события A обнаруживает устойчивость, т.е. редко сколько-нибудь значительно отклоняется от некоторого постоянного числа. Это число, меньшее единицы, является количественной мерой возможности реализации случайного события А в испытании и называется его вероятностью – $P(A)$.

Конкретный смысл вероятности заключается в том, что она определяет среднюю частость, с которой можно ожидать появление события A в длинных сериях испытаний $W(A) \approx P(A)$.

На практике (в электроснабжении, например) обычна такая ситуация, когда оценить непосредственно вероятности интересующих нас событий затруднительно, а иногда даже невозможно, но вместе с тем имеются данные о вероятностях других, простейших событий того же поля.

Задача теории вероятностей применительно к данной ситуации заключается в том, чтобы, зная вероятности простейших событий, получить путем анализа и вычислений вероятности сложных событий и тем самым иметь возможность предсказать их частость при производстве массовых испытаний.

При одновременном рассмотрении двух или нескольких событий различают события совместимые и несовместимые (совместные и несовместные).

Если вероятность одного события не изменяется от того, произошло или не произошло другое событие, то такие события называются независимыми.

Несколько событий образуют полную группу событий, если в результате испытания должно произойти хотя бы одно из них.

Теорема сложения вероятностей

Суммой n событий называется сложное событие, заключающееся в появлении хотя бы одного из них.

Различают сумму несовместимых событий и сумму совместимых событий.

Вероятность суммы *n* несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i), \text{ где } A=\sum_{i=1}^{n}A_i \qquad (2.1)$$

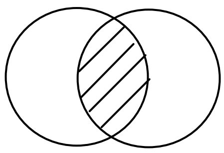
Следствие 1. Если появление хотя бы одного из *n* несовместимых событий является достоверным событием, то события *Ai* образуют полную группу событий, для которых выполняется соотношение $\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1$.

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий: *A* и $\bar{A}$ (не *A*) равна единице:

$P(A)+P(\bar{A})=1$, или $P(A)=1-P(\bar{A})$.

Если события A и B совместимы, вероятность суммы этих событий выражается формулой

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB), \qquad (2.2)$$



где *AB* – произведение событий *A* и *B* – сложное событие, заключающееся в совместном появлении событий *A* и *B* (рис. 2.2).

Рис. 2.2

Вероятность суммы любого числа совместимых событий вычисляется по формуле

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=P(A)=\sum_{i}P(A_i)-\sum_{i,j}P(A_iA_j)+\sum_{i,j,K}P(A_iA_jA_K). \qquad (2.3)$$

Теорема умножения вероятностей

Произведением n событий называется сложное событие, заключающееся в совместном появлении всех n событий.

Вероятность произведения *n* независимых событий

$$P(A)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i), \qquad \text{где} \quad A=\prod_{i=1}^{n}A_i . \qquad (2.4)$$

Вероятность произведения зависимых событий вычисляется с помощью *условной вероятности,* под которой в случае двух зависимых событий A_1 и A_2 понимается или вероятность события A_1, вычисленная при условии, что произошло событие A_2 (обозначение $P(A_1/A_2)$) или вероятность события A_2, вычисленная при условии, что произошло событие A_1 (обозначение $P(A_2/A_1)$).

Имеем

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2/A_1)=P(A_2)P(A_1/A_2). \qquad (2.5)$$

Соответственно для условной вероятности

$$P(A_1/A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}; \qquad P(A_2/A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}. \qquad (2.6)$$

В общем случае для зависимых событий вероятность произведения вычисляется по формуле

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A)=P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}). \qquad (2.7)$$

Формула полной вероятности

Служит для вычисления вероятности события *A*, которое осуществляется лишь при условии, что происходит одно из независимых событий $B_1, B_2, \ldots B_n$, образующих полную группу. Эти события называются *гипотезами.* Имеем

$$P(A)=P(A/B_1)\,P(B_1)+P(A/B_2)\,P(B_2)+\ldots+P(A/B_n)\,P(B_n). \tag{2.8}$$

Пример использования формулы (2.8) [3].

При монтаже на подстанции может быть установлен трансформатор, изготовленный на одном из трех заводов. Вероятность поставки с 1-го завода – 0,2; со второго – 0,3; с третьего – 0,5.

Вероятности того, что при данных условиях эксплуатации трансформатор сохранит работоспособность в течение 25 лет, для первого, второго и третьего заводов соответственно равны 0,9; 0,92; 0,808.

Определить вероятность безотказной работы трансформатора в течение 25 лет.

Решение. Поставка трансформатора с первого завода – событие B_1 (первая гипотеза), вероятность его осуществления $P(B_1)$=0,2; поставка со второго завода – событие B_2 (вторая гипотеза), вероятность осуществления $P(B_2)$; поставка с третьего завода – событие B_3 (третья гипотеза), вероятность осуществления $P(B_3)$.

Одно из перечисленных событий *обязательно происходит* (трансформатор должен стоять!), поэтому

$$P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=1,$$

т.е. события $B_1, B_2, \ldots B_3$ образуют полную группу и формула (2.8) применима.

Обозначая событие безотказной работы трансформатора как *A*, для вероятности этого события по (2.8.) находим:

$$P(A)=0{,}2\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}92+0{,}5\cdot 0{,}808\approx 0{,}86.$$

Задача расчета условной вероятности гипотезы B_i при условии совершения события *A* решается по формуле вероятностей гипотез Бейеса*:

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum P(B_j)P(A/B_j)}. \tag{2.9}$$

Биноминальное распределение вероятностей

Рассматриваем случай повторения одного и того же испытания, в качестве результатов которого различаем два исхода: появление некоторого события *A* и непоявление его, т.е. появление события $\bar{A}$ (не *A*). Такая ситуация возникает при отборе партии изделий (электрических ламп, розеток, предохранителей и т.п. элементов схем освещения) на складе для последующего монтажа. Поскольку в складском объеме изделий имеются исправные и брачные изделия, то при отборе реализуются события двух типов или осуществляется отбор исправного изделия (событие *A*) или брачного (событие $\bar{A}$). Вероятности появления этих событий различны $P(A)=p$, $P(\bar{A})=q=1-p$, т.к. они образуют полную группу $P(A+\bar{A})=1$.

В сложном событии, когда отбирается партия из n изделий, возможны 2^n различных исхода, определяемые сочетаниями элементарных исходов *A* и $\bar{A}$. Вероятность x раз наблюдать событие *A* в течение n испытаний имеет вид [7]

$$P_n(x)=C_n^x p^x q^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}. \tag{2.10}$$

Совокупность вероятностей $P_n(x)$ при x=0,1,2,..n, P_n (0), P_n (1),… P_n (n) называется биноминальным распределением вероятностей. Причем

* Т.Бейес (Th. Bayes) английский математик 18 в., установивший формулу (2.9) в форме одной из теорем теории вероятностей.

$$\sum_{x=0}^{n} p_n(x) = \sum_{x=0}^{n} c_n^x p^x q^{n-x} = (q+p)^n = 1,$$

т.е. вероятности $p_n(x)$ соответствуют несовместимым событиям, образующим полную группу. При расчете $p_n(x)$ в ряде случаев полезно соотношение, связывающее два соседних члена $p_n(x)$ и $p_n(x+1)$:

$$\frac{p_n(x+1)}{p_n(x)} = \frac{(n-x)p}{(x+1)q}. \tag{2.11}$$

Часто нужно вычислить вероятность того, что событие A встретится не более чем x раз в n испытаниях, т.е. 0, или 1, или 2, или…, или x раз. Эта вероятность называется *кумулятивной (накопленной)* вероятностью биноминального распределения и обозначается символом $P_n(x)$ [7]:

$$P_n(x) = p_n(0) + p_n(1) + \ldots + P_n(x). \tag{2.12}$$

Описанная схема независимых испытаний с постоянными вероятностями носит название схемы Бернулли*.

Если испытания остаются независимыми, но условие постоянства вероятностей не соблюдается, получаем *схему испытаний Пуассона.* В этой схеме испытание с порядковым номером «*к*» может закончиться, как и раньше, одним из двух исходов A_K и $\bar{A}_K$, имеющих вероятности p_K и $q_K=1-p_K$. При этом для двух различных значений $к=i$ и $к=j$ $(i \neq j)$ вероятности различны $p_i \neq pn$, $q_i \neq q_j$. В рассмотренном выше примере отбора элементов электрической цепи со склада эта схема реализуется, когда, например, одновременно отбираются элементы одного типа, но разных заводов и годов выпуска.

Можно показать [7], что вероятности того, что в n последовательных испытаниях события вида Ai $(i=1,2,\ldots)$ произойдут ровно x раз, подсчитываются при перемножении биномов $(p_к\xi+q_к)$. После приведения подобных членов коэффициенты при ξ^x дают вероятности $p_n(x)$. Переменная ξ при этих вычислениях имеет вспомогательный характер.

$$\begin{gathered}\prod_{i=1}^{4}(p_к\xi+q_к) = (p_1\xi+q_1)(p_2\xi+q_2)\ldots(p_n\xi+q_n) = \\ = p_n(0) + p_n(1)\xi + p_n(2)\xi^2 + \ldots + p_n(n)\xi^n.\end{gathered} \tag{2.13}$$

Понятно, что при вычислении вероятностей событий $\bar{A}_i$, следует использовать формулу с множителем ξ у вероятности события $\bar{A}$:

$$\prod_{к=1}^{n}(p_к + q_к\xi) = q_n(0) + q_n(1)\xi + \ldots + q_n(n)\xi^n. \tag{2.14}$$

В качестве иллюстрации рассмотрим работу в течение интервала времени T некоторой электрической цепи, состоящей из n определенным образом соединенных элементов. Надежность этой цепи количественно определяется вероятностью безотказной работы в течение интервала времени T и зависит от надежности ее элементов.

Рассмотрим два основных типа соединения элементов – последовательное и параллельное, понимая эти соединения как соединения «по надежности», т.е. электрические соединения при этом могут быть произвольными. Так, в любом достаточно сложном электрическом аппарате, например телевизоре, его элементы (блоки) соединены электрически согласно схемно-функциональному назначению, но поскольку при отказе любого из них следует отказ всего устройства, их соединение «по надежности» – последовательное.

Полагаем, что *отказы отдельных элементов независимы в совокупности,* т.е. отказ одного элемента и даже отказ некоторой группы элементов не изменяет вероятности безотказной работы остальных в заданном интервале времени.

---

* По имени швейцарского математика Якова Бернулли (1654 – 1705), впервые исследовавшего ее основные закономерности.

Обозначаем безотказность работы i-го элемента в течение заданного промежутка времени при последовательном соединении $A_{i\ пос}$ и при параллельном соединении $A_{i\ пар}$, а $\bar{A}_{i\ пос}$ и $\bar{A}_{пар}$ будут означать отказы в работе i-го элемента при тех же соединениях.

Последовательное соединение

Вероятность безотказной работы системы из n последовательно соединенных элементов обозначаем $P_{n\ пос}$.

$$P_{n\ пос} = P(A_{1\ пос} \bullet A_{2\ пос} \bullet \ldots \bullet A_{n\ пос}),$$

где $A_{1\ пос} \bullet A_{2\ пос} \bullet \ldots \bullet A_{n.пос}$ – произведение событий, т.е. сложное событие – безотказная одновременная работа всех элементов.

Ввиду допущения независимости

$$P_{n.пос} = P_1\left(A_{1пос}\right) \cdot P_2\left(A_{2пос}\right) \ldots P\left(A_{n.пос}\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_{i.пос}\right). \tag{2.15}$$

Параллельное соединение

Вероятность безотказной работы системы из n параллельно соединенных элементов

$$P_{n\ пар} = P(A_{1\ пар} + A_{2\ пар} + \ldots + A_{n\ пар}),$$

где $A_{1\ пар} + A_{2\ пар} + \ldots + A_{n\ пар}$ – сумма событий т.е. сложное событие, заключающееся в наступлении лишь одного из событий $A_{1\ пар}, A_{2\ пар}, \ldots A_{n\ пар}$.

Вероятность $P(A_{1\ пар} + A_{2.пар} + \ldots + A_{n.пар}) \neq P(A_{1\ пар}) + P(A_{2\ пар}) + \ldots + P(A_{n\ пар})$, т.к. допустима совокупная работа групп элементов и при n=2, например, имеем согласно формуле (2.3)

$$P_{2\ пар} = P(A_{1\ пар} + A_{2\ пар}) = P(A_{1\ пар}) + P\ (A_{2пар}) - P(A_{1\ пар} \bullet A_{2\ пар}).$$

Поэтому при параллельном соединении проще подсчитать вероятность противоположного события – совместного наступления отказов всех параллельно соединенных элементов.

Это сложное событие $\prod_{i=1}^{n} \bar{A}_{i.пар}$ противоположно сумме $\sum_{i=1}^{n} A_{i.пар}$ событий – безотказной работе элементов.

В силу этого и благодаря независимости отказов,

$$1 - P_{n.пар} = P\left(\bar{A}_{1пар} \cdot \bar{A}_{2пар} \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{n.пар}\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(\bar{A}_{i.пар}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left[1 - P\left(\bar{A}_{i.пар}\right)\right],$$

откуда

$$P_{n.пар} = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left[1 - P\left(A_{i.пар}\right)\right]. \tag{2.16}$$

Вероятность $(1 - P_{nпар})$ равна вероятности получения максимально возможного числа отказов, равного числу элементов цепи (предполагается, что отказавшие элементы не восстанавливаются). Обозначив через $Q_{n\ пар}(x)$ вероятность получения x отказов параллельно соединенных элементов за время T, т.е. вероятность осуществления $x(x \leq n)$ каких-либо событий $\bar{A}_{1\ пар}, \bar{A}_{2пар}, \ldots, \bar{A}_{n\ пар}$, применим для ее определения одну из формул (2.13) или (2.14). Расчет вероятностей $Q_{n\ пар}(x)$ выполним для конкретной цепи.

Пример. Система состоит из четырех параллельно (в «смысле надежности») соединенных элементов с вероятностями безотказной работы $P(A_{1\ пар})=0{,}6;\ P(A_{2\ пар})=0{,}7;\ P(A_{3\ пар})=0{,}8;\ P(A_{4\ пар})=0{,}9$. Требуется найти вероятность $P_{4\ пар}$ безотказной работы системы и вероятности отказов 0,1,2,3,4 элементов.

Решение. Обозначаем для краткости заданные вероятности безотказной работы через $p_1, p_2, p_3, p_4,$ вычисляем вероятности отказов $P(\bar{A}_{i\ пар})=q_i,\ i=1,2,3,4$ как $q_i = 1 - p_i$, причем находим $q_1=0{,}4;\ q_2=0{,}3;\ q_3=0{,}2;\ q_4=0{,}1$.

Применяя формулу (2.14), получаем

$$\prod_{i=1}^{4}\left(p_i + q_i\xi\right) = \left(0{,}6 + 0{,}4\xi\right)\left(0{,}7 + 0{,}3\xi\right)\left(0{,}8 + 0{,}2\xi\right)\left(0{,}9 + 0{,}1\xi\right) =$$

$$= 0{,}3024 + 0{,}404\xi + 0{,}2144\xi^2 + 0{,}0404\xi^3 + 0{,}0024\xi^4.$$

Вероятности получения отказов x элементов $(x=0,1,\ldots 4)$ имеют вид

$$Q_{4\ пар}(0)=0{,}3024;\ Q_{4\ пар}(1)=0{,}4404;\ Q_{4\ пар}(2)=0{,}2144;\ Q_{4\ пар}(3)=0{,}0404;$$
$$Q_{4\ пар}(4)=0{,}0024.$$

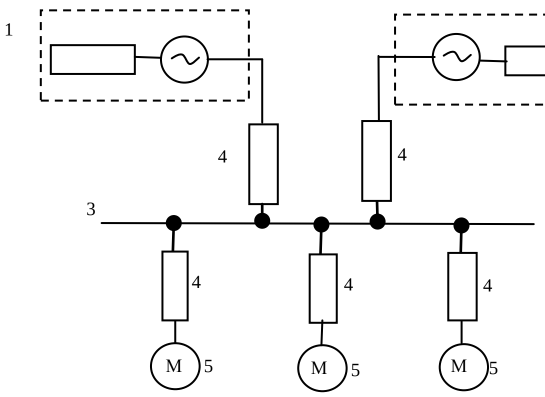
Вероятность безотказной работы системы

$$P_{4\ пар}=1-Q_{4\ пар}(4)=1-0{,}0024=0{,}9976.$$

Эту вероятность можно было найти сразу по формуле (2.16). Найденное значение $P_{4\ пар}=0{,}9976$ существенно превосходит наибольшую из вероятностей безотказной работы элементов $P(A_{4\ пар})=0{,}9$. Этот результат отражает *эффект резервирования,* обусловленный параллельным соединением элементов. Вероятность $Q_{4\ пар}(0)$, соответствующая отсутствию отказов элементов системы, позволяет оценить возможность *безремонтного обслуживания системы на заданном интервале времени.*

Рассмотрим еще один пример расчета вероятности безотказной работы для схем электроснабжения. Помимо такого расчета на этом примере будет проиллюстрировано отмеченное выше существенное различие между схемой электрических соединений и схемой соединений «по надежности».

Пример[4]. Схема электроснабжения группы механизмов системы аварийного охлаждения реактора (САОР). В режиме аварийного охлаждения активной зоны реактора АЭС источниками питания служат дизель-генераторы с малым временем пуска.



1. Рабочий дизель-генератор
2. Резервный дизель-генератор
3. Секция шин 6 кВ
4. Выключатели 6 кВ
5. Электродвигатели насосов

Рис. 2.3

Определить вероятность безотказной работы системы электроснабжения СЭС САОР в течение T=120 часов, полагая что для всех элементов системы вероятность безотказной работы следует экспоненциальному закону распределения $P_i(t)=e^{-\lambda_i t}$, где значения интенсивностей отказов λ_i=const, и имеет следующие значения:

$$\lambda_{ДГ}=680\cdot 10^{-6}\ 1/ч,\ \lambda_{РДГ}=68\cdot 10^{-6}\ 1/ч,\ \lambda_{ш}=0{,}05\cdot 10^{-6}\ 1/ч,$$
$$\lambda_{В}=0{,}57\cdot 10^{-6}\ 1/ч,\ \lambda_{ЭД}=5{,}24\cdot 10^{-6}\ 1/ч.$$

Решение. Составляем блок-схему для расчета надежности СЭС САОР. Так как надежность обеспечена при работе любого из дизель-генераторов, то на схеме расчета надежности их следует соединить параллельно, а поскольку ни один из насосов не должен отключаться, соответствующие им элементы схемы надежности следует соединить последовательно (рис. 2.4.)

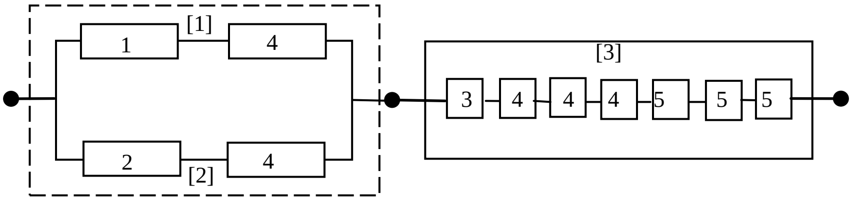


Рис. 2.4

Вероятность безотказной работы этой системы определяется через вероятности последовательно соединенных элементов 1, 2 и 3.

$$P_{СЭС}(t)=P_{[1],[2]}(t)\,P_{[3]}(t),$$

где $P_{[1],[2]}(t)$ – вероятность безотказной работы элементов 1 и 2, соединенных параллельно. Считая отказы элементов независимыми, получаем

$$P_{[1],[2]}(t)=[1–P_{[1]}(t)][1-P_{[2]}(t)]=P_{[1]}(t)+P_{[2]}(t)–P_{[1]}(t)P_{[2]}(t)\;P_{[3]}(t)=P_3(t)P_4^3(t)P_5^3(t).$$

Проводя вычисления при заданных значениях T и λ_i, получаем

$$P_{1,2}=0{,}999357,\; P_{[3]}=0{,}997903,\; P_{СЭС}=0{,}9697261.$$

Гипергеометрическое распределение вероятностей

При рассмотрении биноминального распределения вероятностей и применении его к задаче об отборе партии изделий, предполагалось, что количество изделий на складе так велико, что, отбирая часть изделий из общего объема, мы не изменяем ни величины последнего, ни условий отбора (задача о выборке с возвращением в объем). При отборе из некоторого конечного объема изделий соизмеримой с ним партии изделий условия отбора и сам объем изменяются (задача о выборке без возвращения). Задача о вероятности того, что число изделий, обладающих признаком A, в выборке объема n будет равно x $(0\le x\le n)$ решается на основе гипергеометрического распределения [7].

Полагая, что отбор осуществляется из совокупности N изделий, в которой содержится M изделий с признаком A, имеем $M/N=p$; для вероятности случайного события – отбора в партии из n изделий x изделий с признаком A – имеем формулу [7]

$$p_{N,M}(n,x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}\cdot\frac{[M(M-1)\ldots(M-x+1)][(N-M)(N-M-1)\ldots(N-M-n+x+1)]}{N(N-1)\ldots(N-n+1)}, \quad (2.17)$$

которая при $N\to\infty$ и $M/N=p=const$ переходит в формулу (2.10).

Для расчетов $p_{NM}(n,x)$ целесообразно, как и в случае биноминального распределения, использовать рекуррентное соотношение между соседними членами (2.17):

$$\frac{p_{N,M}(n,x+1)}{p_{N,M}(n,x)}=\frac{(n-x)(M-x)}{(x+1)(N-M-n+x+1)}, \quad (2.18)$$

определяя значение $p_{NM}(n,0)$ для $x=0$ по очевидной формуле

$$p_{N,M}(n,0)=\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{M}{N-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{M}{N-n+1}\right). \quad (2.19)$$

2.2. Случайные величины

Выше случайная величина была определена как переменная, принимающая в результате испытания то или иное числовое значение в зависимости от случайного исхода испытания. Поэтому случайная величина может рассматриваться как функция, аргументом которой служит случайное событие.

Случайная величина может быть *дискретной* или *непрерывной*. Для обозначения случайных величин будем использовать прописные буквы X,Y и т.д., а принимаемые ими значения будем обозначать строчными буквами $x_1,x_2,\ldots y_1, y_2,\ldots$.

Дискретная случайная величина

Эта величина считается заданной, если известны все возможные значения, принимаемые этой величиной $x_1,x_2,\ldots x_n$ и соответствующие им вероятности $p(x_i)$ для каждого события $X=x_i$ в поле испытания, причем $\sum_i p(x_i)=1$.

Таким образом, дискретная случайная величина задается *таблицей распределения* вида

$$X\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \ldots & p(x_n)\end{Bmatrix}. \quad (2.20)$$

Основные характеристики случайных величин – *математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение*.

Математическое ожидание (обозначение M[X]) дискретной случайной величины –это среднее взвешенное значение

$$M[X]=\frac{x_1p(x_1)+x_2p(x_2)+\ \ ...+x_np(x_n)}{p(x_1)+p(x_2)+\ \ ...+p(x_n)}=\sum_{i=1}^{n}x_i\,p(x_i). \qquad (2.21)$$

Если возможные значения дискретной случайной величины образуют счетное множество, т.е. $n\to\infty$, имеем

$$M[X]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i\,p(x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\,p(x_i), \qquad (2.22)$$

при этом ряд в правой части (2.22) должен сходиться абсолютно.

Смысл математического ожидания – *возможность оценки среднего эмпирического значения случайной величины*

$$x_{cp}=\sum_{x_i}x_iw(x_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_in_i\ , \qquad (2.23)$$

где $w(x_i)=n_i/n$ – частость события с исходом $X=x_i$.

Перечислим *свойства математического ожидания*.

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной: $M[C]=c$.
2. $M[CX]=CM[X]$.
3. $M[C+X]=C+M[X]$.
4. Математическое ожидание линейной функции $Y=кX+в$ равно той же линейной функции от математического ожидания величины x: $M[Y]=кMX+в$.
5. Если событие $U_K=f(x_K)$ имеет вероятность $p(x_к)=p(x=x_к)$,

$$U\begin{Bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & ... & f(x_n) \\ p(x_1) & p(x_2) & ... & p(x_n) \end{Bmatrix},$$

то математическое ожидание величины $U=f(x)$ имеет вид

$$M[U]=M[f(x)]=\sum_{K=1}^{n}f(x_K)p(x_K)=\sum_{x}f(x)p(x).$$

Наряду с величиной X рассматриваются различные ее степени. Математическое ожидание X^K называется *начальным моментом к-го порядка* величины X и обозначается символом $\nu_к$.

$$\nu_к=M\left[X^K\right]=\sum_{x}X^K p(x). \qquad (2.24)$$

Согласно формуле (2.22) $M[X]=\nu_1$– математическое ожидание – это начальный момент первого порядка и обозначается как ν.

