МГТУ им. Н.Э. Баумана©, НУК ФН,
кафедра ”Математического моделирования”

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К ЗАЧЁТУ
ПО СПЕЦКУРСУ "МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ"
для ВФН-12, лектор: Киндеркнехт Я.А., 2013 г.

1. Линейный оператор и его область определения в гильбертовом пространстве; сопряжённый и самосопряжённый оператор, неотрицательно (положительно) определённый линейный оператор. Оператор Штурма–Лиувилля; доказать его самосопряжённость, неотрицательную определенность.

2. Собственные числа и собственные векторы (функции) линейного оператора. Задача Штурма–Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма-Лиувилля. Доказать неотрицательность собственных чисел оператора Штурма–Лиувилля. Доказать ортогональность с весом ρ собственных функций, отвечающих различным собственным числам. Сформулировать теорему Стеклова.

3. Специальные функции. Гамма-функция Эйлера. Цилиндрические специальные функции, их свойства. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя.

4. Обобщённые функции: пространства основных и обобщённых функций, сходимость в них. Задача о плотности точечной массы. Регулярные и сингулярные обобщённые функции. Дельта-функция Дирака.

5. Операции над обобщёнными функциями: линейная комбинация, умножение на гладкую функцию, дифференцирование, свёртка.

6. Преобразование Лапласа, его свойства. Применение преобразования Лапласа для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

7. Передаточная функция и интерал Дюамеля. Преобразование Лапласа обобщённых функций.

8. Преобразование Фурье, его свойства. Преобразование Фурье обобщённых функций.

9. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с помощью преобразования Фурье.

10. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора. Формула Дюамеля. Фундаментальные решения оператора теплопроводности в $\mathbb{R}^n$, одномерного волнового оператора.

11. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора. Формула Дюамеля. Фундаментальные решения операторов Лапласа и Гельмгольца в $\mathbb{R}^3$.

12. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора. Формула Дюамеля. Метод включения начальных условий в мгновенно действующие источники.

II. Задачи для подготовки к зачету.

1. Найти собственные числа и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля для оператора $L = -\frac{d^2}{dx^2} + 1$ на отрезке $[0,2]$ с заданными краевыми условиями $u(0) = u'(2) = 0$ и весом $\rho \equiv 3$. Разложить функцию $f(x) = x^2 - 1$ в ряд Фурье по собственным функциям данной задачи Штурма–Лиувилля в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2([0,2],\rho)$.

2. Построить график функции $\varphi * \psi$, где функция $\psi(x) = \eta(x) - \eta(x-1)$, а функция $\varphi(x)$ вне отрезка $[-2,3]$ равна нулю, а в отрезке $[-2,3]$ графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,1)$, $B(0,-1)$, $C(1,-1)$, $D(3,1)$.

3. Решить задачу Коши:
$$x''(t) - x'(t) = \frac{e^{2t}}{2+e^t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -2.$$

4. Показать, что обобщённая функция f совпадает с обобщённой функцией g:
$$f(x) = \cos x\delta'(x), \qquad g(x) = \delta'(x).$$

5. Найдите вторую обобщенную производную функции:
$$f(x) = |x| + \sin(x-2) - 3\eta(x-2).$$

6. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге:
   $\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$
   $u'_r(2,\varphi) = (\varphi - \pi)^2.$

7. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце:
   $\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$
   $u(1,\varphi) = 0.$
   $u'_r(2,\varphi) = (\varphi - \pi)^2.$

8. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке
   $u'_t = \frac{1}{9}u''_{xx}, \quad x \in (0,3), \quad t \ge 0,$
   $u(x,0) = 8\sin^3 3\pi x - 4\sin 12\pi x, \quad u(0,t) = u(3,t) = 0.$

9. Решить задачу Коши–Дирихле для однородного волнового уравнения на отрезке
   $u''_{tt} = \frac{1}{4}u''_{xx}, \quad x \in (0,4), \quad t \ge 0,$
   $u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = x(4-x)$
   $u(0,t) = u(4,t) = 0$