Математическое ожидание случайной величины X, заданной таблицей распределения (2.20), – центр ее группирования. Вспомогательная величина $X'=X-M[X]$ называется отклонением случайной величины X и имеет вид

$$X'\begin{Bmatrix} x_1-\nu & x_2-\nu & ... & x_n-\nu \\ p(x_1) & p(x_2) & ... & p(x_n) \end{Bmatrix},$$

$$M[X']=M(X-M[X])=M(X-\nu)=M[X]-M[X]=0,$$

т.е. средняя величина отклонения равна нулю.

Моменты величины X' называются центральными моментами величины X или моментами относительно центра распределения ν и обозначаются символом $\mu_к$,

$$\mu_к=M\left[(X')^к\right]=M\left[(X-\nu)^к\right]=\sum_{X}(X-\nu)^к p(X). \qquad (2.25)$$

Центральный момент второго порядка μ_2 называется *дисперсией*,

$$D[X] = \mu_2 = M\left[(X-\nu)^2\right] = \sum_X (x-\nu)^2 p(x). \tag{2.26}$$

При вычислении дисперсии удобно использовать формулу

$$D[X] = \mu_2 = M\left[X^2\right] - (M[X])^2 = \nu_2 - \nu^2. \tag{2.27}$$

Среднее квадратическое или *стандартное* отклонение вычисляется по формуле

$$\delta_X = \sqrt{D[X]}. \tag{2.28}$$

Примерами распределений дискретной случайной величины являются рассмотренные выше *биноминальное и гипергеометрическое распределения.* Для них в каждом конкретном случае может быть составлена таблица распределения и вычислено среднее квадратическое отклонение. Проиллюстрируем сказанное конкретным расчетом.

Пример. Из партии автоматических выключателей N=1000 шт., находящихся на складе, взяты для электромонтажных работ n=30. Определить вероятность того, что среди взятых окажется x дефектных (x=0,1,2,….), если изначальное их количество $M=0{,}05N=50$.

Решение. Дискретной случайной величиной в данном случае является x-число дефектных автоматов в выборке из n=30 шт.

Для решения задачи следует применить формулы (2.18), (2.19) для гипергеометрического распределения. Сходные результаты, ввиду сравнительной малости выборки $n \ll N$, должен дать расчет по формуле (2.10), в которой нужно принять $p=M/N=0{,}05$ *и* $q=1-p=0{,}95$.

Применяя формулу (2.19), находим

$$p_{NM}(n,0)=p_{1000,50}(30,0)=0{,}2097.$$

Последовательно применяя формулу (2.18), вычисляем вероятности $P_{1000,50}(30,0)$ вплоть до $x=8$, остальные вероятности $P_{1000,50}(30,0)$ при $x>8$ оказываются меньше погрешности вычислений $\delta=10^{-4}$, поэтому считаем их равными нулю.

Вычисляем также вероятности $p_{30}(x)$ по формуле (2.10). Результаты расчета заносим в таблицу (по образцу табл. 2.1).

Таблица 2.1

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p_{1000,50}(30,x)$	0,2097	0,3415	0,2631	0,1278	0,0438	0,0114	0,0023	0,0003	0,0001
$p_{30}(x)$	0,2146	0,3389	0,2586	0,1270	0,0451	0,0124	0,0027	0,0005	0,0001

Приведем формулы для математического ожидания и дисперсии биномиального и гипергеометрического распределений [7].

Для биномиального распределения имеем

$$\nu = M[X] = np; \quad D[X] = npq, \quad p = \frac{M}{N}, \quad q = \frac{N-M}{N} = 1-p. \tag{2.29}$$

Для гипергеометрического распределения

$$\nu = M[X] = np; \quad D[X] = \frac{N-n}{N-1}npq, \quad p = \frac{M}{N}, \quad q = 1-p. \tag{2.30}$$

Математическое ожидание числа дефектных выключателей в выборке рассмотренного примера ν=1,5. Это означает практически, что при подготовке заявки на выключатели необходимо затребовать со склада не 30, а 32 шт.

Закон распределения Пуассона

К этому закону приводит схема испытаний Бернулли, при которой частота появления события следует биномиальному закону. Рассматриваем *маловероятные* события, но случающиеся при *большом числе испытаний конечное число раз.* Например, при современном высокотехнологичном производстве радиодеталей вероятность брака ничтожна, однако в крупной партии продукции будет содержаться некоторое количество дефектных изделий. Определение их числа по формулам биномиального распределения осложнено необходимостью вычисления факториалов и степеней высокого порядка. Кроме того, как будет показано далее, этому закону следуют отказы оборудования при их рассмотрении на значительных временных интервалах.

Полагаем, что число испытаний n неограниченно увеличивается и одновременно уменьшается вероятность появления события, так что математическое ожидание числа появлений события, т.е. величина np остается неизменной. Обозначая $np=a$, имеем $p=a/n$.

Для вероятности $p_n(0)$ можем записать

$$p_n(0)=(1-p)^n=(1-a/n)^n.$$

При $n\to\infty$ получаем [10]

$$n\to\infty \ \lim_{n\to\infty} p_n(0) = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{a}{n})^n = e^{-a}.$$

Отношение соседних членов биномиального распределения (формула (2.11)) при $n\to\infty$ дает

$$\frac{p_n(x+1)}{p_n(x)} = \frac{(n-x)}{(x+1)}\cdot\frac{p}{1-p} = \frac{q}{x+1}, \qquad (2.31)$$

причем здесь учтено, что $p=\frac{a}{n}<<1$, $\frac{x}{n}<<1$. Эти соотношения являются критериями применимости вводимого закона.

Последовательно используя (2.31), находим

$$p_n(1)=\frac{a}{1}e^{-a}, \quad p_n(2)=\frac{a^2}{2\cdot 1}e^{-a},...$$

Таким образом, *если число испытаний неограниченно возрастает, а математическое ожидание числа появлений события остается постоянным и равным а, то вероятность $p_n(x)$ биномиального распределения при каждом x=0,1,2,... стремится к пределу,* который принято обозначать [7]

$$\pi_a(x)=\frac{a^x}{x!}e^{-a}. \qquad (2.32)$$

Значения $\pi_a(x)$ и образуют распределение Пуассона.

Возможные значения величины x, подчиняющейся закону Пуассона образуют бесконечную последовательность целых чисел 0,1,2,…, а их вероятности следуют формуле (2.32).

При $x\to\infty$ $\sum_{x=0}^{\infty}\pi_a(x)=e^{-a}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{a^x}{x!}=e^{-a}\cdot e^{a}=1.$

Для вычисления вероятностей $\pi_a(x)$ и кумулятивных вероятностей существуют специальные таблицы.

Пример[4]. Выпущена партия резисторов *n=100 000* шт. Вероятность того, что резистор имеет брак, *p=0,0001.* Определить вероятность содержания в партии *x=0,1,2,...* бракованных резисторов. Определить соответствующие кумулятивные вероятности. Определить математическое ожидание числа бракованных резисторов.

Решение. Математическое ожидание числа бракованных резисторов *a=np=10,* т.е. при $\frac{a}{n}<<1$ для $\frac{x}{n}<<1$ можем использовать для расчета закон распределения Пуассона.

Вычисляем

$$p_n(0)=\frac{10^0}{0!}e^{-10}=0,4540\cdot10^{-4},$$
$$p_n(1)=\frac{10^1}{1!}e^{-10}=0,4540\cdot10^{-3},$$
$$...,$$
$$p_n(7)=\frac{10^7}{7!}e^{-10}=0,0901 \quad \textit{и} \quad \textit{т.д.}$$

Определяем кумулятивные вероятности

$$P_{100000}(X)=\sum_{K=0}^{x}p_n(K).$$

Результаты расчетов заносим в таблицу (по образцу табл. 2.2).

Таблица 2.2

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_n(x)$	$0,454\cdot10^{-4}$	$0,454\cdot10^{-3}$	$0,227\cdot10^{-2}$	$0,757\cdot10^{-2}$	$0,189\cdot10^{-1}$	0,03783	0,0631	0,0901	0,1126
$P_n(x)$	$0,454\cdot10^{-4}$	$0,4994\cdot10^{-3}$	$0,2769\cdot10^{-2}$	$0,1034\cdot10^{-1}$	0,0293	0,0671	0,1302	0,2203	0,3329

Наибольшей является вероятность $p_n(10)=0,1251$, соответствующая математическому ожиданию числа бракованных резисторов. При этом $P_n(10)=0,583$.

Непрерывные случайные величины и их распределения [7]. Непрерывная случайная величина – переменная, которая может в результате испытания принять любое значение в одном или нескольких заданных интервалах (ток, напряжение, мощность, время, погрешность измерения и т.д.). Значения непрерывной случайной величины образуют несчетное бесконечное множество, носящее в математике название *континуума.*

С каждым из возможных значений непрерывной случайной величины связана лишь вероятность, равная нулю, что, однако, не влечет невозможности события, так как все физические и технические измерения производятся с ограниченной точностью и фактически указываются лишь границы более или менее узкого интервала, внутри которого находится измеренное значение. Ширина этого интервала определяется классом точности измерительного прибора.

Поэтому для непрерывной случайной величины X вводится понятие *плотности непрерывного распределения вероятности* аналогично тому, как вводятся понятия плотностей вещества, объемных зарядов, тока и т.д.

Имеем для малого интервала изменений случайной величины *вероятность элементарного события*

$$p(x<X<x+\Delta x)=p(x)\Delta x, \qquad (2.33)$$

где $p(x)$ – плотность непрерывного распределения вероятности – определяет вероятность неравенства

$$(x<X<x+\Delta x)$$

при $\Delta x\to 0$.

Для конечного интервала (x_1,x_2) получаем

$$P(x_1<X<x_2)=\int_{x_1}^{x_2}p(x)dx. \qquad (2.34)$$

Следовательно, вероятность попадания значения величины X в любой интервал (x_1,x_2) определяется площадью под *кривой распределения* $p(x)$.

Плотностью распределения вероятности *p(x)* может служить любая интегрируемая функция, удовлетворяющая двум условиям

$$\left.\begin{aligned} p(x) \ge 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1 \end{aligned}\right\}. \quad 2.35)$$

В качестве примера *p(x)* приведем *показательный закон распределения,* характеризующий распределение случайных отрезков времени между последующим наступлением редких событий, например отказами оборудования (см. формулу (1.9) и пояснения к ней).

$$P(x)=\lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x\ge 0 \qquad p(0)=0 \text{ при } x<0 \tag{2.36}$$

Вероятность $P(X<x)$ того, что величина X меньше заданного числа x, изобразится площадью под кривой распределения слева от ординаты *p(x* (рис. 2.5).

$$P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} p(u)du = P(x) \tag{2.37}$$

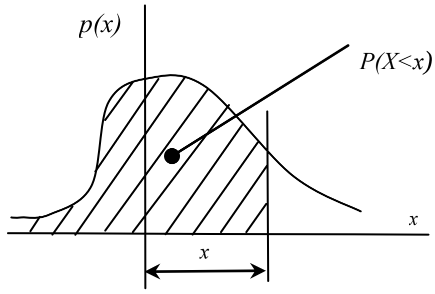


Рис. 2.5

Вероятность P(x) как функция x называется интегральной функцией распределения, имеет смысл кумулятивной (накопленной) вероятности и обладает следующими свойствами.

1. *P(x)* – непрерывная возрастающая функция; ее приращение в промежутке (x_1,x_2) равно вероятности для величины X попасть в этот промежуток:

$$P(x_1<X<x_2)=P(x_2)-P(x_2)=\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx. \tag{2.38}$$

2. Предельные свойства *P(x)* имеют вид

$$\lim_{x\to-\infty} P(x)=0, \quad \lim_{x\to\infty} P(x)=1. \tag{2.39}$$

3. Поскольку *P(x)* определена как функция верхнего предела в интервале (2.37), имеем

$$P'(x)=\frac{dP(x)}{dx}=p(x). \tag{2.40}$$

4. Для вероятности неравенства $X\ge x$ получаем

$$P(X\ge x)=1-P(X<x)=1-P(x). \tag{2.41}$$

Запишем еще формулы для *моментов непрерывного распределения вероятности.* Эти формулы повторяют, в сущности, (2.25)–(2.27) при замене в них суммирования интегрированием.

Математическое ожидание (начальный момент первого порядка)

$$\nu = M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx. \tag{2.42}$$

Соответственно

$$M[Y]=M[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx. \tag{2.43}$$

Начальные и центральные моменты *к*-го порядка:

$$\nu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{\kappa} p(x)dx \quad ; \quad \mu_{\kappa} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-\nu)^{\kappa} p(x)dx \,. \tag{2.44}$$

В частности, дисперсия непрерывного распределения будет вычисляться по тем же формулам (2.27):

$$D\left[X\right] = \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \sigma_x^2 \tag{2.45}$$

В качестве примера вычислим *ν=M[X], ν₂, Д[X]* для показательного закона распределения (2.36). Имеем:

$$\left.\begin{array}{ll} \nu = M\left[X\right] = \int\limits_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \dfrac{1}{\lambda}, & \nu_2 = \int\limits_0^{\infty} X^2 \lambda e^{-\lambda x}dx = \dfrac{2}{\lambda^2} \\ D\left[X\right] = \nu_2 - \nu^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}; & \sigma_X = \dfrac{1}{\lambda} \end{array}\right\}. \tag{2.46}$$

В качестве иллюстрации применения введенных понятий и определений рассмотрим *надежность элемента системы при изменяющемся времени работы.*

Ранее в качестве одной из характеристик надежности работы оборудования была использована вероятность безотказной работы $P_o(t)$. Вероятность противоположного события – возникновения хотя бы одного отказа в интервале *(0,t)* – определялась так:

$$Q\ (t) = 1 - P_o(t).$$

Если рассматривать момент времени возникновения отказа элемента (начавшего работать при *t=0*) как случайную величину *T*, то *вероятность Q(t)* является *интегральной функцией распределения этой величины,* поскольку именно она, а не $P_o(t)$, обладает свойствами (2.38) – (2.41).

Следовательно, дифференциальной характеристикой надежности является ее производная – плотность распределения времени отказов:

$$p\ (t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{dP_o}{dt}\,. \tag{2.47}$$

Найдем *к*-й начальный момент распределения $P_i(t)$:

$$\nu_K = \int\limits_0^{\infty} t^K p(t)dt = -\int\limits_0^{\infty} t^K \frac{dP_o}{dt}dt = K\int\limits_0^{\infty} t^{K-1}P_o(t)dt\,. \tag{2.48}$$

При вычислении (2.48) была использована формула интегрирования по частям и второе свойство функции *Q(t)* (формула (2.39)), дающее при *t=0* $P_o(0)=1$, а при $t\to\infty$ $\lim\limits_{t\to\infty} P_o(t) = 0$.

Таким образом, начальный момент первого порядка для распределения *p(t)* – *среднее время наработки между отказами (*среднее время безотказной работы).

$$M\left[T\right] = \int\limits_0^{\infty} P_o(t)dt\,. \tag{2.49}$$

Дисперсия времени безотказной работы элемента системы

$$D\left[T\right] = \sigma_T^2 = \nu_2 - \nu^2 = 2\int\limits_0^{\infty} tP_o(t)dt - \left(\int\limits_0^{\infty} P_o(t)dt\right)^2. \tag{2.50}$$

Основные законы распределения непрерывных случайных величин

Рассмотренные законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин (биномиальный, Пуассона, экспоненциальный) конечно же не исчерпывают всех практически важных распределений случайных величин. При исследовании надежности схем электроснабжения, кроме перечисленных, чаще всего применяется *нормальный закон распределения* (распределение Гаусса), *гамма-распределение, «ХИ-квадрат» распределение* и *распределение Вейбулла.*

Нормальный закон распределения является, пожалуй, важнейшим практическим распределением, которому следуют случайные величины огромного количества математических, физических, технических, биологических, социальных задач вероятностного плана. Согласно этому закону распределены, например, ошибки измерения токов, напряжений, мощностей, значения предразрядных времен при испытании электрической прочности изоляции, длительность ремонтов, величина суммарной нагрузки потребителей, пороговые значения токов при исследовании электробезопасности и т.д.

Плотность распределения вероятности для нормального закона описывает функция [7]

$$n(x,a,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty, \tag{2.51}$$

имеющая два параметра: a – координата центра группирования (математическое ожидание) и σ – среднее квадратическое отклонение.

Интегральная функция нормального распределения имеет вид

$$.\,N(x,a,\sigma)=\int_{-\infty}^{x}n(x,a,\sigma)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx. \tag{2.52}$$

Интеграл в (2.52) аналитически не вычислим, но протабулирован для *нормированного распределения* (не зависящего от a и σ) *случайной величины* $z=(X-a)/\sigma$, для которой интегральная функция распределения вероятности имеет вид

$$P(Z<z)=P\left(\frac{X-a}{\sigma}<z\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{\nu^2}{2}}d\nu=N(z,0,1), \tag{2.53}$$

$$\frac{dN(z,0,1)}{dz}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}=n(z,0,1). \tag{2.54}$$

Таблицы $n(z,0,1)$ и $N(z,0,1)$ приведены в [7]. Кроме того, функция $N(z,0,1)$ в форме *интеграла вероятностей* (интеграла ошибок) содержится в таблицах специальных функций (см., напр., [11] , [12]).

Поясним порядок практических расчетов вероятностей по таблицам [7].

Для определения вероятности $P(x_1<X<x_2)$ нахождения в интервале (x_1,x_2) случайной величины X, следующей нормальному закону, следует вычислить интеграл:

$$P(x_1<X<x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{\frac{x_2-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz,\quad z=\frac{x-a}{\sigma}. \tag{2.55}$$

Вычисление проводится с помощью функции Лапласа:

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{z}e^{-\frac{\nu^2}{2}}d\nu,$$

приводимой в [7] для интервала $0\le z\le 5$ с шагом $\Delta z=0{,}01$.

$\Phi_O(z)$ связана с интегральной функцией нормального распределения соотношением

$$N(z,0,1)=0{,}5+\Phi_O(z)$$

и обладает следующими свойствами:

$$\Phi_O(0)=0,\ \ \Phi_O(-\infty)=-1/2,\ \ \Phi_O(+\infty)=1/2,\ \ \Phi_O(-z)=-\Phi_O(z).$$

Для вычисления искомой вероятности через $\Phi_O(z)$ имеем очевидную формулу

$$P(x_1<X<x_2)=\Phi_O\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi_O\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right). \tag{2.56}$$

Определим по (2.56) и таблицам [7] значения вероятностей попадания в интервалы ($x_1=a-\sigma,\ x_2=a+\sigma$), ($x_1=a-2\sigma,\ x_2=a+2\sigma$), ($x_1=a-3\sigma,\ x_2=a+3\sigma$). Результаты занести в таблицу (по образцу табл. 2.3).

Таблица 2.3

Границы интервала	x_1	$a-\sigma$	$a-2\sigma$	$a-3\sigma$
	x_2	$a+\sigma$	$a+2\sigma$	$a+3\sigma$
Вероятность $P(x_1<X<x_2)$		0,6827	0,9545	0,9973

Как видно из табл. 2.3, вероятность нахождения случайной величины в границах «трехсигмового» интервала ≈1 (99,7 %), поэтому *сечения $a\pm3\sigma$ принимаются за границы практически возможных значений нормально распределенной случайной величины.*

Некоторые теоремы теории вероятностей, связанные с нормальным распределением

Одной из основных задач теории вероятностей является поиск и изучение закона распределения суммы большого числа независимых слагаемых. Нахождение его по законам распределения слагаемых называется композицией распределений. Относительно суммы независимых величин справедлива центральная предельная теорема, установленная русскими математиками А.А. Марковым (1856 – 1922) и А.М. Ляпуновым (1857– 1918) [7]: *сумма достаточно большого числа независимых (или слабозависимых) элементарных слагаемых распределена асимптатически нормально, т.е. стремится к нормальному закону распределения*.

Опыт показывает, что, когда число слагаемых порядка десяти, закон распределения суммы может быть заменен нормальным. Например, суммарное потребление электроэнергии многоквартирного дома следует нормальному закону.

Если суммируются нормальные распределения, то их композиция при любом числе слагаемых подчинена тому же закону.

Так, при суммировании двух распределений

$$n_1(x,a_1,\sigma_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}};$$

$$n_2(x,a_2,\sigma_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

сумма подчинена нормальному закону с $n\left(x,a_1+a_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$[7].

Важнейшее свойство нормального распределения – его *предельное свойство, заключающееся в том, что к нормальному распределению при определенных условиях приближаются другие законы распределения* [7].

Рассмотрим биномиальное распределение.

Пусть величина X следует биномиальному закону с параметрами p и n. Перейдем к вспомогательной величине (нормируем величину X) $z=\frac{X-np}{\sigma}=\frac{X'}{\sigma}$, где $\sigma=\sqrt{npq}$ – среднее квадратическое отклонение, X' – отклонение X от центра. В данном случае имеет место *теорема Лапласа*: *если n неограниченно возрастает, то при любом z*

$$P\left(\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le z\right)\to\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{U^2}{2}}dU=N(z,0,1)=0.5+\Phi_0(z),$$

т.е. вероятность того, что нормированная величина X, распределенная по биномиальному закону, будет меньше данного числа z, стремится с ростом n к нормальной функции распределения.

На основании этой теоремы можно ожидать, что в потоке отказов при достаточно большом их числе время возникновения отказа следует нормальному закону распределения:

$$n\left(t,T_{cp},\sigma\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(t-T_{CP}\right)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (2.57)$$

где T_{cp} – математическое ожидание времени между отказами, σ – среднее квадратическое отклонение.

Когда p мало и np невелико можно воспользоваться формулой закона Пуассона (2.32).

Вместо величины X – числа положительных исходов независимых испытаний – часто рассматривается величина $\frac{x}{n}=W_n\left(A\right)$ – частость появления события А.

Так как

$$\frac{X-np}{\sqrt{npq}}=\frac{\frac{x}{n}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{W_n-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}},$$

то

$$P\left(\frac{\frac{x}{n}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\le z\right)\approx N\left(z,0,1\right)=0,5+\Phi_0\left(z\right).$$

Проиллюстрируем сказанное на задаче определения вероятности P(A)=p случайного события A по результатам испытаний [7].

Пусть результаты n независимых испытаний дали частость $W_n=\frac{x}{n}$ x появлений события А. Теоретически оправдано в длинной серии испытаний полагать, что $p\approx\frac{x}{n}=W_n$. Это равенство даже при больших n осуществляется с некоторой погрешностью и необходимо знать ее пределы.

Воспользуемся теоремой Лапласа, полагая, что величина

$\frac{W_n-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=z,\quad q=1-p$ приближенно следует нормальному закону .

Для каждого уровня вероятности

$$P\left\{-t_p<\frac{W_n-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}<t_p\right\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t_p}^{t_p}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=2\Phi_0\left(t_p\right)$$

можно найти, используя таблицы функции Лапласа $\Phi_0(z)$, число t_p, определяющее границы интервала, в котором находится искомое значение p.

Если выбранное значение $P=2\Phi_0(t_p)$ близко к единице, то практически достоверно, что при найденном t_p

$$\left|\frac{W_n-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right|<t_p,\quad \text{или}\quad \left|W_n-p\right|<t_p\sqrt{\frac{p\left(1-p\right)}{n}}, \qquad (2.58)$$

т.е. абсолютное значение разности частости W_n и вероятности p меньше числа

$t_p\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$. Из этого неравенства можно найти границы, в которых находится значение вероятности p при заданной частости W_n и найденном значении t_p (заданном уровне вероятности P).

Решаем (2.58):

$$(W_n - p)^2 < t_p^2\,\frac{p(1-p)}{n},$$

или

$$p^2\left(1-\frac{t_p^2}{n}\right) - p\left(2W_n + \frac{t_p^2}{n}\right) + W_n^2 < 0\,.$$

Этот многочлен второй степени имеет два действительных корня:

$$\left.\begin{aligned} p_1(W_n,n) &= \frac{2nW_n + t_p^2 - t_p\sqrt{D}}{2\left(n+t_p^2\right)},\\ p_2(W_n,n) &= \frac{2nW_N + t_p^2 + t_p\sqrt{D}}{2\left(n+t_p^2\right)}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.59)$$

$$D = 4nW_n\left(1-W_n\right)+t_p^2;\quad 0 < p_1\left(W_n,n\right) < p_2\left(W_n,n\right) < 1\,.$$

Значения p_1 и p_2 являются границами интервала, в котором расположена неизвестная вероятность p.

$$p_1(W_n,n) < p < p_2(W_n,n).$$

Другими словами, интервал $\left[\,p_1(W_n,n), p_2(W_n,n)\right]$ покрывает с вероятностью P неизвестное значение p. Такой интервал называется *доверительным интервалом* p_1 , p_2 его границы.

Приведем пример расчета p_1 , p_2.

Пример [7]. При n=200 независимых испытаниях интересующее нас событие A произошло 88 раз. Определить граничные значения p_1 , p_2 с уровнем вероятности P=0,95 для неизвестной вероятности $P(A)=p$.

Решение. Из таблиц функции Лапласа [7, с. 466] находим для $\Phi_0=0{,}95/2=0{,}475$ значение $t_p\approx 2$. По найденному значению t_p и заданной частости W_n =88/200=0,44 определяем по формулам (2.59)

$$p_1(0{,}44,\ 200)\approx 0{,}37;\ ,\ p_2(0{,}44,\ 200)\ \approx 0{,}51.$$

Таким образом, доверительной вероятности P=0,95 отвечает в данном случае интервал неизвестной вероятности $P(A)=p$: $0{,}37<p<0{,}51$.

Это означает, что с вероятностью, не меньшей 0,95, можно утверждать, что найденный интервал охватывает искомое значение вероятности события A.

Рассмотренный метод оценки вероятности пригоден лишь при достаточно больших n. Практически приемлемый результат получается при pnq>9.

Если это условие не соблюдается, то доверительный интервал для неизвестной вероятности строится иначе [7].

Доверительный интервал

$$p_{M\alpha} < p < \tilde{p}_{M\alpha},$$

построенный на частости *M* и отвечающий доверительной вероятности, не меньшей *1–2α,* находится по номограммам и таблицам. Для доверительной вероятности в пределах 0,9–0,8 такие номограммы построены при числе наблюдений $n \geq 5$.

Для доверительных вероятностей 0,95–0,99 имеются таблицы при различных значениях частости *M* и числу наблюдений противоположного события *n–x* в серии из *n* наблюдений.

Гамма распределение

Это распределение в теории надежности применяется для описания характера изменения параметров установок в первый период эксплуатации (период приработки), в период старения и для исследования отказов резервированных систем. Если отказ устройства или системы возникает тогда, когда происходит не менее *к* отказов его элементов, а отказы элементов подчинены экспоненциальному закону с параметром λ_0, плотность вероятности отказов определяется как p(t)=0 (t<0),

$$p(t) = \frac{\lambda_0^{\kappa} t^{\kappa-1}}{\Gamma(\kappa)} e^{-\lambda_0 t}, \quad (t \geq 0),$$

где $\Gamma(\kappa) = \int\limits_0^{\infty} x^{\kappa-1} e^{-x} dx$ – гамма-функция, определяемая для целочисленных значений аргумента по формуле Г(к)=(к–1)!

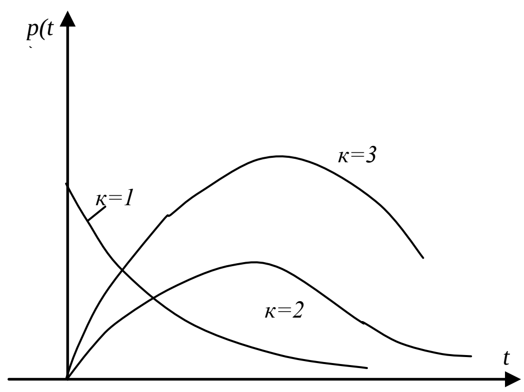


Рис. 2.6

Этому распределению подчинено время отказов (среднее время безотказной работы) резервированных устройств, отказ которых вызывается отказом *к* их элементов. При *к*=1 гамма-распределение совпадает с экспоненциальным распределением.

Пример. Трансформаторы Т1,Т2 работают параллельно, причем один из них является резервным. Приняв интенсивность отказов λ_0,=0,035 1/год (данные для трансформаторов 6,10кВ [6]) и плотность вероятности отказов для каждого из них $p_0(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$, определить вероятность безотказной работы данной системы электроснабжения в течение *t* =10 лет и среднее время безотказной работы. Сравнить эти величины с аналогичными показателями надежности для одного трансформатора.

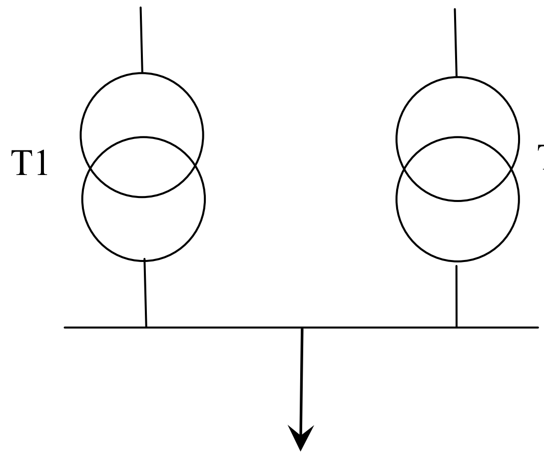


Рис. 2.7

Решение. Полагаем, что для плотности отказов данной СЭС имеем гамма-распределение

$$p(t)=\frac{\lambda_0^2 t}{\Gamma(2)}e^{-\lambda_0 t},\quad \Gamma(2)=1!=1\,.$$

Соответственно интегральная функция распределения вероятности отказов принимает вид

$$Q(t)=\int_0^t p(\tau)\,d\tau=\int_0^t \lambda_0^2\,\tau\, e^{-\lambda_0\tau}d\tau=1-e^{-\lambda_0 t}-\lambda_0 t e^{-\lambda_0 t}\,.$$

Вероятность безотказной работы системы

$$P(t)=1-Q(t)=(1-\lambda_0 t)e^{-\lambda_0 t}.$$

Среднее время безотказной работы

$$T_{0cp}=\nu_1=\int_0^\infty tp(t)dt=\int_0^\infty P(t)dt=\frac{2}{\lambda_0}$$

(формулы 2.48, 2.49)

При t=10 лет получаем *p(10)*=0,951, $T_{0\ \text{ср}}\approx 57{,}14$ года.

Для одного трансформатора

$$Q(t)=\int_0^t p(\tau)d\tau=\int_0^t \lambda_0 e^{-\lambda_0\tau}d\tau=1-e^{-\lambda_0 t};$$

$$P(t)=1-Q(t)=e^{-\lambda_0 t}\quad,\quad P(10)=0{,}705;$$

$$T_{0cp}=\frac{1}{\lambda_0}\approx 28{,}6\ \textit{года}.$$

***ХИ* квадрат-распределение (χ^2 -распределение)**

Это распределение важно при решении задач, связанных с оценкой параметров надежности, определяемых при испытаниях или эксплуатации оборудования.

Рассмотрим n независимых случайных величин $X_1, X_2,\ldots X_n$, каждая из которых распределена по нормальному закону с параметрами a_i=0, σ_i=1,$N(X_i,0,1)$:

$$n_i\left(x_i,0,1\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_i^2}{2}}\,. \tag{2.60}$$

Так как величины x_i независимы и каждая имеет плотность (2.60), то совместная плотность вероятности (плотность вероятности совместного наступления всех n событий), выразится следующим образом [7]:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_1^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_2^2}{2}}\ldots\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_n^2}{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}. \quad (2.61)$$

Сумму квадратов в показателе экспоненты в формуле (2.61) принято обозначать так:

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \quad , \quad 0\le x\le\infty. \quad (2.62)$$

Закон распределения $\kappa_n(x)$ – суммы квадратов n независимых нормальных величин носит название «χ^2- распределение». Число n называется числом степеней свободы.

$$k_n(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}. \quad (2.63)$$

При $n=1$ и $n=2$ $k_n(x)$ убывает с ростом x, начиная с $n=3$, график представляет собой одномодальную асимптотическую кривую [7].

Две независимые величины, распределенные по законам χ^2 с n и p степенями свободы (т.е. $k_n(x)$ и $k_p(x)$), дают в сумме величину $\chi_n^2+\chi_p^2$, распределенную также по закону χ^2 с $n+p$ степенями свободы.

$$M[\chi_n^2]=n \ , \ Д[\chi_n^2]=2n.$$

Для вероятностей $P(\chi^2\ge\chi_0^2)$, где χ_0 – какое-либо заданное положительное число, имеем

$$P\left(\chi^2\ge\chi_0^2\right)=\int_{X_0^2}^{\infty}k_n(x)dx.$$

Обратно, для каждого уровня вероятности $\alpha=q/100$, можно рассчитать соответствующий верхний «q % предел», т.е. найти такое число χ_q^2, что $P(\chi^2>\chi_q^2)=\alpha$.

Аналогично этому X_{q1} будет нашим «q_1 % пределом», если

$$P\left(\chi^2\le\chi_{q1}^2\right)=\frac{q_1}{100}=\alpha_1.$$

Значения χ_q^2 для каждого q приведены в таблицах [7, с. 469] составленных для $P(\chi^2>\chi_q^2)$ от 0,99 до 0,001 при числе степеней свободы от 1 до 30.

Распределение Вейбулла [6]. С его помощью исследуются интенсивности отказов для периодов приработки и старения. Плотность отказов в этом распределении

$$p(t)=\frac{b}{a}t^{b-1}\exp\left(-\frac{t^b}{a}\right), \quad (2.64)$$

где a и $в$ – постоянные.

При $в=1$ распределение Вейбулла превращается в экспоненциальное; при $в<1$ – повышенная интенсивность отказов $\lambda(t)$ в период приработки, при $в=1{,}5$ - $\lambda(t)\approx const$, при $в=2$ – $\lambda(t)$ слабо зависит от времени, при $в=3$ существенная зависимость $\lambda(t)$ от времени.

Вероятность безотказной работы

$$P(t)=\exp\left(-\frac{t^b}{a}\right).$$

Вероятность отказа

$$Q(t)=1-\exp\left(-\frac{t^b}{a}\right).$$

Среднее время безотказной работы

$$T_{0cp}=a^{b-1}\Gamma\left(b^{-1}+1\right),\ \Gamma\left(b^{-1}+1\right)=\int_0^{\infty}xb^{-1}e^{-x}dx.$$

Интенсивность отказов

$$\lambda(t)= в a^{-1}\, t^{в-1}.$$

Во всех приведенных формулах *в* – безразмерная величина, *а* – имеет размерность времени.

2.3. Понятие о случайных процессах Пуассона и Маркова*

Случайный процесс был определен как изменение непрерывной или дискретной случайной величины X в зависимости от изменения неслучайного параметра (времени, пространственных координат и т.д.). Дополним это определение понятиями *математического ожидания* случайного процесса и *дисперсии* случайного процесса, являющихся его характеристиками.

Математическим ожиданием случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $M[X(t)]$, значение которой при каждом значении $t= t_0$ равно математическому ожиданию $M[X(t_0)]$ той случайной величины $X(t_0)$, которая отвечает этому значению параметра.

Дисперсией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $D[X(t)]$, значение которой при каждом значении $t= t_0$ равно дисперсии $DX(t)$ той случайной величины $X(t_0)$, которая отвечает этому значению параметра.

Процесс Пуассона [7]

Рассмотрим поток случайных событий, которые регистрируются в порядке их поступления, *например поток отказов оборудования (*вызовов абонентов, поступающих на телефонную станцию, актов распада радиоактивного вещества и т.д.).

Предположения о характере процесса

1. Пусть $(t_0,\ t_0+t)$ – промежуток времени длительности t, начинающийся в произвольный момент t_0. *Предполагаем,* что *вероятность* того, что в этом промежутке произойдет ровно $к$ событий ($к$=0,1,2…) *зависит только от длины t этого промежутка* и не зависит от начального момента t_0. Поэтому эту вероятность обозначаем $\omega_к(t)$ (не указывая начало, а лишь длину). *Это свойство неизменности вероятностного режима для всех промежутков одинаковой длительности называют* ***однородностью процесса****.*

2. Пусть $t_0 < t_1 < \ldots t_n$; рассмотрим последовательные промежутки времени

$(t_0, t_1); (t_1, t_2); \ldots (t_{n-1}, t_n)$,

не накладывающиеся друг на друга. Через $m_1, m_2, \ldots\ m_n$ обозначаем числа наступления событий (отказов) в этих промежутках. Считаем, что числа m_i $(i=1,2,\ldots n)$ – случайные и независящие друг от друга величины, т.е. в данном потоке *отсутствует последствие.* Пусть $X(t)$ – число событий потока с начала регистрации до момента t. Это будет случайная функция, принимающая лишь целочисленные значения.

3. Обозначим через $\psi(t)$ вероятность наступления в произвольном промежутке длины t не менее двух событий:

$$\psi(t)=\omega_2(t)+\omega_3(t)+\ldots \qquad (2.65)$$

Так как $\omega_0(t)+\omega_1(t)+\omega_2(t)+\ldots=1$, то

$$\psi(t)=1-\omega_0(t)-\omega_1(t). \qquad (2.66)$$

Будем предполагать, что $\psi(t)$ при бесконечно малых t есть бесконечно малая высшего порядка, т.е.

$$\frac{\psi(t)}{t}\to 0 \text{ при } t\to 0.$$

Это свойство называется свойством *ординарности потока (невозможность появления двух или большего числа событий (отказов) на очень малом промежутке времени).*

4. Предположим еще, что *вероятность того, что событие наступит ровно один раз в очень малом промежутке времени t, пропорционально t:*

* Марков Андрей Андреевич (1852–1922). Профессор Петербургского университета, специалист по теории чисел, теории вероятностей и математическому анализу.

$$\frac{\omega_1(t)}{t} \to \lambda \text{ при } t \to 0, \tag{2.67}$$

где $\lambda>0$.

Можно доказать, что в предположениях 1– 4 имеем

$$\omega_m(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}, \tag{2.68}$$

т.е. число появлений события (число отказов) в каком-либо промежутке длины t распределено по закону Пуассона с параметром (математическим ожиданием), равным $\lambda\, t$.

Приведем доказательство для случая $m=0$, для иных значений m доказательство дано в [7].

Вероятность непоявления события (безотказной работы) на интервале $(t,t+\Delta t)$, ввиду того, что интервалы $(0,\ t)$ и $(t,t+\Delta t)$ взаимно не перекрываются, можно определить согласно свойству 2 по формуле

$$\omega_0\ (t+\ \Delta t)=\omega_0\ (t)\ \omega_0\ (\Delta t), \tag{2.69}$$

Согласно свойствам 3 и 4 потока отказов можем записать

$$\omega_0\ (\Delta t)=1-\omega_1\ (\Delta t) - \psi(\Delta t;$$

$$\psi(\Delta t) \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0;$$

$$\omega_1\ (\Delta t)= \lambda\ \Delta t.$$

Подставляя эти соотношения в (2.69) и устремляя Δt к нулю, получаем дифференциальное уравнение

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\omega_0(t+\Delta t)-\omega_0(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega_0(t)}{dt} = -\lambda\omega_0(t),$$

решением которого при очевидном условии $\omega_0(0)=1$ является функция

$$\omega_0\ (t)=e^{-\lambda t}. \tag{2.70}$$

Эта функция дает вероятность того, что в промежутке (t_0,t_0+t) не наступит ни одного события (при любом t_0 согласно свойству 1 потока), т.е. в применении к потоку отказов дает вероятность безотказной работы $P_0(t)$. Соответственно интегральная функция вероятности отказов и плотность распределения вероятности отказов имеет вид

$$Q(t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}\ ,\ p(t) = \frac{dQ}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}\ . \tag{2.71}$$

Для показательного закона распределения (2.71) средний срок безотказной работы и среднее квадратическое отклонение обратно пропорциональны интенсивности отказов λ:

$$T_{0cp} = \frac{1}{\lambda},\quad \sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

Обозначим через ξ случайную длительность промежутка до первого отказа после момента времени t_0 *и* вычислим вероятность его появления в промежутке $(t_0\,,\ t_0+t\ +\ \Delta t)$ при условии, что в промежутке $(t_0\,,\ t_0+t)$ отказа не было. Другими словами, нужно найти условную вероятность отказа в промежутке $t<\xi<t+\Delta t$ при условии, что $\xi>t$.

Согласно определению условной вероятности можем записать

$$P(t<\xi<t+\Delta t/\xi>t) = \frac{P(t<\xi<t+\Delta t)}{P(\xi>t)}.$$

По выражениям (2.70), (2.71) получаем

$$P(t<\xi<t+\Delta t) = \lambda e^{-\lambda t}\Delta t \quad ,\quad P(\xi>t) = e^{-\lambda t}\ .$$

Следовательно

$$P(t<\xi<t+\Delta t/\xi>t) = \lambda\Delta t\ . \tag{2.72}$$

Этот результат соответствует свойству 4 потока отказов, т.е. условная вероятность появления отказа в промежутке $(t_0, t_0+t+\Delta t)$ при условии, что длительность его ожидания была больше t, равна безусловной вероятности $\lambda\Delta t$ его появления на интервале Δt. Другими словами, вероятность появления отказа не зависит от продолжительности его ожидания. Это парадоксальное свойство экспоненциального распределения (2.71) в ряде случаев хорошо согласуется с действительностью и *является характеристическим для объектов с вероятностными законами [2.71]*.

Подведем итог рассмотрения случайного процесса Пуассона (потока отказов).

Исследуя поведение случайной функции $X(t)$, – числа отказов с начала регистрации $(t=0)$до момента времени t – имеем закон распределения для $X(t)$(распределение числа отказов) и его характеристики в виде

$$P[X(t)]=m]=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}, \tag{2.73}$$

$$M[X(t)]=\lambda t, \tag{2.74}$$

$$D[X(t)]=\lambda t. \tag{2.75}$$

Две последние формулы записаны согласно [7].

Процесс Маркова. Рассмотренный процесс Пуассона, практически реализующийся как поток отказов, характерен для работы элементов или объектов, которые после отказа сразу заменяются или мгновенно восстанавливаются. Если же система состоит из восстанавливаемых элементов, а отказ и восстановление регистрируются во времени как случайные события, имеем случайный процесс отказов и восстановлений.

В системе, состоящей из n элементов, каждый из которых может находиться в двух состояниях – работоспособном состоянии и состоянии отказа (восстановления) – возможны 2^n состояния системы в целом. Случайный процесс $X(t)$ перехода системы из одного состояния в другое будет характеризоваться целыми числами 0,1,2,… 2^n–1, отвечающими возможным состоянием системы.

Процесс, протекающий в системе, *называется марковским (или потоком без последствия), если для каждого момента времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние.*

Процесс Маркова называется *однородным*, если вероятности перехода от состояния i к состоянию j для двух любых моментов t_1 и t_2 $p_{ij}(t_1, t_2)$ зависят лишь от $t_2 - t_1 = t$, т.е.
$p_{ij}(t_1, t_2)= p_{ij}(t)$.

Для того чтобы получить полное описание марковского процесса при известных переходных вероятностях $p_{ij}(t)$ достаточно знать начальное распределение вероятностей
$p_i(0)$, где $i=0,1,2,\ldots\ 2^n-1$. При этом имеем

$$\sum_i p_i(0)=1. \tag{2.76}$$

Далее по формуле полной вероятности получаем

$$p_j(t)=\sum_i p_i(0)p_{ij}(t). \tag{2.77}$$

Если вероятности $p_j(t)$ не зависят от времени, т.е. $p_j(t)= p_j$ для всех j, то *распределение* p_j *называется стационарным (*сохраняющимся во времени). Во многих практически важных случаях для процессов Маркова наблюдается следующая важная закономерность. При возрастании t распределение $p_j(t)$ приближается к некоторому стационарному распределению

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t)=p_{j\infty},$$

т.е. по истечении достаточно большого времени существует вполне определенная, не зависящая от времени вероятность перехода системы в то или иное состояние.

Далее будут рассмотрены математические модели, иллюстрирующие применение теории марковских процессов к задачам электроснабжения.

3. Методы определения показателей надежности систем электроснабжения и математические модели для оценки их надежности

При определении показателей надежности объектов минимальным числом показателей для *восстанавливаемых объектов* будет *два*, а для невосстанавливаемых – *один*. Для восстанавливаемых объектов таковыми могут быть единичные показатели *безотказности* (вероятность безотказной работы, частота отказов, наработка на отказ) и *ремонтопригодности* (интенсивность восстановления, среднее время восстановления). Возможно также сочетание одного из единичных показателей с комплексным, характеризующим одновременно и другие свойства, например с *коэффициентом готовности*. Для невосстанавливаемых объектов обычно определяется *вероятность безотказной работы или интенсивность отказов.*

Указанный минимум показателей достаточен для определения других характеристик и решения практических задач по расчету надежности.

3.1. Аналитические методы расчета показателей надежности

К этим методам относятся все разработки, базирующиеся на использовании теорем и формул теории вероятностей (сложение, умножение, полная вероятность и т.д.). С их помощью устанавливаются связи между событиями или состояниями для отдельных элементов и событиями или состояниями для систем, образованных этими элементами.

Поскольку состояние систем *C(t)* возникает вследствие сложного случайного события *A(t)*, рассмотрим *вероятность безотказной работы системы* на интервале времени [0,t] и *вероятность застать ее работоспособность в момент времени* t, которые можно определить как функции

$$P_0(t) = P\left[A(t)\right];\qquad K_Г(t) = P\left[C(t)\right] \tag{3.1}$$

(вторая относится к восстанавливаемым элементам).

Рассмотрим системы, состоящие только из последовательно или параллельно соединенных элементов, понимая эти соединения как соединения *по надежности* (см. разд. 2.1).

Система из *n* элементов, соединенных последовательно

Сложное событие безотказной работы системы $A_{посл}$ определяется в этом случае через события безотказной работы элементов системы $A_1, A_2 ... A_n$ как их произведение:

$$A_{посл} = A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i .$$

Вероятность этого события вычисляется на основе теоремы умножения:

$$P\left(A_{посл}\right) = P_{0посл}\left(t\right) = P\left(A_1\right) P\left(A_2 / A_1\right) ... P\left(A_n / A_1, A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1}\right). \tag{3.2}$$

Если отказы элементов независимы, имеем

$$P\left(A_i / A_1, A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1}\right) = P\left(A_i\right) = P_{oi}\left(t\right);$$

$$P_{0посл}\left(t\right) = \prod_{i=1}^{n} P_{0i}(t) . \tag{3.3}$$

Вероятность отказа системы

$$Q_{посл}(t)=1-P_{0посл}(t)=1-\prod_{i=1}^{n}\left[1-Q_i(t)\right]. \qquad (3.4)$$

При $Q_i << 1$ допустимо воспользоваться приближенной формулой [7]:

$$Q_{посл}(t)\approx Q_1(t)+Q_2(t)+...+Q_n(t)\approx\sum_{i=1}^{n}Q_i(t),$$

дающей результат с погрешностью, не превышающей величину $\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}Q_i(t)\right]^2$.

Учитывая, что $P_0(t)=\exp\left[-\int_0^t\lambda(t)dt\right]$,

можем записать

$$\exp\left[-\int_0^t\lambda_{посл}(t)dt\right]=\prod_{i=1}^{n}\exp\left[-\int_0^t\lambda_i(t)dt\right]=\exp\left[-\int_0^t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)dt\right], \qquad (3.5)$$

откуда находим

$$\lambda_{посл}(t)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t).$$

Из (3.6) следует, что если интенсивности отказов постоянны, то постоянна интенсивность отказа системы и закон ее безотказной работы является экспоненциальным.

Если система состоит из последовательно соединенных *восстанавливаемых элементов*, то необходимо определить для нее еще один показатель надежности. Наиболее просто определяется коэффициент готовности $K_Г(t)$ как *вероятность работоспособного состояния* (3.1):

$$K_Г(t)=P\left[C_{посл}(t)\right]=P\left[C_1(t)\right]\cdot P\left[C_2(t)/C_1\right]...P\left[C_n(t)/C_1C_2C_{n-1}\right]. \qquad (3.6)$$

Если элементы независимы, тогда

$$P\left[C_i(t)/C_1C_2...C_{i-1}\right]=P\left[C_i(t)\right]=K_{Гi}(t); \qquad (3.7)$$

$$K_Г(t)=K_{Г1}(t)K_{Г2}(t)\cdot K_{Гn}(t)=\prod_{i=1}^{n}K_{Гi}(t). \qquad (3.8)$$

Для системы, состоящей из n *параллельно соединенных элементов,* целесообразно определять вероятность неработоспособного состояния и вероятность отказа системы.

Выражение для события отказа системы имеет вид

$$\overline{A}_{пар}=\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_n=\prod_{i=1}^{n}\overline{A}_i. \qquad (3.9)$$

Вероятность этого события

$$P\left(\overline{A}_{пар}\right)=Q_{пар}(t)=P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2/\overline{A}_1\right)...P\left(\overline{A}_n/\overline{A}_1\overline{A}_2A_{n-1}\right). \qquad (3.10)$$

Если все отказы элементов независимы, тогда

$$Q_{пар}(t)=Q_1(t)Q_2(t)...Q_n(t)=\prod_{i=1}^{n}Q_n(t); \qquad (3.11)$$

$$P_{0пар}=1-Q_{пар}(t)=1-\prod_{i=1}^{n}\left[1-P_{0i}(t)\right]. \qquad (3.12)$$

Для системы, образованной из *восстанавливаемых элементов,* в качестве второго показателя определяем вероятность неработоспособного состояния:

$$q_{пар}(t)=1-K_{Гпар}(t)=P\left[\bar{C}_{пар}(t)\right];$$
$$C_{пар}(t)=\bar{C}_1(t)\bar{C}_2(t)...\bar{C}_n(t)=\prod_{i=1}^{n}\bar{C}_i(t), \quad (3.13)$$

$$q_{пар}(t)=q_1(t)q_2(t)...q_n(t)=\prod_{i=1}^{n}q_i(t). \quad (3.14)$$

В качестве иллюстрации рассматриваемых положений теории запишем формулы для показателей надежности резервированных систем из *n* элементов, в которых нормальная работа системы обеспечивается с помощью *r* работоспособных элементов, а *n–r* элементов являются резервными. Отказ системы наступает при выходе из строя *m ≥ (n–r)+1* элементов, если эти отказы произошли одновременно или состояния отказов совпали во времени. Таким образом, отказ системы определяет кумулятивная вероятность

$$Q(t)=Q_n(m)+Q_n(m+1)+...+Q_n(n), \quad (3.15)$$

причем слагаемые этой суммы вычисляются через вероятности отказов и безотказной работы отдельных элементов в $q_i, p_i\,(i=1,2,...n)$ согласно формуле (2.14). В частности, при условии равной надежности элементов получаем из (3.15) и формул биноминального распределения выражение

$$Q(t)=\sum_{k=m}^{n} C_n^k \overset{n-k}{P(t)} q^k(t), C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad (3.16)$$

В данном случае рассмотрено так называемое *постоянное резервирование*, когда все элементы находятся в работе. В случае *резервирования замещением* происходит автоматическое отключение отказавшего элемента и включение резервного. В электроэнергетике *резервирование замещением* представлено устройством АВР; *постоянное замещение – вращающимся* и *скрытым* резервом генераторов, трансформаторов, электродвигателей.

Вероятность безотказной работы системы с резервированием определяется не только надежностью самих элементов, но и надежностью автоматических выключателей, которые в случае постоянного резервирования отключают отказавший элемент, а в случае резервирования замещением еще и включают резерв.

Если при отказе включающей аппаратуры в отключении выводится из строя вся система, то вероятность безотказной работы системы с постоянным резервированием

$$P_c=P_k\cdot P_{oc}, \quad (3.17)$$

где P_k – вероятность безотказной работы системы с кратностью резервирования $k=(n-r)/r$;

P_{oc} – вероятность отсутствия отказа срабатывания при отключении отказавшего элемента.

При резервировании замещением *вероятность отказа системы* определяется формулой полной вероятности

$$Q_c=Q(S/A_1A_2)P(A_1)P(A_2)+Q(S/\bar{A}_1A_2)P(\bar{A}_1)P(A_2)+$$
$$+Q(S/A_1\bar{A}_2)P(A_1)P(\bar{A}_2)+Q(S/\bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2). \quad (3.18)$$

В этом выражении обозначены следующие события и вероятности:

событие A_1 − отключение поврежденного элемента;

событие A_2 − включение резервного элемента;

$\bar{A}_1$ − отказ в отключении поврежденного элемента;

$\bar{A}_2$ − отказ во включении резервного элемента;

$P(A_1), P(A_2), P(\bar{A}_1), P(\bar{A}_2)$ – вероятности перечисленных событий, причем справедливы следующие соотношения:

$Q\left(S/\bar{A}_1A_2\right)-$ условная вероятность отказа системы при отказе в отключении поврежденного элемента;

$Q\left(S/A_1\bar{A}_2\right)-$ то же при отказе во включении резервного элемента;

$Q\left(S/\bar{A}_1\bar{A}_2\right)-$ то же при совпадении двух отказов.

Применение формулы (3.18) проиллюстрируем на примере.

Пример.1.

Потребители питаются от двух независимых источников. Один включен постоянно $\left(И_1\right)$, другой $\left(И_2\right)$ включается действием АВР. Вероятности безотказной работы в течение расчетного периода времени $P\left(И_1\right)=0,90; P\left(И_2\right)=0,99$. Вероятность отказа в отключении выключателя B_1 равна 0,05; вероятность отказа во включении выключателя B_2 равна 0,01 (рис. 3.1).

Определить вероятность безотказной работы СЭС в течение расчетного периода времени с учетом использования резервного источника.

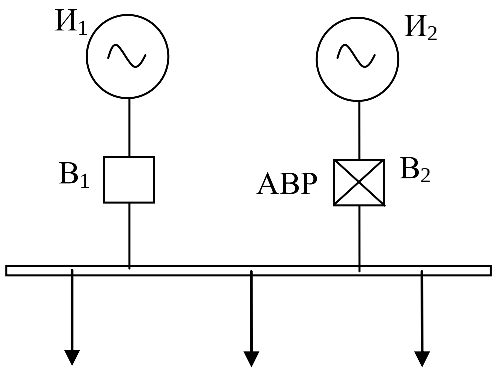


Рис. 3.1

Решение. Задачу решаем, приняв, что любое несрабатывание выключателей приводит к отказу СЭС.

Пусть отключение источника $И_1$ (срабатывание выключателя B_1) − событие A_1; включение источника $И_2$ (срабатывание АВР и выключателя B_2) − событие A_2.

Возможны 4 ситуации (гипотезы):

1. Сложное событие $\bar{A}_1A_2$ − при аварии с $И_1$ выключатель не отключил источник (событие $\bar{A}_1$), источник $И_2$ включается действием B_2;

2. Сложное событие $A_1\bar{A}_2$ − при аварии с $И_1$ он отключается, но не включается резервный источник $И_2$;

3. Сложное событие $\bar{A}_1\bar{A}_2$ − при аварии с $И_1$ он не отключается и не включается $И_2$;

4. Сложное событие A_1A_2 − исправная работа выключателей B_1 и B_2.

Рассчитаем вероятности перечисленных гипотез. Исходными здесь являются

$$P\left(A_1\right)=1-0,05=0,95;\quad P\left(A_2\right)=1-0,01=0,99.$$

Соответственно

$$P\left(\bar{A}_1A_2\right)=0,05\cdot 0,99=0,0495;$$

$$P\left(A_1\bar{A}_2\right)=0,95\cdot 0,01=0,0095;$$

$$P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2\right)=0,05\cdot 0,01=0,0005;$$

$$P\left(A_1A_2\right)=0,95\cdot 0,99=0,9405.$$

Суммируя эти величины, убеждаемся в полноте этой группы гипотез:

$$P\left(\bar{A}_1A_2\right)+P\left(A_1\bar{A}_2\right)+P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2\right)+P\left(A_1A_2\right)=1,$$

вычисляем условные вероятности отказа системы при реализации гипотез.

Согласно сделанному допущению об отказе системы при любом несрабатывании имеем

$$Q\left(S/\bar{A}_1A_2\right)=Q\left(S/A_1\bar{A}_2\right)=Q\left(S/\bar{A}_1\bar{A}_2\right)=1.$$

В случае гипотезы A_1A_2 условная вероятность отказа системы определяется отказом обоих источников:

$$Q\left(S/_{A_1A_2}\right)=Q\left(И_1\right)Q\left(И_2\right)=\left[1-P\left(И_1\right)\right]\left[1-P\left(И_2\right)\right]=\left(1-0,9\right)\left(1-0,99\right)=0,001.$$

Вычисляем вероятность отказа системы по формуле полной вероятности (3.18):

$$Q_c=1\cdot 0{,}0495+1\cdot 0{,}0095+1\cdot 0{,}0005+0{,}001\cdot 0{,}9405=0{,}06014.$$

Вероятность безотказной работы

$$P_C=1-Q_C=0,9396.$$

3.2. Методы и модели для расчета показателей надежности восстанавливаемых объектов, основанные на использовании марковских процессов

Определение процесса Маркова и его основные свойства были кратко рассмотрены в разд. 2.3. Задачей настоящего раздела является изложение методики использования марковских процессов для определения показателей надежности систем из восстанавливаемых элементов и применение этой методики к задачам электроэнергетики.

Марковский процесс перехода системы из состояния *i* к состоянию *j*, если ее элементы могут находится только в двух качествах (работы и восстановления после отказа), однозначно определяется ее состоянием в момент времени t_0, который соответствует состоянию *i,* и значением времени $t>t_0$, для которого получаем состояние *j*, так как ни число отказов, ни число восстановлений элементов системы за время $t-t_0$ не зависит от того, как протекал процесс до момента t_0. Поэтому основной предпосылкой применения аппарата марковских процессов к задачам электроэнергетики является экспоненциальность законов работы и восстановления при $\lambda_K=const$, $\mu_к=const$ (*к* – номер элемента), для которых вероятности отказов и восстановлений элементов зависят только от величины интервала $t-t_0$ и не зависят от предыстории процесса (потоки без последствия). При постоянстве λ_K, $\mu_к$ переходные вероятности $P_{ij}\left(\Delta t\right)$ зависят лишь от величины Δt, т.е. процесс перехода является *однородным* (см. разд. 2.3).

Суть метода состоит в следующем. Обозначим вероятность того, что система с *n* элементами в момент времени *t* находится в состоянии *i* через $P^{(i)}\left(t\right)$, где *i=1,2,...* 2^n *(* 2^n –общее число состояний системы, так как каждый элемент может находиться в двух состояниях). Пусть $P_{ij}\left(\Delta t\right)$ – переходная (условная) вероятность того, что система, находящаяся в момент времени *t* в состоянии *I,* к моменту $t+\Delta t$ перейдет в состояние *j.* На основании формулы полной вероятности для состояния *j* системы в момент $t+\Delta t$ можно записать

$$P^{(j)}\left(t+\Delta t\right)=\sum_{i=1}^{2^n}P^{(i)}\left(t\right)Pij\left(\Delta t\right),\ j=1,2,...2^n. \quad (3.19)$$

Напомним, что рассматриваются только *ординарные процессы* (см. разд. 2.3), т.е. за малый интервал Δt может произойти только один переход из одного состояния в другое.

Вычитая из обеих частей формулы (3.19) вероятность $P^{(j)}(t)$, получаем

$$P^{(j)}(t+\Delta t)-P^{(j)}(t)=\sum_{i=1}^{2^n}P^{(i)}(t)\left[Pij(\Delta t)-\delta_{ij}\right],$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, δ_{ij}=1 при i=j и δ_{ij}=0 при $i \neq j$.

Поделив на Δt и устремив $\Delta t \to 0$, приходим к системе линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dP^{(j)}}{dt}=\sum_{i=1}^{2^n}V_{ij}P^{(i)}(t), \quad j=1,2,\ldots 2^n; \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered} V_{ij}=\lim\frac{Pij(\Delta t)}{\Delta t}, i \neq j, \\ \Delta t \to 0; \\ V_{ii}=\lim\frac{Pii(\Delta t)-1}{\Delta t}, i = j, \\ \Delta t \to 0. \end{gathered} \tag{3.21}$$

Порядок вычисления коэффициентов V_{ii}, V_{ij} будет пояснен далее при рассмотрении конкретной задачи. Сейчас лишь отметим, что, в силу допущения о постоянстве интенсивностей отказов и восстановлений $\lambda_{\hat{e}}, \mu_{\hat{e}}$, все коэффициенты уравнений (3.20) постоянные, не зависящие от времени величины. Начальные значения искомых вероятностей задаются для уравнений (3.20) в форме совокупности величин $P^{(j)}(0)$ $\left(j=1,\ 2,\ \ldots{}^{n}\right)$, образующих полную группу $\sum_j P^{(j)}(0)=1$.

Если по (3.20) определяются только значения вероятностей $P^{(j)}$ при $t \to \infty$ (финальные вероятности), то исходная системы уравнений упрощается за счет $\frac{dP^{(j)}}{dt} \to 0$ и принимает вид

$$\sum_{i=1}^{2^n}V_{ij}P_{\infty}^{(i)}=0,\ j=1,2,\ldots 2^n \tag{3.22}$$

и с учетом условия

$$\sum_{i=1}^{2^n}V_{ij}P_{\infty}^{(i)}=1, \tag{3.23}$$

справедливого и для любого момента времени, позволяет найти финальные вероятности всех состояний системы $P_{\infty}^{(i)}$.

Необходимую для дальнейших расчетов методику вычисления коэффициентов V_{ij} и метод составления уравнений (3.20) с помощью графа состояний и переходов, представляющего функционально-структурные связи элементов, рассмотрим на задаче о работе одного элемента (объекта, установки) в схеме потока отказов и восстановлений, характеризуемого заданными интенсивностями λ, μ.

3.2.1. Расчет вероятностей состояний уединенного элемента в потоке отказов и восстановлений

Один элемент (объект) может находиться в двух состояниях: неработоспособном (состояние «0») и работоспособном (состояние «1»). Полагая интенсивности отказов и восстановлений λ, μ заданными, определим вероятность застать элемент в состоянии «0» $-P^{(o)}(t)$ и вероятность застать его в состоянии «1» $-P^{(1)}(t)$ в произвольный момент времени $0 \le t < \infty$ при известных начальных значениях искомых функций $P^{(0)}(0)$, $P^{(0)}(0)$.

Согласно (3.20) имеем для $P^{(0)}(t), P^{(1)}(t)$ систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dP^{(0)}}{dt} &= V_{00}P^{(0)}(t) + V_{01}P^{(1)}(t); \\ \frac{dP^{(1)}}{dt} &= V_{10}P^{(0)}(t) + V_{11}P^{(1)}(t). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Заданными являются $P^{(0)}(0)$, $P^{(1)}(0)$– начальные значения, удовлетворяющие условию $P^{(0)}(0) + P^{(1)}(0) = 1$. Коэффициенты системы находим по формулам (3.21). Так, коэффициент V_{00} вычисляется следующим образом:

$$V_{00} = \lim \frac{P_{00}(\Delta t) - 1}{\Delta t}, \qquad \Delta t \to 0,$$

где переходная вероятность $P_{00}(\Delta t)$ – это вероятность того, что элемент, находясь в неработоспособном состоянии в момент t, за интервал Δt не будет восстановлен. Используя функцию восстановления $G(\Delta t) = 1 - e^{-\mu\Delta t} \Delta\mu\Delta t$, последовательно получаем $P_{00}(\Delta t) = 1 - G(\Delta t) = 1 - \mu\Delta t, V_{00} = -\mu$. Аналогично определяется коэффициент V_{11}:

$$V_{11} = \lim \frac{P_{11}(\Delta t) - 1}{\Delta t}, \quad \Delta t \to 0,$$

где $P_{11}(\Delta t)$ вероятность того, что элемент, находясь в момент t в работоспособном состоянии, в пределах интервала Δt не откажет. Вероятность безотказной работы на этом интервале $P_{11}(\Delta t) = e^{-\lambda\Delta t} \cong 1 - \lambda\Delta t$, соответственно $V_{11} = -\lambda$. Коэффициент V_{11} вычисляется так:

$$V_{01} = \lim \frac{P_{01}(\Delta t)}{\Delta t}, \qquad \Delta t \to 0,$$

где $P_{01}(\Delta t)$ вероятность того, что в пределах временного интервала Δt элемент, находившийся в работоспособном состоянии, откажет. Имеем $P_{01}(\Delta t) = Q(\Delta t) = \lambda\Delta t$, соответственно $V_{01} = \lambda$.

Коэффициент

$$V_{10} = \lim \frac{P_{10}(\Delta t)}{\Delta t}, \quad \Delta t \to 0,$$

где $P_{10}(\Delta t)$ вероятность того, что в пределах интервала $\Box t$ произойдет восстановление элемента, т.е. $P_{10}(\Delta t) = 1 - e^{-\mu\Delta t} \cong \mu\Delta t$, соответственно $V_{10} = \mu$.

Подставляя в уравнения (3.24) найденные значения коэффициентов, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dP^{(0)}}{dt} &= -\mu P^{(0)}(t) + \lambda P^{(1)}(t); \\ \frac{dP^{(1)}}{dt} &= \mu P^{(0)}(t) - \lambda P^{(1)}(t). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Форма полученных уравнений позволяет предложить простой алгоритм их составления без процедуры вычисления коэффициентов V_{ij}, V_{ji}, основанный на использовании графа состояний и переходов.

При экспоненциальных законах изменения вероятностей рабочего состояния и состояния восстановления изменение состояния «0», например, определяется согласно формуле (3.25) по выражению

$$dP^{(0)} = -\mu P^{(0)}(t)dt + \lambda P^{(1)}(t)dt, \tag{3.26}$$

т.е. потоками событий, переводящих систему из одного состояния в другое. Плотности (интенсивности) этих потоков μ и λ. Изобразив состояния отказа (восстановления) и работы точками «0» и «1» соответственно, изменения этих состояний за время dt можем отобразить с помощью потоков $P^{(0)}\mu dt, P^{(1)}\lambda dt$, имеющих направление согласно уравнениям (3.25) (рис. 3.2).

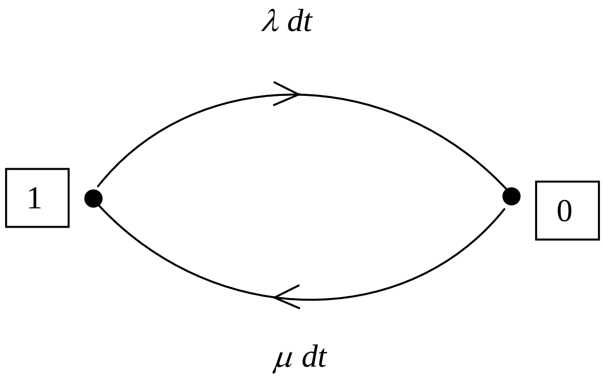


Рис. 3.2

Правило составления дифференциальных уравнений, отвечающих этому графу, следующее.

В левой части каждого уравнения стоит производная $\dfrac{dP^{(1)}}{dt}$, характеризующая скорость изменения вероятности $P^{(i)}$, а в правой части столько членов, сколько ветвей (ребер) графа непосредственно связано с данным состоянием. Если ветвь направлена к данному узлу (на возрастание вероятности данного состояния), то соответствующий член уравнения имеет знак «+» и «–», если ветвь направлена от узла. Каждый член уравнения равен плотности потока событий, переводящих систему из одного состояния в другое, умноженной на вероятность того состояния, из которого осуществляется переход.

Методику решения уравнений (3.25), применяемую далее для решения других задач, проиллюстрируем на случае, когда начальные условия заданы в форме

$$P^{(0)}(0) = 0, \quad P^{(1)}(0) = 1. \tag{3.27}$$

Для решения уравнений используем операторный метод в варианте, основанном на преобразовании Лапласа. Комплексное переменное в изображениях искомых функций обозначаем через s, так что

$$P^{(i)}(s) = \int_0^\infty e^{-st} P^{(i)}(t)dt,$$

а система (3.25) для этих функций имеет вид

$$sP^{(0)}(s)-P^{(0)}(0)=-\mu P^{(0)}(s)+\lambda P^{(1)}(s);$$
$$sP^{(1)}(s)-P^{(1)}(0)=-\mu P^{(0)}(s)+\lambda P^{(1)}(s). \tag{3.28}$$

Решая (3.28), получаем

$$P^{(0)}(s)=\frac{\lambda}{s\left[s+(\mu+\lambda)\right]}; \qquad P^{(1)}(s)=\frac{s+\mu}{s\left[s+(\mu+\lambda)\right]}. \tag{3.29}$$

Соответствующие функции времени находим по теореме разложения (см. любой учебник по ТОЭ), используя формулу

$$f(t)=\frac{F_1(0)}{sF_2(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(s_k)}{s_kF_2(s_k)}e^{s_kt} \tag{3.30}$$

для случая, когда знаменатель функций (3.29) имеет корень s=0. Применив (3.30), находим

$$P^{(0)}(t)=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\left(1-e^{-(\mu+\lambda)t}\right);$$
$$P^{(1)}(t)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{\mu}e^{-(\mu+\lambda)t}\right). \tag{3.31}$$

При $t\to\infty$ (практически при $t>(4\div5)\dfrac{1}{\mu+\lambda}$) наступает стационарный режим работы объекта с финальными вероятностями

$$P^{(1)}(\infty)=\frac{\mu}{\mu+\lambda};P^{(0)}(\infty)=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}, \tag{3.32}$$

причем вероятность $P^{(1)}(\infty)=K_{Г\infty}$.

В предельных режимах $\mu\to\infty$ (мгновенное восстановление или замена) и $\mu\to0$(объект после отказа не восстанавливается) имеем соответственно

$$\mu\to\infty P^{(1)}(t)=1,\mu\to0P^{(1)}(t)=e^{-\lambda t}.$$

По рассмотренной методике разберем работу систем с двумя и большим числом элементов при различных условиях их эксплуатации.

3.2.2. Система *рабочий элемент – резервный элемент*

При исследовании работы этой системы необходимо различать *постоянное резервирование* и *резервирование замещением*. При постоянном резервировании в работоспособном состоянии находятся оба элемента, и поэтому при отказе одного из них система остается работоспособной, а отказавший элемент восстанавливается. Если за время восстановления первого происходит отказ и второго элемента, то система теряет работоспособность до восстановления одного из отказавших элементов. В ситуации отказа обоих элементов (отказ системы) восстанавливается, как правило, только один из них – *ограниченное восстановление*, позволяющее быстрей наладить электроснабжение потребителей. В этом случае система может находиться в 3-х состояниях, если не различать элементы, и в четырех, если их характеристики различны.

Рассмотрим случай *постоянного резервирования* с ограниченным восстановлением при условии $\lambda_1=\lambda_2=\lambda, \quad \mu_1=\mu_2=\mu$.

Перечислим и обозначим возможные состояния системы:

- состояние «0» – неработоспособны оба элемента;
- состояние «1» – неработоспособен один из двух элементов (любой);
- состояние «2» – работоспособны оба элемента.

Граф, состояний и переходов, имеет в этом случае вид, представленный на рис. 3.3.

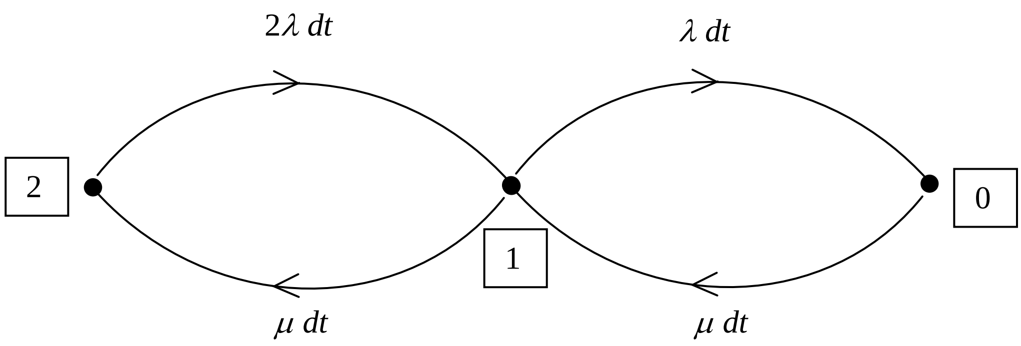


Рис. 3.3

Особенностью графа является удвоение элементарного потока отказов, обусловленное возможностью отказа любого из двух работающих элементов. Уравнения для вероятностей состояний системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP^{(0)}}{dt} &= -\mu P^{(0)}(t) + \lambda P^{(1)}(t), \\ \frac{dP^{(1)}}{dt} &= \mu P^{(0)}(t) - (\mu+\lambda) P^{(1)}(t) + 2\lambda P^{(2)}(t), \\ \frac{dP^{(2)}}{dt} &= \mu P^{(1)}(t) - 2\Lambda H P^{(2)}(+) \lambda P^{(2)}(t). \end{aligned}\right\} \qquad (3.33)$$

Правильность составления уравнений можно проконтролировать по условию полноты группы состояний $P^{(0)}(t)+P^{(1)}(t)+P^{(2)}(t)=1$, согласно которому сумма коэффициентов перед вероятностями в любом столбце правой части равна нулю, т.к. $\frac{dP}{dt}\sum_{i-0}^{2} P^{(i)}(t)=0$ как производная от постоянной величины.

Уравнение (3.33) решаем для начальных условий: $P^{(2)}(0)=1, P^{(1)}(0)=P^{(0)}(0)=0$, имея основной целью определение коэффициента готовности системы

$$K_{\tilde{A}}(t)=P^{(1)}(t)+P^{(2)}(t)=1-P^{(0)}(t).$$

Решая систему уравнений (3.33), получаем [4]

$$P^{(0)}(t)=\frac{2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2+\lambda^2}\left[1+\frac{s_2 e^{s_1 t}-s_1 e^{s_2 t}}{\sqrt{\lambda^2+4\lambda\mu}}\right], \qquad (3.34)$$

где $S_{1,2}=\frac{-3\lambda+2\mu\mp\sqrt{\lambda^2+4\lambda\mu}}{2}$.

При $t\to\infty$ находим значение коэффициента готовности для стационарного режима работы:

$$K_{\Gamma\infty}=1-\frac{2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2+\lambda^2}. \qquad (3.35)$$

Понятие безотказной работы системы приобретает в данном случае определенный смысл только тогда, когда состояние «0» становится поглощающим, т.е. выход из него через восстановление одного из элементов – невозможен. Граф переходов и состояний такого режима работы приобретает вид, приведенный на рис. 3.4.

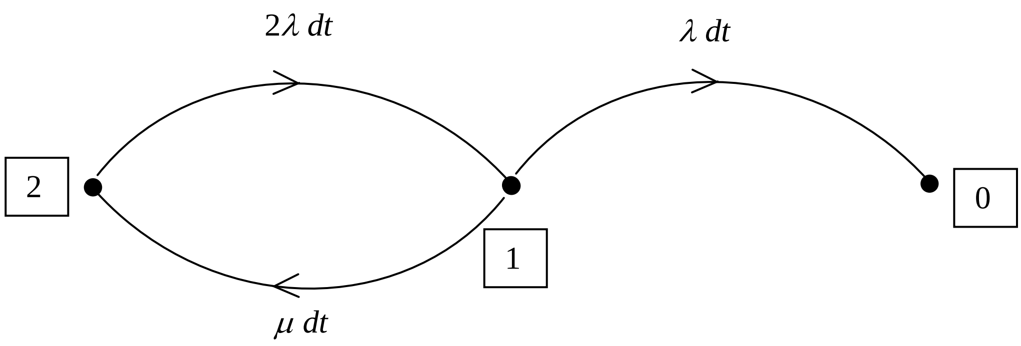


Рис. 3.4

Система уравнений для вероятностей состояний примет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP^{(0)}}{dt} &= \lambda P^{(1)}(t), \\ \frac{dP^{(1)}}{dt} &= -(\lambda+\mu)P^{(1)}(t) + 2\lambda P^{(2)}(t), \\ \frac{dP^{(2)}}{dt} &= \mu P^{(1)}(t) - 2\lambda P^{(2)}(t). \end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

Эта система распадается на систему для функций $P^{(1)}(t), P^{(2)}(t)$ и расчетную формулу для $P^{(0)}(t)$:

$$P^{(0)}(t) = \int_0^t \lambda P^{(1)}(\zeta)\, d\zeta + P^{(0)}(0). \tag{3.37}$$

Решая систему для $P^{(1)}(t), P^{(2)}(t)$ операторным методом при начальных условиях $P^{(2)}(0)=1, P^{(1)}(0)=0$, последовательно получаем:

- операторные изображения искомых функций

$$P^{(1)}(s) = \frac{2\lambda}{(s-s_1)(s-s_2)},\, P^{(2)}(s) = \frac{s+(\mu+\lambda)}{(s-s_1)(s-s_2)}, \tag{3.38}$$

где

$$s_{1,2} = -\frac{\mu+3\lambda}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu+3\lambda}{2}\right)^2 - 2\lambda^2}\ ;$$

- оригиналы вероятностей состояний $P^{(1)}(t), P^{(2)}(t)$:

$$P^{(1)}(t) = \frac{2\lambda}{s_1-s_2}\left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right), \tag{3.39}$$

$$P^{(2)}(t) = \frac{1}{s_1-s_2}\left[(s_1+\mu+\lambda)\right]e^{s_1 t} - (s_2+\mu+\lambda)e^{s_2 t}; \tag{3.40}$$

- вероятность отказа системы для случая $P^0(0)=0$:

$$P^{(0)}(t) = 1 + \frac{1}{s_1-s_2}\left(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}\right) \tag{3.41}$$

и соответствующую ей вероятность безотказной работы

$$P_0(t) = 1 - P^{(0)}(t) = \frac{1}{s_1 - s_2}\left(s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t}\right), \tag{3.42}$$

заменяющую в этом режиме работы коэффициент готовности $P(t) = P^{(1)}(t) + P^{(2)}(t)$.

При резервировании замещением резервный элемент может отказать только после его включения, поэтому граф переходов и состояний примет следующий вид (рис. 3.5).

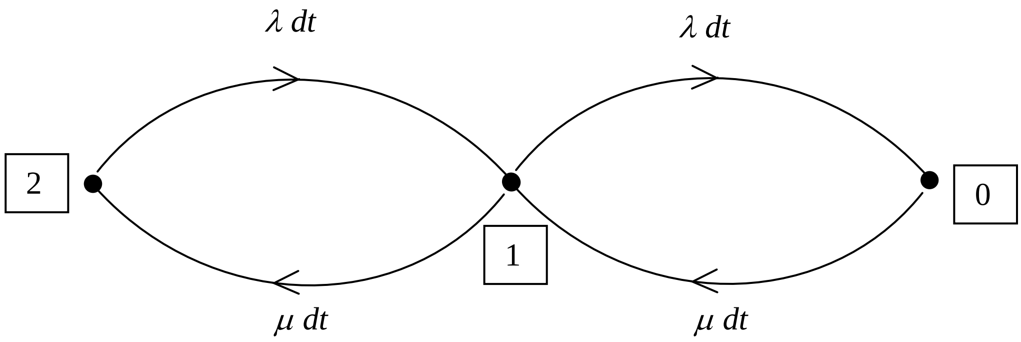


Рис. 3.5

Дифференциальные уравнения для вероятностей состояний запишутся таким образом:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP^{(0)}}{dt} &= -\mu P^{(0)}(t) + \lambda P^{(1)}(t),\\
\frac{dP^{(1)}}{dt} &= \mu P^{(0)}(t) - (\mu + \lambda) P^{(1)}(t) + \lambda P^{(2)}(t),\\
\frac{dP^{(2)}}{dt} &= \mu P^{(1)}(t) - \lambda P^{(2)}(t).
\end{aligned}\right\} \tag{3.43}$$

При начальных условиях $P^{(2)}(0) = 1, P^{(1)}(0) = P^{(0)}(0) = 0$ решение этой системы относительно $P^{(0)}(t)$ имеет вид [4]

$$P^{(0)}(t) = \frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)^2 + \lambda\mu}\left(1 + \frac{s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right), \tag{3.44}$$

где $s_{1,2} = -\left(\lambda + \mu \mp \sqrt{\lambda\mu}\right)$.

Коэффициент готовности $K_Г(t) = 1 - P^{(0)}(t)$ и, в частности, при $t \to \infty$ получаем

$$K_{Г\infty} = 1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)^2 + \lambda\mu}. \tag{3.45}$$

Относительно понятия безотказной работы и соответствующей вероятности $P_0(t)$ здесь справедливо все сказанное для случая постоянного резервирования; аналогично вычерчивается граф переходов и состояний и решаются дифференциальные уравнения.

Рассмотрим еще случай *постоянного резервирования для элементов с различными* $\lambda_i, \mu_i\ (i = 1, 2)$, который является, в сущности, случаем параллельной работы элементов СЭС, например линий, и на этом примере разберем варианты определения коэффициента готовности для различного соединения элементов «по надежности».

Система может находиться в четырех состояниях:

- состояние «0» – неработоспособны оба элемента;
- состояние «1» – неработоспособен 1 элемент;
- состояние «2» – неработоспособен 2 элемент;
- состояние «3» – работоспособны оба элемента.

Граф переходов и состояний представлен на рис. 3.6.

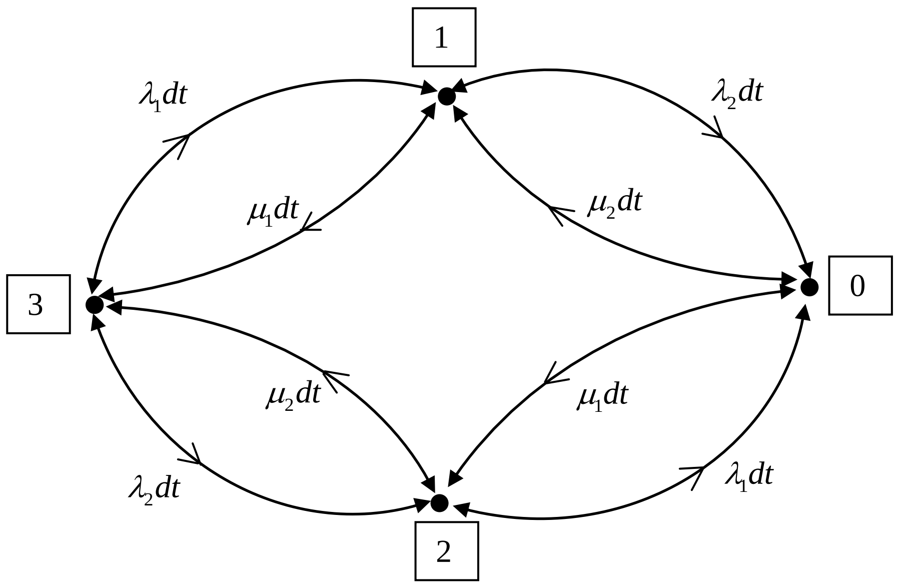


Рис. 3.6

В качестве пояснения к рис. 3.6 заметим, что переходы $1 \leftrightarrow 2, 0 \leftrightarrow 3$ неосуществимы в силу ординарности процесса, т.е. за время dt не могут произойти переходы $0 \leftrightarrow 3$, одновременные отказы или восстановления обоих элементов.

Система уравнений для вероятностей состояний $P^{(0)}(t), P^{(1)}(t), P^{(2)}(t), P^{(3)}(t)$ записывается по той же методике, что и в рассмотренных выше случаях:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP^{(0)}}{dt} &= -(\mu_1 + \mu_2) P^{(0)}(t) + \lambda_2 P^{(1)}(t) + \lambda_1 P^{(2)}(t), \\
\frac{dP^{(1)}}{dt} &= \mu_2 P^{(0)}(t) - (\lambda_2 + \mu_1) P^{(1)}(t) + \lambda_1 P^{(3)}(t), \\
\frac{dP^{(2)}}{dt} &= \mu_1 P^{(0)}(t) - (\lambda_1 + \mu_2) P^{(2)}(t) + \lambda_2 P^{(3)}(t), \\
\frac{dP^{(3)}}{dt} &= \mu_1 P^{(1)}(t) + \mu_2 P^{(2)}(t) - (\lambda_1 + \lambda_2) P^{(3)}(t).
\end{aligned}\right\} \qquad (3.46)$$

Для данного случая ограничимся определением вероятностей $P_\infty^{(0)}, P_\infty^{(1)}, P_\infty^{2}, P_\infty^{(3)}$ при $t \to \infty$ и соответствующих им значений коэффициентов готовности при различных соединениях «по надежности».

Приняв производные в левой части (3.46) равными нулю, получаем 4 уравнения, сумма которых равна нулю, т.е. одно из них является следствием трех других. Таким образом, нужно решать три любых уравнения совместно с условием $P^{(0)}+P^{(1)}+P^{(2)}+P^{(3)}=1$.

Запишем формулы для коэффициента готовности. Если элементы в системе *соединены последовательно «по надежности»*, т.е. только при одновременной совместной работе обеспечивают электропитание нагрузки, то вероятность работоспособного состояния определяется функцией $P^{(3)}(t)$. Поэтому $K_Г(t)=P^{(3)}(t)$. Если же они *соединены параллельно*, т.е. электропитание нагрузки обеспечено при работе любого из этих и тем более обоих, то $K_Г(t)=P^{(1)}(t)+P^{(2)}(t)+P^{(3)}(t)=1-P^{(0)}(t)$. Если система неработоспособна не только в нулевом, но и, например, во втором состоянии, то $K_{\tilde{A}}(t)=P^{(1)}(t)+P^{(3)}(t)$ и т.д.

3.2.3. Модели надежности с учетом профилактики и восстановления

Чтобы по возможности отдалить момент отказа оборудования, оно подвергается периодическому предупредительному ремонту, который имеет смысл лишь на участке III характеристики жизни объекта (рис. 3.7) – в период старения – и графически может быть показан на этой кривой как мгновенное уменьшение интенсивности отказов.

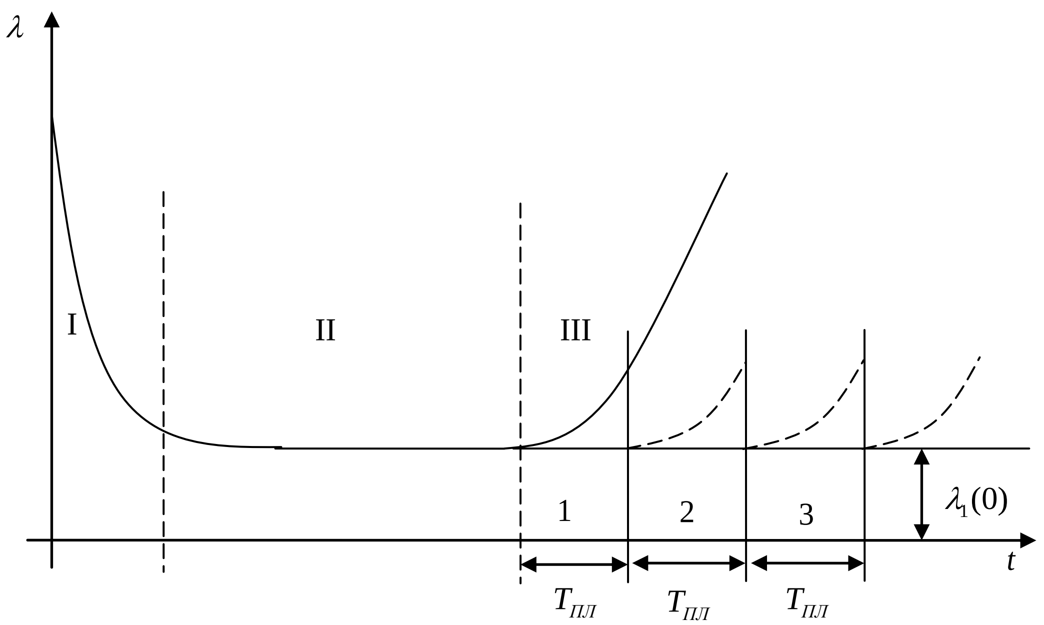


Рис. 3.7

Предположим, что плотность вероятности отказов объекта в пределах срока службы T_∞ постоянная и равна $p=1/T_\infty=const$, т.е.

$$p(t)=\begin{cases} p=1/T_\infty, 0\le t\le T_\infty, \\ 0, t>T_\infty. \end{cases}$$

Вероятность отказа по определению находится по формуле

$$Q(t)=\int_0^t p(t)\,dt=\frac{1}{T_\infty}t. \tag{3.47}$$

Вероятность безотказной работы, интенсивность отказов и средняя наработка на отказ (математическое ожидание для времени безотказной работы) определяются по следующим формулам:

$$P(t)=1-Q(t)=1-\frac{1}{T_\infty}t\,; \tag{3.48}$$

$$\lambda(t)=\frac{1}{P(t)}\frac{dQ}{dt}=\frac{1}{P(t)}p=\frac{1}{T_\infty-t}\,; \tag{3.49}$$

$$T_{оср}=\int_0^\infty P(t)dt=\int_0^{T\infty} tp(t)dt=\frac{1}{T_\infty}\cdot\int_0^{T\infty}\ \frac{t^2}{2}=\frac{T_\infty}{2}\,. \tag{3.50}$$

Интенсивность отказов согласно формуле (3.49) возрастает с ростом *t*, как это должно происходить на участке III характеристики жизни объекта. Средняя наработка на отказ (3.50) позволяет оценить описываемый срок безотказной работы. Для увеличения этого показателя будем проводить профилактические ремонты с периодичностью $T_{ПЛ}={}^{T_\infty}\!/_{П}$. На первом интервале работы объекта при $0\le t\le T_{пл}$ все величины: $p_1, Q_1(t), P_1(t), \lambda_1(t)$ – определяются теми же соотношениями, что и при отсутствии профилактики:

$$p_1={}^{1}\!/_{T_\infty}\,;\quad Q_1(t)=\int_0^t p_1dt=\frac{1}{T_\infty}t\,;\quad P_1(t)=1-Q_1(t)=1-{}^{t}\!/_{T_\infty}\,;$$

$$\lambda(t)=\frac{1}{P_1(t)}\frac{dQ}{dt}=\frac{1}{P_1(t)}p_1\,.$$

На втором участке $T_{пл}\le t\le 2T_{пл}$ начальное значение интенсивности отказов $\lambda(T_{пл})$ путем проведения мероприятий сделаем равным $\lambda_1(0)$ (см. рис. 3.7).

Имеем

$$\lambda(T_{пл})=\lambda_2(0)=\frac{1}{P_2(0)}p_2\,,\quad P_2(0)=P_1(T_{пл})\,,$$

$$\lambda_1(0)=\frac{1}{P_1(0)}p_1=\frac{1}{P_2(0)}p_2=\frac{1}{P_1(T_{пл})}p_2\,.$$

Учитывая, что $P_1(0)=1$, получаем

$$p_2=p_1P_1(T_{пл})=P_1\left(1-\frac{T_{пл}}{T_\infty}\right),$$

т.е. плотность вероятности отказа на втором участке уменьшилась за счет профилактики. Применяя формулы (3.47) – (3.49), находим

$$Q_2(t)=\int_0^{T_{пл}} p_1dt+\int_{T_{пл}}^t p_2dt=Q_1(T_{пл})-p_2T_{пл}+p_2t\to P_2(t)=1-Q_2(t)\to\lambda_2(t)$$

и т.д., принимая согласно рис. 3.7 на каждом интервале профилактики в его начале значение $\lambda(kT_{пл})=\lambda_1(0)$. Поясним сказанное числовым примером при T_∞ = 4 года, *n*=4 ($T_{пл}$=1 год). По мере выполнения расчетов будем строить кривые p_i и $\lambda_i(t)$, *i*=1,2,3,4 – номер интервала профилактики. В конце расчетов определим среднее для четырех интервалов значение интенсивности отказов $\bar{\lambda}$ и по нему оценим среднюю наработку на отказ.

Обратимся к рис. 3.8.

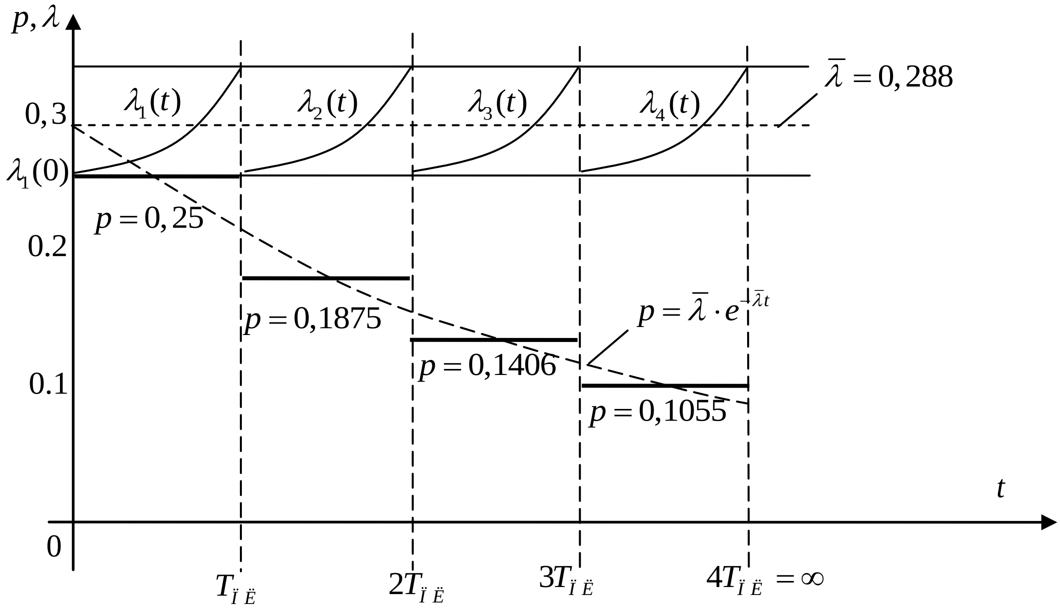


Рис. 3.8

В пределах $0 \le t < T_{пл}$ ремонтов не проводилось, поэтому

$$p_1 = \frac{1}{T_\infty} = 0,25\ {}^1\!/_{год}, \lambda_1(t) = \frac{1}{4-t}, \lambda_1(0) = 0,25\ {}^1\!/_{год} \lambda_1(T_{пл}) = 0,333\ {}^1\!/_{год},$$

$$P_1(0) = 1, P_1(T_{пл}) = 0,75, Q_1(T_{пл}) = 0,25.$$

Интервал $T_{пл} \le t \le 2T_{пл}$. В момент $t = T_{пл}$ начинается первый ремонт. Его длительность $\Delta t_{пл} \cong 0$, поэтому все показатели изменяются скачком:

$$\lambda(T_{пл}) = \lambda_2(0) = \frac{1}{P_2(0)} p_2 = \frac{1}{P_1(T_{пл})} p_2.$$

Значение T=0 в этих формулах соответствует началу интервала. Для вычисления P_2 принимаем согласно рис. 3.7 $\lambda_2(0) = \lambda_1(0)$.

$$\lambda_1(0) = \frac{1}{P_1(0)} \cdot p_1 = p_1 \to p_2 = p_1 p_1(T_{пл}). \tag{3.51}$$

Находим

$$p_2 = 0,25 \cdot 0,75 = 0,1875;$$

$$Q_2(t) = \int_0^{T_{пл}} p_1 dt + \int_{T_{пл}}^{t} p_2 dt = Q_1(T_{пл}) - p_2 T_{пл} + p_2 t = 0,0625 + 0,1875t, \quad Q_2(2T_{пл}) = 0,4375;$$

$$P_2(t) = 1 - Q_2(t) = 0,9375 - 0,1875t, \quad P_2(2T_{пл}) = 0,5625;$$

$$\lambda_2(t) = \frac{1}{P_2(t)} \cdot p_2 = \frac{0,1875}{0,9375 - 0,1875t} = \frac{1}{5-t};$$

$$\lambda_2(T_{пл}) = 0,25, \quad \lambda_2(2T_{пл}) = 0,333(3).$$

Интервал $2T_{пл} \le t \le 3T_{пл}$. В его начале при $t = 2T_{пл}$ прошел второй ремонт:

$$\lambda(2T_{пл}) = \lambda_3(0) = \frac{1}{P_3(0)} p_3 = \frac{1}{P_2(2T_{пл})} p_2.$$

Принимаем $\lambda_3(0) = \lambda_2(0) = \lambda_1(0) = \dfrac{1}{P_2(T_{пл})} \cdot p_2 = \dfrac{1}{P_1(0)} p_1$, следовательно,

$$p_3 = p_1 P_2\left(2T_{пл}\right). \tag{3.52}$$

Находим

$$p_3 = 0,25 \cdot 0,5625 = 0,1406,$$

$$Q_3(t) = \int_0^{T_{пл}} p_1 dt + \int_{T_{пл}}^{2T_{пл}} p_2 dt + \int_{2T_{пл}}^{t} p_3 dt = Q_2\left(2T_{пл}\right) - p_3 2T_{пл} + p_3 t = 0,1563 + 0,1406t, Q_3\left(3T_{пл}\right) = 0,5781;$$

$$P_3(t) = 1 - Q_3(t) = 0,8437 - 0,1406t, P_3\left(3T_{пл}\right) = 0,4219;$$

$$\lambda_3(t) = \frac{1}{P_3(t)} p_3 = \frac{0,1406}{0,8437 - 0,1406t} = \frac{1}{6-t},$$

$$\lambda_3\left(2T_{пл}\right) = 0,25, \quad \lambda_3\left(3T_{пл}\right) = 0,333(3).$$

Интервал $3T_{пл} \le t \le 4T_{пл} = T_{пл}$. В его начале при $t = 3T_{пл}$ прошел третий ремонт:

$$\lambda\left(3T_{пл}\right) = \lambda_4(0) = \frac{1}{P_4(0)} p_4 = \frac{1}{P_3\left(3T_{пл}\right)} p_3.$$

Принимаем $\lambda_4(0) = \lambda_3(0) = \lambda_1(0) = \dfrac{1}{P_1(0)} \cdot p_1 (p_1 \to p_4 = p_1 P_3\left(3T_{пл}\right).$ (3.53)

Находим

$$P_4 = 0,25 \cdot 0,4219 = 0,1055;$$

$$Q_4(t) = Q_3\left(3T_{пл}\right) - p_4 3T_{пл} + p_4 t = 0,2617 + 0,1055t, Q_4\left(4T_{пл}\right) = 0,6837;$$

$$P_4(t) = 1 - Q_4(t) = 0,7383 - 0,1055t, \quad P_4\left(4T_{пл}\right) = 0,3163;$$

$$\lambda_4(t) = \frac{1}{P_4(t)} p_4 = \frac{0,1055}{0,7383 - 0,1055t} = \frac{1}{7-t},$$

$$\lambda_4\left(3T_{пл}\right) = 0,25, \lambda_4\left(4T_{пл}\right) = 0,333(3).$$

Результаты расчетов в графической форме приведены на рис. 3.8, где отчетливо показано действие профилактических ремонтов, существенно снижающих плотность вероятности отказов и преобразующих возрастающую кривую λ (t) в пилообразную, колеблющуюся около некоторого среднего значения $\bar{\lambda}$. Подсчет этого значения дает

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{4T_{пл}}\left[\int_0^{T_{пл}} \frac{dt}{4-t} + \int_{T_{пл}}^{2T_{пл}} \frac{dt}{5-t} + \int_{2T_{пл}}^{3T_{пл}} \frac{dt}{6-t} + \int_{3T_{пл}}^{4T_{пл}} \frac{dt}{7-t}\right] = \frac{1}{T_{пл}} \int_0^{T_{пл}} \frac{dt}{4-t} = \ln \tfrac{4}{3} = 0,288 \, \tfrac{1}{год}.$$

Этой характеристике соответствует экспоненциальное распределение плотности вероятности отказов (рис. 3.8).

$$\bar{p} = \bar{\lambda} e^{-\lambda t}$$

и средняя наработка на отказ $\bar{T}_{о.ср} = \dfrac{1}{\bar{\lambda}} = 3,47$ /год, значительно превосходящая соответствующее значение (2 года) при отсутствии профилактики. Следовательно, важным эффектом предупредительного ремонта является увеличение средней наработки до отказа, в силу чего для элементов (объектов) *с возрастающей интенсивностью отказов* регулярное проведение предупредительных ремонтов приводит к *уменьшению частоты аварийных ремонтов.*

Если стоимость предупредительного ремонта того же порядка, что и аварийного, то он может оказаться экономически неоправданным. Если же его стоимость меньше, чем суммарная стоимость аварийного ремонта и ущербов от аварии, он нужен, но встает вопрос об *оптимальной периодичности* его проведения. Рассмотрим решение этой задачи на основе критерия минимума ежегодных затрат, включающих ущерб от аварии [4,3]. Ежегодные затраты *З* подсчитаем по формуле

$$З = C_{ав}\lambda_{ав} + C_{п\lambda}\lambda_{п\lambda}, \tag{3.54}$$

где $C_{ав}$ – стоимость одного аварийного ремонта, $C_{п\lambda}$ – стоимость одного планового ремонта.

Искомой величиной при использовании этой зависимости является $\lambda_{п\lambda} = 1/T_{п\lambda}$ – интенсивность (частота) проведения плановых ремонтов (1/год). Интенсивность аварийных ремонтов, усредненная по интервалу $T_{пл}$, вычисляется по выражению

$$\lambda_{ав} = \frac{1}{T_{пл}} \int_0^{T_{пл}} \omega(t)\,dt,$$

где $\omega\ (t)$ частота аварий.

Преобразуем формулу к виду

$$\frac{З}{C_{ав}} = З^0 = \frac{1}{T_{пл}} \left[\int_0^{T_{пл}} \omega(t)\,dt + \frac{C_{пл}}{C_{ав}} \right]$$

и, выполнив дифференцирование, приравняем производную к нулю:

$$\frac{dЗ^0}{dT_{пл}} = -\frac{1}{T_{пл}^2} \left[\int_0^{T_{пл}} \omega(t)\,dt + \frac{C_{пл}}{C_{ав}} \right] + \frac{1}{T_{пл}} \omega(T_{пл}) = 0.$$

В итоге получим уравнение, позволяющее найти по известной функции $\omega(t)$ и отношению стоимостей планового и аварийного ремонтов оптимальное значение периода проведения плановых ремонтов $T_{пл}$:

$$\int_0^{T_{пл}} \omega(t)dt + \frac{C_{пл}}{C_{ав}} = T_{пл}\omega(T_{пл}). \qquad (3.55)$$

Методику расчетов по этому выражению поясним на примере определения оптимальной периодичности плановых ремонтов трансформаторов 110 и 220 кВ.

На участке III (рис. 3.7) вследствие износа изоляции зависимость $\omega(t)$ допустимо аппроксимировать функцией [3]

$$\omega(t) = 0,005\exp(0,2t)\left(1/год\right).$$

Подставляя $\omega(t)$ в уравнение (3.55) и вычисляя интеграл, получаем уравнение

$$\frac{C_{пл}}{C_{ав}} = 0,025 - (0,025 - 0,005T_{пл})\exp 0,2T_{пл}.$$

Задаваясь значениями $T_{пл} = 1, 2, \ldots$/год, строим зависимость $\frac{C_{пл}}{C_{ав}} = \varphi(T_{пл})$, по которой при заданной величине отношения $\frac{C_{пл}}{C_{ав}}$ находятся значения оптимальной периодичности плановых ремонтов:

– для трансформаторов 110 кВ

$$\frac{C_{пл}}{C_{ав}} = 0,001 \div 0,008 \to T_{пл} = 1,2 \div 3,2\ /\text{год};$$

– для трансформаторов 220 кВ

$$\frac{C_{пл}}{C_{ав}} = 0,002 \div 0,005 \to T_{пл} = 1,8 \div 2,7\ /\text{год}.$$

Модель надежности установки с профилактикой и восстановлением

Установка (элемент, объект) может находиться в трех состояниях: 1 – работоспособное состояние, 0 – аварийный простой, 2 – плановый простой (профилактика).

Граф переходов и состояний представлен на рис. 3.9.

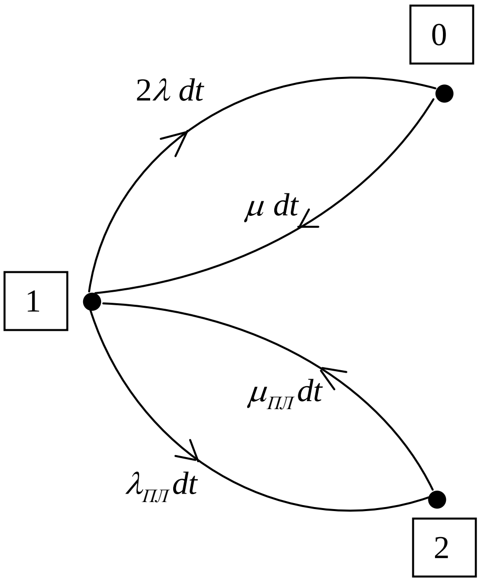


Рис. 3.9

Этому графу соответствует система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний $P^{(0)}(t), P^{(1)}(t) P^{(2)}(t)$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP^{(0)}}{dt} &= -\mu P^{(0)}(t) + \lambda P^{(1)}(t),\\ \frac{dP^{(1)}}{dt} &= \mu P^{(0)}(t) - (\lambda + \lambda_{пл}) P^{(1)}(t) + \mu_{пл} P^{(2)}(t),\\ \frac{dP^{(2)}}{dt} &= \lambda_{пл} P^{(1)}(t) - \mu_{пл} P^{(2)}(t).\end{aligned}\right\} \tag{3.56}$$

При начальных условиях $P^{(1)}(0) = 1, P^{(0)}(0) = P^{(2)}(0) = 0$ решения для функций $P^{(1)}(t), P^{(0)}(t)$ имеют следующий вид:

$$P^{(1)}(t) = \frac{\mu\mu_{пл}}{\mu\mu_{пл} + \lambda\mu_{пл} + \mu\lambda_{пл}} + \frac{(\mu + s_1)(\mu_{пл} + s_1)}{s(s_1 + s_2)} e^{s_1 T} + \frac{(\mu + s_2)(\mu_{пл} + s_2)}{s_2(s_1 + s_2)} e^{s_2 T}; \tag{3.57}$$

$$P^{(0)}(t) = \frac{\lambda\mu_{пл}}{\mu\mu_{пл} + \lambda\mu_{пл} + \mu\lambda_{пл}} + \frac{\lambda(\mu_{пл} + s_1)}{s_1(s_1 + s_2)} e^{s_1 T} + \frac{\lambda(\mu_{пл} + s_2)}{s_2(s_1 + s_2)} e^{s_2 T},$$

где $s_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[(\lambda + \lambda_{пл}) + (\mu + \mu_{пл})\right] \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\lambda + \lambda_{п} + \mu + \mu_{пл})^2 - (\mu\mu_{пл} + \lambda\mu_{пл} + \mu\lambda_{пл})}$.

Для стационарного режима решение имеет вид

$$P_{\infty}^{(1)} = \frac{\mu\mu_{пл}}{\mu\mu_{пл} + \lambda\mu_{пл} + \mu\lambda} = \frac{1}{1 + \lambda/\mu + \lambda_{пл}/\mu_{пл}} \tag{3.58}$$

(это вероятность работоспособного состояния);

$$P_\infty^{(0)} = \frac{\lambda/\mu}{1 + \lambda/\mu + \lambda_{пл}/\mu_{пл}} = q_{ав},$$

$$P_\infty^{(2)} = \frac{\lambda_{пл}/\mu_{пл}}{1 + \lambda/\mu + \lambda_{пл}/\mu_{пл}} = q_{пл}$$

(это коэффициенты простоя или относительные длительности аварийных и плановых простоев).

Как и в разд. 3.2.2, здесь можно ввести вероятности безотказной работы и восстановления, сделав поглощающими «состояние 0» в первом случае $(\mu_{пл}, \lambda_{пл} = 0, \mu = 0)$ и «состояние 1» во втором $(\lambda = \lambda_{пл} = \mu_{пл} = 0)$. В итоге получаются известные результаты $P^{(1)}(t) = e^{-\lambda t}$, $P^{(0)}(t) = 1 - P^{(1)}(t)$ – вероятности безотказной работы и отказа; $P^{(0)}(t) = e^{-\mu t}$, $P^{(1)}(t) = 1 - P^{(0)}(t)$ – вероятности невосстановления и восстановления.

3.2.4 Параллельное соединение двух элементов с профилактикой и -восстановлением (дублирование)

Система из двух параллельно включенных одинаковых элементов может находиться в одном из пяти состояний:

1) оба элемента в работоспособном состоянии;
2) один элемент в аварийном состоянии, другой работоспособен;
3) один в профилактическом ремонте, другой работоспособен;
4) один в профилактическом ремонте, другой в аварийном состоянии;
5) оба элемента в аварийном состоянии.

Граф переходов и состояний представлен на рис. 3.10.

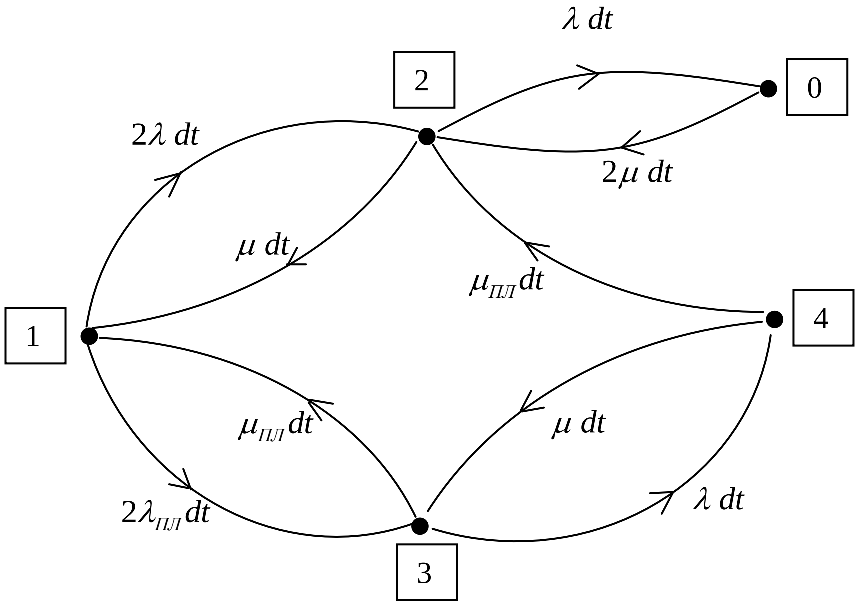


Рис. 3.10

Этому графу отвечает система дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP^{(0)}}{dt} &= -2\mu P^{(0)}(t) + \lambda P^{(2)}(t),\\
\frac{dP^{(1)}}{dt} &= -(2\lambda + 2\lambda_{пл})P^{(1)}(t) + \mu P^{(2)}(t) + \mu_{пл}P^{(3)}(t),\\
\frac{dP^{(2)}}{dt} &= 2\mu P^{(0)}(t) + 2\lambda P^{(1)}(t) - (\lambda+\mu)P^{(2)}(t) + \mu_{пл}P^{(4)}(t),\\
\frac{dP^{(3)}}{dt} &= 2\lambda P^{(1)}(t) - (\mu_{пл}+\lambda)P^{(2)}(t) + \mu P^{(4)}(t),\\
\frac{dP^{(4)}}{dt} &= -\lambda P^{(3)}(t) - (\mu+\mu_{пл})P^{(4)(t)}\ .
\end{aligned}\right\} \tag{3.59}$$

Начальные условия для системы (3.59) могут быть любыми, удовлетворяющими соотношению

$$P^{(0)}(0) + P^{(1)}(0) + P^{(2)}(0) + P^{(3)}(0) + P^{(4)}(0) = 1. \tag{3.60}$$

Рассмотрим для данного соединения элементов стационарный режим работы, на который система выходит независимо от вида начальных условий при $t \to \infty$. Полагая в (3.59) все производные $P^{(i)} \to 0$, для финальных вероятностей $P_\infty^{(i)}$ получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
0 = -2\mu P_\infty^{(0)} + \lambda P_\infty^{(2)}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
0 = \lambda P_\infty^{(3)} - (\mu + \mu_{пл})P_\infty^{(4)}.
\end{gathered} \tag{3.61}$$

Из пяти уравнений системы (3.61) любые четыре должны решаться совместно с (3.60) (см. разд. 3.2.2). Для упрощения решения следует учесть, что относительная длительность рабочего состояния системы элементов 1, 2, 3 значительно превосходит аналогичную характеристику простоев 0, 4. При этом допущении находим $P_\infty^{(2)}$, $P_\infty^{(3)}$ [3]:

$$P_\infty^{(2)} = \frac{2\lambda/\mu}{1 + 2\lambda/\mu + 2\lambda_{пл}/\mu_{пл}}; \quad P_\infty^{(3)} = \frac{2\lambda_{пл}/\mu_{пл}}{1 + 2\lambda/\mu + 2\lambda_{пл}/\mu_{пл}}$$

или, учитывая, что $\mu >> \lambda, \mu_{пл} >> \lambda_{пл}$, $P_\infty^{(2)} \cong 2\lambda/\mu$, $P_\infty^{(3)} \cong 2\lambda_{пл}/\mu_{пл}$.

Соответственно $P_\infty^{(0)} = Q_{ав}$ и $P_\infty^{(4)} = q$ определяются по формулам

$$P_\infty^{(0)} = 2\left(\lambda/\mu\right)\left(\lambda/2\mu\right);$$

$$P_\infty^{(4)} = 2\left(\lambda_{пл}/\mu_{пл}\right)\left[\lambda/(\mu + \mu_{пл})\right].$$

Вероятность $P_\infty^{(1)}$ определяется по следующему выражению:

$$P_\infty^{(1)} = 1 - \left(P_\infty^{(0)} + P_\infty^{(2)} + P_\infty^{(3)} + P_\infty^{(4)}\right).$$

Вероятность отказа системы

$$Q_\infty = P_\infty^{(0)} + P_\infty^{(4)} = q + q_{ав}.$$

Коэффициент готовности найдем, приняв, что работоспособными являются состояния 1, 2, 3:

$$K_{Г\infty} = P_\infty^{(1)} + P_\infty^{(2)} + P_\infty^{(3)} = 1 - \left(P_\infty^{(0)} + P_\infty^{(4)}\right) = 1 - \left(q + q_{ав}\right).$$

3.2.5. Последовательное соединение элементов с восстановлением и профилактикой

Последовательное соединение было рассмотрено нами без учета восстановления и профилактики, что, конечно же, нетипично для условий реальной эксплуатации оборудования. В данном разделе принимается, что *n* последовательно (*в смысле надежности)* соединенных элементов работают при условии регулярного проведения профилактических ремонтов, а при отказе восстанавливаются. Обозначим состояния системы:

1 – все элементы работоспособны и соответственно работоспособна система;

2i – состояния планового простоя, *i* – номер элемента, ремонт которого проводится;

0.i – состояние аварийного простоя, *i* – номер отказавшего элемента.

Граф переходов и состояний представлен на рис. 3.11.

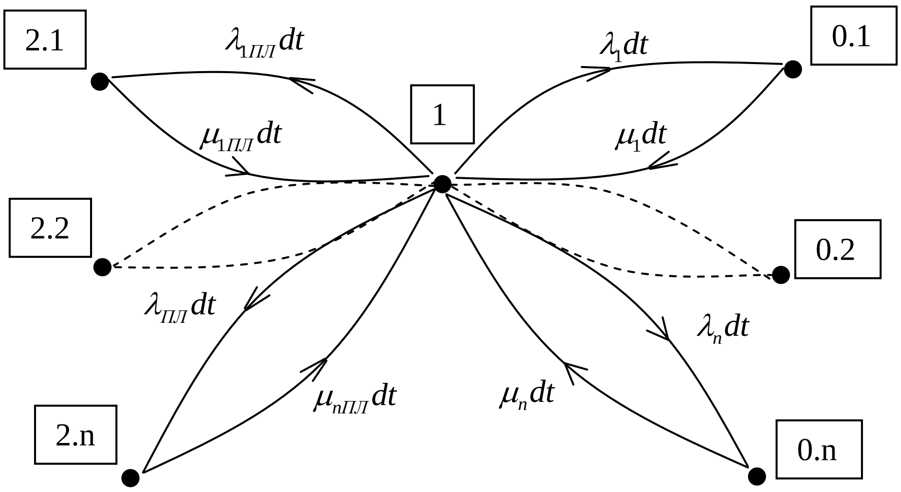


Рис. 3.11

При составлении системы уравнений учтем, что во время аварийного ремонта элемента номера *I* может выполняться профилактический ремонт элемента номера *j*. Имеем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dP_i^{(0)}}{dt} = -\mu_i P_i^{(0)}(t) + \lambda_i P^{(1)}(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dP^{(1)}}{dt} = -\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + \sum_{j=1}^{к}\lambda_{плj}\right)P^{(i)}(t) + \sum_{i=1}^{n}\mu_i P_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{к}\mu_{плj}P_j^{(2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dP_j^{(2)}}{dt} = -\mu_{плj}P_j^{(2)}(t) + \lambda_{пл}P^{(1)}(t). \end{aligned}\right\} \quad (3.62)$$

В этих уравнениях, как отмечено выше, профилактический ремонт *(п – к)* элементов сочетается с аварийными ремонтами, т.е. $\kappa \le n$. Значение *к* определяется конкретно для каждой системы.

Рассматриваем стационарный режим, определяя вероятности $P_{\infty}^{(1)} = K_{\Gamma\infty}$:

$$P_{\infty}^{(0)} = P_{1\infty}^{(0)} + P_{2\infty}^{(0)} + \ldots + P_{n\infty}^{(0)};$$
$$P_{\infty}^{(2)} = P_{1\infty}^{(2)} + P_{2\infty}^{(2)} + \ldots + P_{n\infty}^{(2)}.$$

Вместо второго уравнения (3.62) при этом расчете используем условие полноты состояний системы:

$$P_{\infty}^{(0)} + P_{\infty}^{(1)} + P_{\infty}^{(2)} = 1.$$

При решении первой группы уравнений находим

$$P_{i\infty}^{(0)} = \frac{\lambda_i}{\mu_i} P_{\infty}^{(1)} = K_{\Gamma\infty} \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

Соответственно

$$P_{\infty}^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} P_{i\infty}^{(0)} = K_{\Gamma\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i / \mu_i. \tag{3.63}$$

При решении третьей группы уравнений получаем

$$P_{j\infty}^{(2)} = \frac{\lambda_{плj}}{\mu_{плj}} P_{\infty}^{(1)} = K_{\Gamma\infty} \frac{\lambda_{плj}}{\mu_{плj}};$$

$$P_{\infty}^{(2)} = \sum_{j=1}^{k} P_{j\infty}^{(2)} = K_{\Gamma\infty} \sum_{j=1}^{k} \lambda_{плj} / \mu_{плj}. \tag{3.64}$$

Выражения (3.63) и (3.64) следует рассматривать как определения коэффициентов аварийного и планового простоев:

$$q_{ав} = P_{\infty}^{(0)}, \quad q_{пл} = P_{\infty}^{(2)} \tag{3.65}$$

Используя (3.63) и (3.64), в условии полноты получаем коэффициент готовности $P_{\infty}^{(1)} = K_{\Gamma\infty}$:

$$K_{\Gamma\infty} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i / \mu_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{плj} / \mu_{плj}}. \tag{3.66}$$

3.2.6. Модели надежности установок (систем) с учетом отказов общей причины

Множественный отказ есть событие, при котором несколько элементов системы выходят из строя по одной и той же причине.

Общие причины отказов:

1. Внешнее, катастрофическое или природное, воздействие (наводнение, ураган, пожар, гололед на проводах ЛЭП, грозы, солнечная активность).
2. Общий источник электроснабжения основных и резервных подсистем или элементов.
3. Неправильное функционирование электроустановки при неудовлетворительном выборе систем релейной защиты и автоматики.
4. Ошибки эксплуатационного персонала, конструкторские недоработки.
5. Общий изготовитель основного и резервного оборудования, имеющего одни и те же конструктивные и производственные дефекты.

Для учета возможности множественных отказов в соответствующие расчетные формулы вводится параметр, представляющий собой долю отказов, вызываемых общей причиной. При этом интенсивность отказов имеет две составляющие:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2,$$

где λ_1 – интенсивность статистически независимых отказов; λ_2 – интенсивность множественных отказов.

Поскольку $\lambda_2 = \alpha\lambda, 0 < \alpha < 1$, доля отказов общей причины, то $\lambda_1 = (1-\alpha)\lambda$. Наличие множественных отказов, например для схемы с параллельным соединением элементов, можно учесть путем включения последовательно с ними некоторого гипотетического элемента (рис. 3.12), отказ которого приводит к отказу всей системы. Для вероятности безотказной работы в данном случае имеем формулу

$$P = \left\{1-(1-P_1)^n\right\} P_2$$

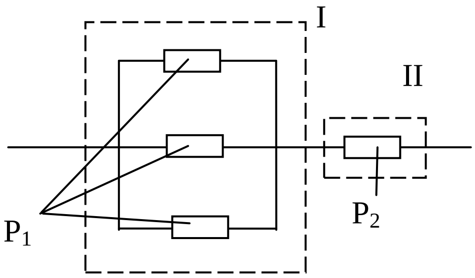


Рис. 3.12

.

При $\lambda_1 = const, \lambda_2 = const$ получаем

$$P(t) = \left\{1-\left[1-e^{-(1-\alpha)\lambda t}\right]^n\right\} \overline{e}^{\alpha\lambda t}. \tag{3.67}$$

Рассмотрим теперь систему, *состоящую из двух неодинаковых элементов, для которых возможны множественные отказы*.

Модель надежности этой системы построим при следующих допущениях:

1. Множественные отказы и отказы других типов статистически независимы.
2. При отказе одного элемента он восстанавливается, при отказе обоих элементов восстанавливается вся система.
3. Интенсивность множественных отказов и интенсивность восстановления постоянны.

Необходимо заметить, что вообще возможны три случая восстановления элементов при их одновременном отказе:

1. Запасные части, ремонтный инструмент и специалисты имеются для одновременного восстановления обоих элементов.
2. При тех же условиях может быть восстановлен только один элемент.
3. Ничего для восстановления нет и, кроме того, существует очередь на ремонтное обслуживание.

Принятое выше допущение 2 соответствует первой ситуации и соответственно система может находиться в одном из четырех состояний:

1. Оба элемента в работоспособном состоянии.
2. Элемент 1 в аварийном состоянии, элемент 2 – в работоспособном.
3. Элемент 2 в аварийном состоянии, элемент 1 – в работоспособном.
4. Оба элемента неработоспособны.

Граф переходов и состояний представлен на рис. 3.13.

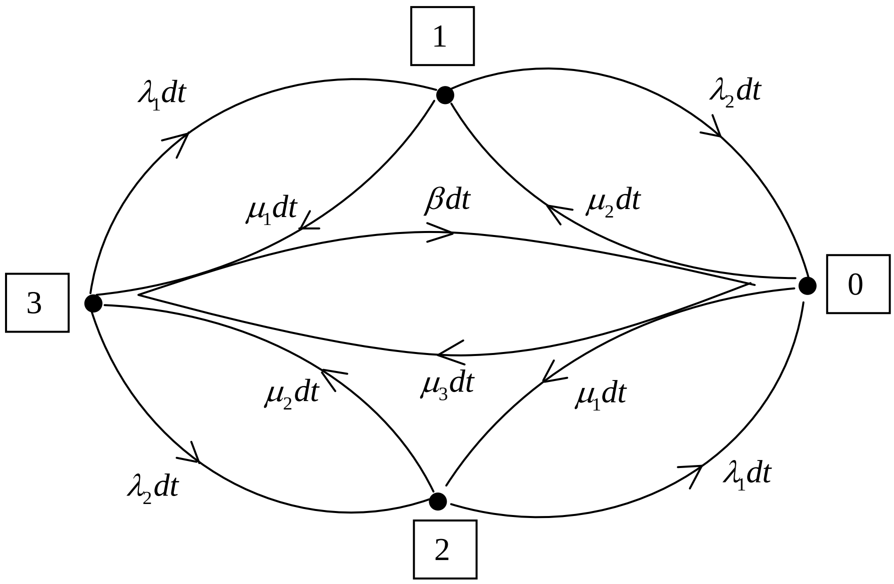


Рис. 3.13

На рисунке $\lambda_i, \mu_i (i = 1, 2)$ – интенсивности отказов и восстановлений элементов; β – интенсивность множественных отказов; μ_3 – интенсивность одновременного восстановления элементов. Эта характеристика соотносится с μ_1, μ_2 следующим образом. Так как $\mu_1 = 1/\tau_1, \mu_2 = 1/\tau_2$, где τ_1, τ_2 – относительные длительности аварийных ремонтов (ч/год), то очевидно, что τ_3 не может быть меньше, чем наибольший из интервалов восстановления τ_1 или τ_2, но не будет превосходить их суммы:

$$\tau_{1,2\max} \le \tau_3 \le \tau_1 + \tau_2 .$$

Система дифференциальных уравнений для графа (рис. 3.13) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP^{(3)}}{dt} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \beta) P^{(3)}(t) + \mu_1 P^{(1)}(t) + \mu_2 P^{(2)}(t) + \mu_3 P^{(0)}(t),\\
\frac{dP^{(1)}}{dt} &= \lambda_1 P^{(3)}(t) - (\lambda_2 + \mu_1) P^{(1)}(t) + \mu_2 P^{(0)}(t),\\
\frac{dP^{(2)}}{dt} &= \lambda_2 P^{(3)}(t) - (\lambda_1 + \mu_2) P^{(2)}(t) + \mu_1 P^{(0)}(t),\\
\frac{dP^{(0)}}{dt} &= \beta P^{(3)}(t) + \lambda_2 P^{(1)}(t) + \lambda_1 P^{(2)}(t) - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) P^{(0)}(t).
\end{aligned}\right\} \tag{3.68}$$

Для стационарного режима вероятности $P_\infty^{(0)}, P_\infty^{(1)}, P_\infty^{(2)}, P_\infty^{(3)}$ получаются при решении этой системы, если принять в ней $\frac{d}{dt} = 0$ и дополнить соотношением полноты $P_\infty^{(0)} + P_\infty^{(1)} + P_\infty^{(2)} + P_\infty^{(3)} = 1$. Коэффициент готовности вычисляется по одной из формул, определяемых режимом работы системы, $K_{Г\infty} = P_\infty^{(3)}$:

$$K_{Г\infty} = P_\infty^{(3)} + P_\infty^{(1)} + P_\infty^{(2)} = 1 - P_\infty^{(0)};$$

$$K_{Г\infty} = P_\infty^{(3)} + P_\infty^{(1)} = 1 - \left(P_\infty^{(0)} + P_\infty^{(2)}\right); \qquad (3.69)$$

$$K_{Г\infty} = P_\infty^{(3)} + P_\infty^{(2)} = 1 - \left(P_\infty^{(0)} + P_\infty^{(1)}\right).$$

Пример 2 [3]. Воздушные линии ЛЭП-330 кВ и ЛЭП – 500 кВ проходят по общей трассе длиной 100 км. Показатели надежности линий на металлических опорах для ЛЭП этой длины:

$$\textit{ЛЭП – 330 кВ} - \lambda_1 = 0,55\ {}^{1}\!/_{год},\ \ \tau_1 = 1,23\cdot 10^{-3}\,год;$$

$$\textit{ЛЭП – 500 кВ} - \lambda_2 = 0,21\ {}^{1}\!/_{год},\ \ \tau_2 = 1,63\cdot 10^{-3}\,год.$$

Интенсивность множественных отказов из-за гололеда и гроз $\beta = 0,05\ {}^{1}\!/_{год}$.

Определить коэффициент готовности для стационарного режима одновременной работы обеих ЛЭП.

Решение. Вычисляем интенсивности восстановления линий:

$$\mu_1 = \frac{1}{\tau_1} = 813\ {}^{1}\!/_{год},\quad \mu_2 = \frac{1}{\tau_2} = 613\ {}^{1}\!/_{год}.$$

При одновременном отказе обеих линий интервал значений μ_3 получаем, приняв

$$\mu_3' = \frac{1}{\tau_2} = \mu_2 = 613\ {}^{1}\!/_{год},\quad \mu_3'' = \frac{1}{\tau_1+\tau_2} = 349\ {}^{1}\!/_{год},$$

$$349 \le \mu_3 \le 613.$$

Для стационарного режима система уравнений (3.68) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&-\left(\lambda_1+\lambda_2+\beta\right)P_\infty^{(3)} + \mu_1 P_\infty^{(1)} + \mu_2 P_\infty^{(2)} + \mu_3 P_\infty^{(0)} = 0,\\
&\lambda_1 P_\infty^{(3)} - \left(\lambda_2+\mu_1\right)P_\infty^{(1)} + \mu_2 P_\infty^{(0)} = 0,\\
&\lambda_2 P_\infty^{(3)} - \left(\lambda_1+\mu_2\right)P_\infty^{(2)} + \mu_1 P_\infty^{(0)} = 0,\\
&\beta P_\infty^{(3)} + \lambda_2 P_\infty^{(1)} + \lambda_1 P_\infty^{(2)} - \left(\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)P_\infty^{(0)} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.70)$$

Сумма этих уравнений равна нулю, т.е. одно из них является следствием трех других. Поэтому для определения значений вероятностей $P_\infty^{(i)}$ должны решаться любые три из них совместно с уравнением $\sum_i P_\infty^{(i)} = 1$. При расчете 2, 3 и 4 уравнений используем:

$$0,55P_\infty^{(3)} - 813,21P_\infty^{(1)} + 0\cdot P_\infty^{(2)} + 613P_\infty^{(0)} = 0;$$

$$0,21P_\infty^{(3)} - 0\cdot P_\infty^{(1)} - 613,55P_\infty^{(2)} + 813P_\infty^{(0)} = 0;$$

$$0,05P_\infty^{(3)} + 0,21P_\infty^{(1)} + 0,55P_\infty^{(2)} - 2039P_\infty^{(2)} - 2039P_\infty^{(0)} = 0;$$

$$P_\infty^{(0)} + P_\infty^{(1)} + P_\infty^{(2)} + P_\infty^{(3)} = 1.$$

Получаем

$$P_\infty^{(3)} = 0,9989071,\ P_\infty^{(1)} = 0,000694;$$

$$P_\infty^{(2)} = 0,0003742,\ P_\infty^{(0)} = 0,0000244.$$

Искомое значение коэффициента готовности определяем по первой из формул (3.69), справедливой при необходимой для целей электроснабжения одновременной работы линий:

$$K_{Г\infty} = P_\infty^{(3)} = 0,9989071.$$

Если же достаточной является работа любой из ЛЭП коэффициент готовности

$$K_{Г\infty} = 1 - P_\infty^{(0)} = 0,999976.$$

На этом же примере поясним понятие вероятности безотказной работы, рассматривая режим параллельной работы линий. Для расчета этой характеристики следует принять $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ (линии после аварий не восстанавливаются).

Согласно рис. 3.12 с учетом различия λ_1, λ_2 можем записать

$$P_0(t) = \left[1 - \left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)\left(1 - e^{-\text{Л}_2}\right)\right] e^{-\beta t}.$$

Для t=1 году, например, получаем

$$P_0(1) = \left[1 - \left(1 - e^{-0,55}\right)\left(1 - e^{-0,21}\right)\right] e^{-0,05} = 0,91987 \cdot 0,95123 = 0,8750.$$

Если не учитывать вероятность одновременных отказов от гололеда и гроз, имеем $P_0(1) = 0,91987$.

3.3. Аналитический метод расчета надежности восстановления объектов [4]

Для определения показателей надежности электроустановок аналитическим методом необходимо составить расчетную схему соединений их элементов. Расчетная схема отражает логику связей элементов с точки зрения надежности работы всей установки или с точки зрения отказа всей установки. Расчетная схема СЭС часто не совпадает с электрической схемой. Иногда последовательно соединенные в электрической схеме элементы на логической схеме должны быть изображены параллельным соединением и наоборот. Например, шинные разъединители всех параллельных по электрической схеме присоединений составляют последовательную цепочку, если рассматривается погашение сборных шин. Расчет производится путем замены параллельных и последовательных цепей эквивалентными элементами, для чего используются формулы, определяющие общее число аварийных отключений, длительность аварийных простоев для эквивалентного элемента.

Длительность планового ремонта для каждого случая подсчитывается исходя из существующих закономерностей ремонтных работ. Здесь необходимо учитывать, что одновременные отключения цепи из двух параллельных элементов в плановый период не допускаются.

За время отключения элемента с большой длительностью ремонта может быть произведен ремонт других элементов (с относительно меньшей длительностью ремонта).

В зависимости от применяемой схемы соединения восстановление электроснабжения может заключаться:

- в замене отказавшего элемента;
- ремонте поврежденного элемента;
- операции автоматического секционирования;

АВР, АПВ;

- производстве переключений вручную.

Основные допущения аналитического метода расчета заключаются в следующем:

1. Перерывы электроснабжения, ликвидируемые работой автоматики (АПВ, АВР), не учитываются. Устройства релейной защиты считаются действующими безотказно.
2. Кратковременные отключения (производство переключений вручную) подсчитываются отдельно. Длительность перерывов электроснабжения при кратковременных отключениях принимается 20 … 30 мин. Расчетная схема для кратковременных отключений должна содержать только элементы, соединенные последовательно; параллельные ветви учитывать не следует.
3. Для длительных отключений (ремонт элементов) рассматриваются также отказы параллельных цепей, вызванные наложениями повреждений одного элемента на аварийное восстановление другого и аварийных повреждений на плановые отключения.
4. Расчетные схемы для всех видов отключений составляются отдельно для каждого потребителя или (и) групп потребителей.

5. Если параллельные цепи имеют перемычку (линии, переключательные посты дальних ЛЭП, секционные или шиносоединительные выключатели), расчетные схемы для кратковременных и длительных отключений приходится составлять для режимов с включенной перемычкой (считая её абсолютно надежной) и с отключенной перемычкой (считая её находящейся в плановом или аварийном ремонте).
6. Аналитические расчеты основываются на предположении, что поток отказов элементов на расчетном промежутке – простейший пуассоновский, а закон распределения вероятности восстановления – экспоненциальный.

При сделанных допущениях для показателей надежности элементов электроустановок справедливы следующие формулы теории надежности.

Для коэффициента простоя:

$$q_{ав} = 1 - K_Г = \frac{\lambda T_В}{8760},\ q_{пл} = \frac{\tau_{пл}}{8760}.$$

Для среднего числа отказов за время *t*: $\alpha = \lambda \cdot t$.

Для последовательного соединения элементов:

$$\lambda_{посл} = \sum_{t=1}^{n} \lambda_t,\quad T_{Впосл(авар)} = \frac{1}{\lambda_{посл}} \sum_{t=1}^{n} \lambda_t \cdot T_{Вi},\quad q_{ав(посл)} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \lambda_t \cdot T_{Вi}}{8760}.$$

Среднее время одного планового ремонта последовательной цепи

$$T_{пл.посл} = \frac{1}{m_ц} \sum_{f=1}^{m_ц} T_{плf}^{\max},$$

где $m_ц$ – количество плановых ремонтов в течении ремонтного цикла; $T_{плf}^{\max}$ – длительность планового ремонта элемента, максимальная из всех отключаемых в *f*-м простое.

Коэффициент планового простоя последовательной цепи

$$q_{пл(посл)} = \frac{\eta_{посл}}{8760} \cdot T_{пл(посл)},$$

где $\eta_{посл}$ частота плановых ремонтов.

*Пример***.** На рисунке 3.14 приведена схема питания упрощенных подстанций 110 кВ, предназначенных для глубокого ввода на территорию промышленного предприятия.

Расчетные значения показателей надежности элементов схемы даны в табл. 3.1.

Показателями надежности для схем питания потребителей являются частоты аварийных отключений двух трансформаторов каждой подстанции $\lambda_{ав}$ и коэффициенты аварийного восстановления $q_{ав}$.

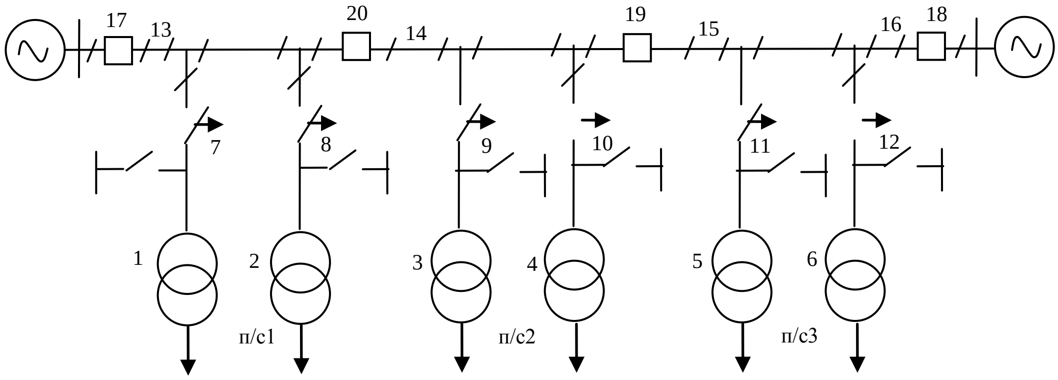


Рис. 3.14

Таблица 3.1

Элемент	Номер на схеме	λ_i, 1/год	T_B, ч	$T_{пл}$, ч/год
Трансформатор	1 … 6	0,01	100	25
Короткозамыкатель с отделителем	7 … 12	0,05	8	8
Участок ВЛ	13 … 16	0,5	8	50
Масляный выключатель	17 … 20	0,02	20	30

Решение. Составим расчетные схемы (рис. 3.15, 3.16) для кратковременных и длительных аварийных отключений.

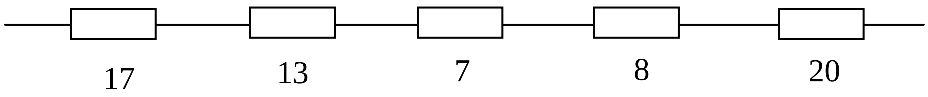


Рис. 3.15

В соответствии с расчетной схемой рис. 3.15

$$\lambda_{ав(п/ст)} = \lambda_{17} + \lambda_{13} + \lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_{20} = 0,02 + 0,5 + 0,05 + 0,05 + 0,02 = 0,64 \ (откл/год)$$

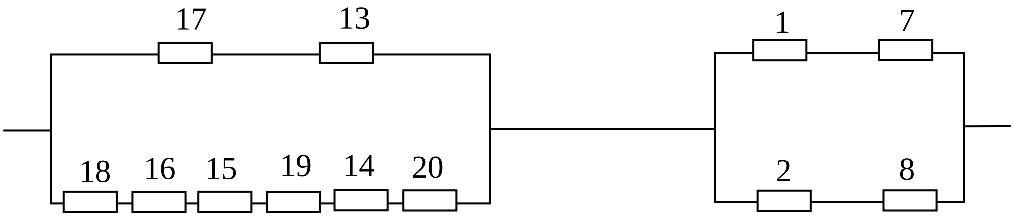


Рис. 3.16

В соответствии с расчетной схемой рис. 3.16

$$\lambda_{ав(п/ст1)} = (\lambda_1 + \lambda_7)(q_2 + q_8) + (\lambda_2 + \lambda_8)(q_1 + q_7) +$$
$$+(\lambda_{13} + \lambda_{17})(q_{18} + q_{16} + q_{15} + q_{19} + q_{14} + q_{20}) +$$
$$+(q_{13} + q_{17})(\lambda_{18} + \lambda_{16} + \lambda_{15} + \lambda_{19} + \lambda_{14} + \lambda_{20}).$$

Здесь $q_2 + q_8 = q_1 + q_7$.

На основании приведенных формул имеем

$$q = q_{ав(посл)} + q_{пл(посл)} = \frac{\lambda_1 T_{B1} + \lambda_7 T_{B7}}{8760} + \frac{\tau_{пл1}}{8760}.$$

Так как τ для трансформатора больше, чем для блока $к.з-од$, то

$$q_2+q_8=q_1+q_7=\frac{0,01\cdot 100+0,05\cdot 8}{8760}+\frac{25}{8760}=0,003.$$

Аналогично

$$q_{18}+q_{16}=q_{19}+q_{15}=q_{20}+q_{14}=q_{17}+q_{13}=\frac{\lambda_{18}T_{B18}+\lambda_{16}T_{B16}}{8760}+\frac{\tau_{пл16}}{8760}=$$
$$=\frac{0,02\cdot 20+0,5\cdot 8}{8760}+\frac{50}{8760}=0,0062.$$

После подстановки полученных значений получаем

$$\lambda_{ав(п/ст1)}=(0,01+0,05)\cdot 0,003+(0,01+0,05)\cdot 0,003+$$
$$+(0,5+0,02)\cdot 3\cdot 0,0062+(0,5+0,02)\cdot 3\cdot 0,0062=0,0197(откл/год).$$

Основную составляющую в общем числе погашений дают аварийные отключения линий, поэтому можно принять время восстановления питания, равным 8 ч при длительных отключениях и 0,25 ч при кратковременных отключениях, при произведении отключений выездной бригадой – 0,5 ч.

Коэффициент аварийного простоя в первом случае будет равен:

$$q_{ав(п/ст1)}=\frac{\lambda_{ав.к}\cdot T_{ав.к}+\lambda_{ав.д}\cdot T_{ав.д}}{8760}=\frac{0,64\cdot 0,25+0,0197\cdot 8}{8760}=0,00003625.$$

Суммарная частота отключений в этом случае

$$\lambda_{ав(п/ст1)}=0,64+0,0197=0,6597(откл/год).$$

3.4. Логико-вероятностный метод определения показателей надежности

Этот метод базируется на использовании двоичных функций, или функций алгебры логики, к которым применяется теория вероятностей. Дадим представление об алгебре логики и построении функции алгебры логики (ФАЛ) для систем электроснабжения, следуя [2].

Алгебра логики или Булева* алгебра представляет собой раздел математической логики, занимающийся исчислением высказываний.

Под высказыванием понимается любое грамматическое предложение, относительно которого можно говорить о его истинности или ложности без учета конкретного содержания. Отдельные высказывания будем обозначать буквой X так, как выше обозначали все случайные величины. В данном разделе эта величина может принимать два значения: *истина* – $X=1$, *ложь* –$X=0$. Значение X может быть и переменным. Например, высказывание «элемент работоспособен» в одной ситуации (при одном значении времени) может быть истинным ($X=1$), а в другой – ложным ($X=0$). Переменная величина, принимающая только два значения (1 или 0), называется двоичной.

Все сложные высказывания, истинность которых определяется значениями истинности других, более простых высказываний, являются функциями последних, которые таким образом, допустимо считать аргументами этих функций. Эти функции принимают лишь два значения (1 или 0), определяются наборами двоичных аргументов и называются двоичными функциями или функциями алгебры логики (ФАЛ).

В алгебре логики рассматриваются три основных логические операции: *отрицание*, *конъюнкция* (логическое умножение), *дизъюнкция* (логическое сложение).

---

* По имени английского математика Джорджа Буля (1815–1864), впервые рассмотревшего математический подход к вопросам исчисления высказываний и заложившего основы математической логики.

Отрицание. Отрицание высказывания X обозначается как $\bar{X}$ (читается «не X»). Значение истинности $\bar{X}$ определяется соотношениями

$$\bar{1}=0; \bar{0}=1.$$

Конъюнкция. Логическое умножение высказываний X_1 и X_2 обозначается как $X_1 \wedge X_2$ или $X_1 \wedge X_2$(читается X_1 и X_2, $\wedge$ – знак логического умножения). Значение истинности $X_1 \wedge X_2$ определяется соотношениями (таблица умножения):

$$0 \wedge 0 = 0,\ 0 \wedge 1 = 0,\ 1 \wedge 0 = 0,\ 1 \wedge 1 = 1.$$

Аналогичные соотношения для состояний отказа и работы имеют место в системе из двух соединенных последовательно элементов (рис. 3.17):

отказ и отказ = отказ системы;
отказ и работа = отказ системы;
работа и отказ = отказ системы;
работа и работа = работоспособное состояние системы.

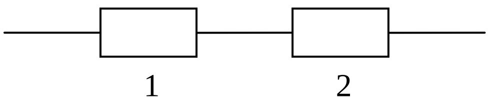


Рис. 3.17

Таким образом, конъюнкция представляет собой сложное высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны составляющие его высказывания.

Дизъюнкция. Логическое сложение высказываний X_1 и X_2 обозначается как $X_1 \vee X_2$ или $X_1 + X_2$ (читается X_1 или X_2). Значение истинности определяется соотношениями (таблица сложения).

$$0 \vee 0=0,\ 0 \vee 1=1,\ 1 \vee 0=1,\ 1 \vee 1=1.$$

Аналогичные соотношения для состояний отказа и работы имеет место в системе из двух соединенных параллельно элементов (рис. 3.18):

отказ и отказ = отказ системы;
отказ и работа = работоспособное состояние системы;
работа и отказ = работоспособное состояние системы;
работа и работа = работоспособное состояние системы.

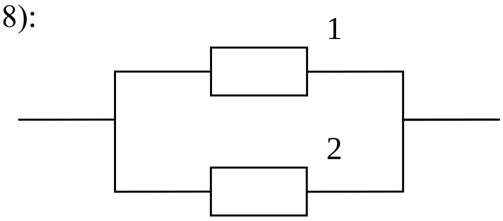


Рис. 3.18

Таким образом, дизъюнкция – сложное высказывание, ложное тогда и только тогда, когда ложны оба слагающие его выражения.

Основные правила преобразования логических выражений:

$$x \cdot 1 = x;\quad x+1=1,\quad x \cdot 0=0;\quad x+0=x;$$

$$x \cdot x = x;\quad x+x=x,\quad x \cdot \bar{x}=0;\quad x+\bar{x}=1.$$

*Сочетательный (*ассоциативный) закон:

$$X_1 \cdot (X_2 \cdot X_3) = (X_1 \cdot X_2) \cdot X_3 = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3;$$

$$X_1 + (X_2 + X_3) = (X_1 + X_2) + X_3 = X_1 + X_2 + X_3.$$

Переместительный (куммутативный) закон:

$$X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_1,\quad X_1 + X_2 = X_2 + X_1,$$

Распределительный (дистрибутивный) закон:

$$X_1 \cdot (X_2 + X_3) = X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_3;$$

$$X_1 + (X_2 \cdot X_3) = (X_1 + X_2) \cdot (X_1 + X_3).$$

Закон инверсий:

$$(\overline{X_1 \cdot X_2}) = \bar{X}_1 + \bar{X}_2;\quad (\overline{X_1 + X_2}) = \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2.$$

Операция поглощения:

$$(X_1 \cdot X_2) + X_1 = X_1;\quad X_1(X_2 + X_1) = X_1.$$

Операция склеивания:

$$\left(X_1 \cdot X_2\right)+\left(X_1 \cdot \bar{X}_2\right)=X_1 \cdot X_2+X_1 \cdot \bar{X}_2=X_1 \cdot\left(X_2 \cdot \bar{X}_2\right)=X_1 \cdot 1=X_1;$$

$$\left(X_1 \cdot X_2\right)+\left(\bar{X}_1 X_2\right)=X_1 X_2+\bar{X}_1 X_2=X_2 \cdot\left(X_1+\bar{X}_1\right)=X_2 \cdot 1=X_2.$$

Если обозначить состояние элементов системы через логические переменные $X_{1,}X_2,...,$ принимающие значение «1», когда элементы работоспособны и «0», когда они неработоспособны, а состояние системы обозначить логической переменной *Z*, равной «1» в случае работоспособности и «0» при неработоспособности системы, то эта функция, называемая логической функцией работоспособности (ФР) системы, будет характеризовать состояние системы через состояния ее элементов.

Например, при последовательном и параллельном соединении элементов можем записать

$$Z_{посл}=X_1 \wedge X_2 \wedge ... X_n = X_1 \cdot X_2 ... \cdot X_n;$$

$$Z_{пар}=X_1 \vee X_2 \vee ... X_n = X_1 + X_2 + ... X_n.$$

Если функциональную связь элементов в системе структурно (в смысле надежности) можно представить в виде некоторой схемы соединения элементов, связи между которыми образуют пути между источником и потребителем, то для такой схемы разработаны регулярные методы получения логической функции работоспособности [2]. В простых случаях соединения составление этой функции сводится к перебору путей от источника к потребителю. Например, в логической схеме (рис. 3.19) для третьего узла имеем

$$Z_3 = X_1 \wedge X_{12} \wedge X_2 \wedge X_{23} \wedge X_3 + X_1 \wedge X_{14} \wedge X_4 \wedge X_{43} \wedge X_3 +$$
$$+X_1 \wedge X_{12} \wedge X_2 \wedge X_{24} \wedge X_4 \wedge X_{43} \wedge X_3 + X_1 \wedge X_{14} \wedge X_4 \wedge X_{42} \wedge X_2 \wedge X_{23} \wedge X_3.$$

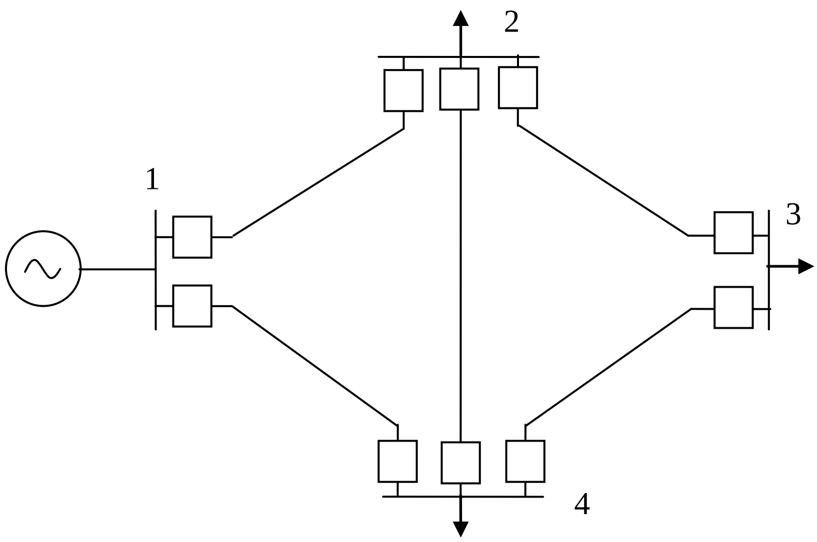


Рис. 3.19

Записанное выражение соответствует предположению о достаточной пропускной способности всех линий для электроснабжения нагрузки узла 3. Через $X_1, X_2...$обозначены состояния 1, 2,… узлов схемы, через $X_{12}, X_{23}...$состояния связей (линий) между узлами 1 и 2, 2 и 3 и т.д. Функция Z_3 в этой форме состоит из суммы (дизъюнкции) нескольких членов, каждый из которых представляет собой произведение (конъюнкцию) определенного набора состояний элементов X_i, X_{jk}. Это так называемая дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ). В ряде случаев удобней использовать не функции работоспособности *Z*, а функцию неработоспособности $\bar{Z}$. Для схемы рис. 3.19 она имеет вид

$$\bar{Z}_3=\left(\underline{X_1\wedge X_{12}\wedge X_2\wedge X_{23}\wedge X_3}\right)\left(\underline{X_1\wedge X_{14}\wedge X_4\wedge X_{43}\wedge X_3}\right)\times$$
$$\times\left(\underline{X_1\wedge X_{12}\wedge X_2\wedge X_{24}\wedge X_4\wedge X_{43}\wedge X_3}\right)\times\left(\underline{X_1\wedge X_{14}\wedge X_4\wedge X_{48}\wedge X_2\wedge X_{23}\wedge X_3}\right)=$$
$$=\left(\bar{X}_1+\bar{X}_{12}+\bar{X}_2+\bar{X}_{23}+\bar{X}_3\right)\left(\bar{X}_1+\bar{X}_{14}+\bar{X}_{43}+\bar{X}_3\right)\times$$
$$\times\left(\bar{X}_1+\bar{X}_{12}+\bar{X}_2+\bar{X}_{24}+\bar{X}_4+\bar{X}_{43}+\bar{X}_3\right)\left(\bar{X}_1+\bar{X}_{14}+\bar{X}_4+\bar{X}_{42}+\bar{X}_2+\bar{X}_{23}+\bar{X}_3\right).$$

Эта формула может быть подвергнута дальнейшим преобразованиям с помощью приведенных выше правил и законов преобразования логических выражений.

Поясним порядок дальнейшего использования найденных функций Z и $\bar{Z}$ для определения показателей надежности.

Если система невосстанавливаемая (состоит из невосстанавливаемых элементов), то получаемые функции являются логическими функциями событий безотказной работы и отказа соответственно.

Если система восстанавливаемая и описана в виде функции работоспособности Z, то вероятность нахождения системы в момент t в работоспособном состоянии можно найти как вероятность того, что функция Z примет значение, равное единице, т.е.

$$K_Г(t)=P(Z=1).$$

Если найдена функция неработоспособности $\bar{Z}$, то определяется коэффициент неготовности

$$q(t)=P(\bar{Z}=1).$$

При выполнении расчетов допустимо принять, что потоки отказов элементов являются стационарными пуассоновским (простейшими), т.е. средняя частота отказов ω и интенсивность отказов λ равны и постоянны, $\omega=\lambda=const$, а законы восстановления элементов системы – экспоненциальные. При этих допущениях с высокой точностью вероятность безотказной работы

$$P_0(t)\approx e^{-\omega t}=e^{-\lambda t}.$$

Вычисление показателя ω для общего случая очень громоздко. Для последовательно соединенных элементов частота отказов, как было показано выше, равняется сумме частот для отдельных элементов:

$$\omega=\lambda_{посл}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

Для системы из двух параллельно соединенных элементов число отказов системы за интервал времени T

$$\Omega=\omega_1 t_{B2}+\omega_2 t_{B1},$$

где t_{B2} – суммарное время восстановления второго элемента за интервал T (среднее значение); t_{B1} – аналогичная величина для первого элемента.

Поделив это выражение на T, находим частоту отказов

$$\omega=\omega_1 t_{вЕ2}/T+\omega_2 t_{вЕ1}/T=\omega_1 q_2+\omega_2 q_1. \qquad (3.71)$$

где q_1 и q_2 – коэффициенты неготовности элементов (относительное время пребывания в неработоспособном состоянии).

Таким образом, отказ системы в этом случае происходит только тогда, когда отказ одного элемента накладывается на неработоспособное состояние другого.

Если обобщить формулу (3.71) на систему из n элементов, можем определить частоту отказов

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}\omega_i q_{ci}, \qquad (3.72)$$

где q_{ci} – вероятность (относительная длительность) нахождения системы без i-го элемента в неработоспособном состоянии. Смысл этой формулы аналогичен смыслу формулы (3.71):

отказ системы происходит тогда, когда отказывает один элемент, а остальные при этом находятся в неработоспособном состоянии.

Для систем любой сложности частоту отказов и интенсивность восстановления можно вычислить согласно [2] по выражениям

$$\omega = \frac{1}{1-q}\sum_{i=1}^{n} \frac{Dq}{Dq_i} q_i \mu_i = \frac{1}{K_Г}\sum_{i=1}^{n} \frac{DK_Г}{DK_{Гi}} K_{Гi}\omega_i; \tag{3.73}$$

$$\omega = \frac{1}{1-K_Г}\sum_{i=1}^{n} \frac{DK_Г}{DK_{Гi}} K_{Гi}\omega_i = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} \frac{Dq}{Dq_i} q_i \mu_i. \tag{3.74}$$

В качестве примеров использования логических функций и формул (3.73), (3.74) рассмотрим системы из n последовательных и n параллельных элементов. С решением задачи для мостиковой схемы можно ознакомиться по книге [2].

Система из *n* последовательно соединенных элементов

Логическая функция работоспособности для этого случая имеет вид $Z = X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n$. Поэтому для систем из невосстанавливаемых элементов можем записать

$$P_0(t) = P(Z=1) = P(X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n = 1) = P(X_1 = 1)\cdot P\left(X_2 = 1 \middle/ X_1 = 1\right)\times$$

$$\times P\left(X_3 = 1 \middle/ X_1 \wedge X_2 = 1\right) \ldots P\left(X_n = 1 \middle/ X_1 \wedge X_2 \wedge X_{n-1} = 1\right),$$

где $P(X_2 = 1/X_1 = 1)$, например, вероятность работоспособного состояния 2-го элемента при условии, что работоспособен 1-й элемент.

Для системы из независимых элементов имеем

$$P_0(t) = P_{01}(t)P_{02}(t)\ldots P_{0n}(t) = \prod_{i=1}^{n} P_{0i}(t) = \exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\omega_i t\right].$$

Для систем из восстанавливаемых элементов следует определить коэффициент готовности и частоту отказов:

$$K_Г(t) = \prod_{i=1}^{n} K_{Гi}(t);$$

$$\omega = \frac{1}{K_Г}\sum_{i=1}^{n} \frac{DK_Г}{DK_{Гi}} K_{Гi}\omega_i = \frac{1}{K_Г}\sum_{i=1}^{n} K_Г\omega_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i.$$

Система из *n* параллельно соединенных элементов

Логическая функция для этого состояния имеет вид

$$Z = X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n.$$

Для систем из невосстанавливаемых элементов

$$P_0(t) = P(Z=1) = P(X_1=1) + \ldots + P(X_n=1) - P(X_1=1)\cdot P(X_2=1) -$$

$$-P(X_1=1)\cdot P(X_3=1) - \ldots + P(X_1=1)\cdot P(X_2=1)\cdot P(X_3=1) + \ldots$$

Следовательно, здесь целесообразно использовать функцию неработоспособности

$$Q(t) = P(\bar{Z}=1) = P(\bar{X}_1=1)\cdot P\left(\bar{X}_2 = 1 \middle/ \bar{X}_1 = 1\right)\cdot\ldots\cdot P\left(\bar{X}_n = 1 \middle/ \bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \ldots \bar{X}_n = 1\right).$$

Для систем из восстанавливаемых элементов

$$q = \prod_{i=1}^{n} q_i, \quad \omega = \frac{1}{1-q}\sum_{i=1}^{n}\frac{Dq}{Dq_i} q_i\mu_i = \frac{1}{1-q}\sum_{i=1}^{n} q\mu_i. \ \omega = \frac{q}{K_Г}\sum_{i=1}^{n} \frac{K_{Гi}}{q_i}\omega_i.$$

3.5. Метод статистических испытаний (имитационного моделирования)

Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) разработан американскими математиками Дж. Нейманом и С. Уламом в 1949 г. Это численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин. Метод является универсальным для расчета и анализа больших систем, характеризующихся вероятностными зависимостями. Теоретической основой метода статистических испытаний является закон больших чисел, устанавливающий при определенных условиях предельное равенство среднего арифметического наблюдаемых значений случайной величины математическому ожиданию этой величины при бесконечном увеличении числа опытов. Классическим примером, иллюстрирующим практическое использование метода, является следующий.

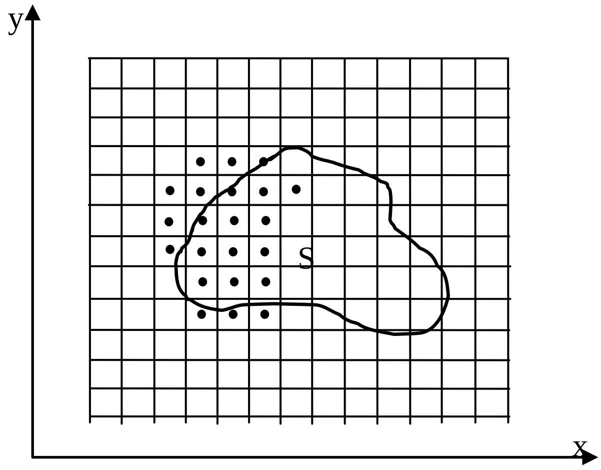


Рис. 3.20

Вычисляется площадь плоской фигуры, расположенной внутри единичного квадрата. Для этого нумеруем точки, отвечающие центрам элементарных квадратов (рис. 3.20) и производим N опытов по отбору случайных чисел из совокупности указанных номеров. Пусть N' из этих чисел относятся к точкам внутри фигуры. Очевидно, что искомая площадь $S \approx N'/N$ и при $N \to \infty$ это значение стремится к точному.

При моделировании работы системы процесс ее функционирования представляется цепью изменений состояния системы $C_1 \to C_2 \to ... \to C_k$ в случайные моменты времени $t_1, t_2, ..., t_k$. Схематически этот процесс для системы из n элементов представлен на рис. 3.21.

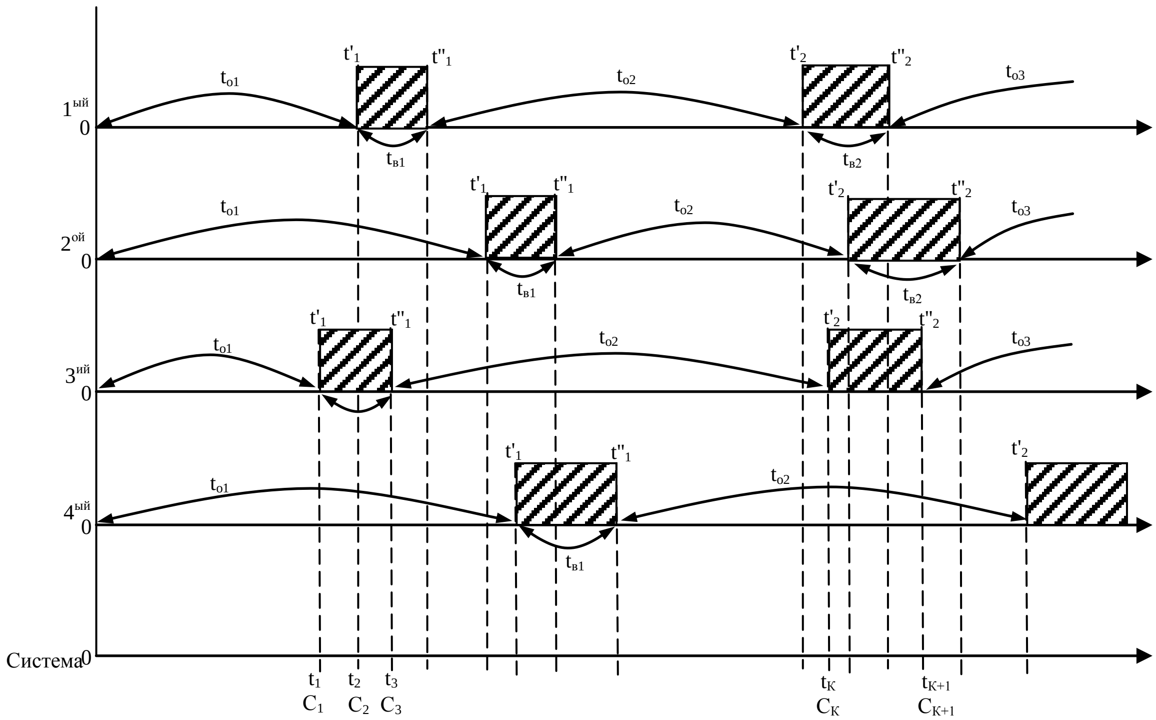


Рис. 3.21

На рисунке приняты следующие обозначения:

$t_k^{'}$ – момент *к*-го отказа; $t_k^{"}$ – момент завершения *к*-го отказа элемента;

t_{ok} – интервал времени от момента (*к-1*)-го восстановления до момента *к*-го отказа;

$t_{вk}$ – интервал *к*-го восстановления элемента.

Имеем

$$t_1^{'} = t_{01}, \quad t_1^{"} = t_1^{'} + t_{в1};$$
$$t_2^{'} = t_1^{"} + t_{02}, \quad t_2^{"} = t_2^{'} + t_{в2};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_k^{'} = t_{k-1}^{"} + t_{ok}, \quad t_k^{n} = t_k^{'} + t_{вk}.$$

Интервалы времени t_{ok} и $t_{вk}$ представляют собой отдельные реализации непрерывных случайных величин t_0 и $t_в$, характеризующих время исправной работы и время восстановления элемента системы.

При моделировании на ЭВМ процесса функционирования системы организуется генерация потоков случайных чисел, подчиненных законам распределения времени работы и времени восстановления элементов системы. На базе этих чисел формируются интервалы времени t_{ok} и $t_{вk}$.

Обычно моделируется не реализация случайных величин с заданным распределением, а некоторое базовое распределение, которое затем, с помощью аналитических преобразований, превращается в реализацию с нужным распределением. В качестве базового обычно используется равномерное распределение на отрезке (0,1),

$$p(t) = \begin{cases} 1, 0 \le t \le 1 \\ 0, t > 1 \end{cases},$$

с параметрами m и σ, равными

$$\nu_1 = m = \int_0^1 t \cdot p(t)\,dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2};$$

$$\nu_2 = \int_0^1 t^2 \cdot dt = \frac{1}{3}, \quad \to \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{1}{4 \cdot 3}, \quad \sigma = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Последовательность случайных чисел с нормальным распределением получается из равномерного следующим образом (алгоритмический расчет) [6]. Согласно центральной предельной теореме (см. разд. 2.2), сумма достаточно большого числа случайных величин ζ_i распределена асимптотически нормально. Отбирая эти числа из базовой совокупности с равномерным распределением на отрезке (0,1) для суммы из *n* слагаемых

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + ... + \zeta_n,$$

получим нормальное распределение с параметрами $m_n = n/2, \quad \sigma_n = \sqrt{n}/2\sqrt{3}$,

причем хорошее согласие наблюдается уже при *n=8÷10* [6]. Нормированную случайную величину, распределенную нормально с параметрами $m_n = 0$ *и* $\sigma_n = 1$, найдем по формуле

$$y_n = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \zeta_i - n/2.$$

Случайные числа y_i с показательным законом распределения, характерным для плотности вероятности отказов оборудования, получаются при использовании аналитического выражения [6]

$$y_i = -\frac{1}{\lambda} \ell n \zeta_i,$$

где ζ_i, как и выше, случайные числа с равномерной плотностью распределения на интервале (0,1).

Дальнейший расчет – формирование потоков отказов и восстановлений для каждого из элементов системы и анализ ее состояния, может быть осуществлен двумя способами: при параллельном и последовательном решении задачи.

При параллельном решении определяются все моменты отказов и восстановлений на рассматриваемом интервале времени *T* для каждого элемента в отдельности. Затем по состоянию элементов в каждый момент времени определяются состояния системы C_k. Из них отбираются те, которые характеризуют отказ системы, например на рис. 3.20 принято, что при совпадении отказов 1-го ,2-го и i-го элементов происходит отказ системы. Следовательно, наступление события C_k является моментом первого отказа системы, а интервал времени от C_k до $C_{k+\lambda}$ – временем простоя системы.

Запомнив все представляющие интерес величины проведенного испытания, например время до первого отказа системы, число отказов, время простоя и т.п., повторяют такие испытания системы *N* раз. Если из *N* испытаний системы отказала в N' случаях хотя бы по одному разу, то вероятность ее отказа будет такой: $Q(T) \cong N'/N$ и при $N \to \infty$ это отношение становится точным. Частота отказов при этом

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{N} n_\nu / (NT),$$

где n_ν – число отказов в опыте номера ν.

При последовательном решении задачи сначала моделируются моменты только первого (или очередного) изменения состояния каждого из элементов. По наименьшему из них формируется первый переход C_1 и одновременно полученное состояние системы анализируется на отказ и т.д.

Говоря о точности метода в целом, необходимо отметить, что ошибка вычислений обратно пропорциональна $\sqrt{N}$, т.е. $\varepsilon \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$. Это означает, что для уменьшения ошибки на порядок (один знак) необходимо в 100 раз увеличить объем испытаний. Таким образом, данный метод наиболее приемлем при оценочных расчетах и задачах, где удовлетворительная точность результата имеет порядок 5÷ 10 % [6].

Библиографический список

1. Идельчик, В.И. Электрические системы и сети / В.И. Идельчик. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 592 с.
2. Китушин, В.Г. Надежность энергетических систем: учеб. пособие для вузов / В.Г. Китушин. – М.: Выс. шк., 1984.
3. Гук, Ю.Б. Расчет надежности схем электроснабжения / Ю.Б. Гук [и др.]. – Л.: Энергоатомиздат, 1990.
4. Папков, Б.В. Надежность и эффективность электроснабжения / Б.В. Папков. – Н.Новгород: 1996.
5. Розанов, М.Н. Надежность электроэнергетических систем / М.Н. Розанов. – М.: Энергоатомиздат, 1984.
6. Зорин, В.В. Надежность систем электроснабжения / В.В. Зорин [и др.]. – Киев – Лейпциг, 1984.
7. Смирнов, Н.В. Курс теории вероятностей и математической статистики. Для технических приложений / Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. – М.: Наука, 1965. – 512 с.
8. Александров, Г.Н. Электрическая прочность наружной высоковольтной изоляции / Г.Н. Александров, В.Л. Иванов, В.Е. Кизеветтер. – Л.: Энергия, 1969. – 239 с.
9. Бургсдорф, В.В. Заземляющие устройства электроустановок / В.В. Бургсдорф, А.И. Якобс.– М.: Энергоатомиздат, 1987. – 400 с.
10. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1964. – 872 с.
11. Янке, Е. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш – М.: Наука, 1977. – 342 с.
12. Сегал, Б.И. Пятизначные математические таблицы / Б.И. Сегал, К.А. Семендяев. – М.: Физматгиз, 1962. – 464 с.

СЛЫШАЛОВ Владимир Константинович

ОСНОВЫ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ
Конспект лекций