Типовое домашнее задание по курсу “Методы математической физики” для ВФН, 2013 уч.г., лектор: Киндеркнехт Я.А.

Задача 1

Пользуясь теоремами интегрирования изображения и интегрирования оригинала найти изображения заданных функций; найденный результат проверить для первой из заданных функций по первой теореме разложения, развертывая в ряды как оригинал, так и полученное изображение.

N вар.		N вар.	
1	$\frac{1-e^{-t}}{t};\ \int\limits_0^t \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}d\tau$	2	$\frac{e^{t}-1}{t};\ \int\limits_0^t \frac{e^{\tau}-1}{\tau}d\tau$
3	$\frac{\sin t}{t};\ \int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$	4	$\frac{1-\cos t}{t};\ \int\limits_0^t \frac{1-\cos\tau}{\tau}d\tau$
5	$\frac{\operatorname{ch}t-1}{t};\ \int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch}\tau-1}{t}d\tau$	6	$\frac{\operatorname{sh}t}{t};\ \int\limits_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}d\tau$
7	$\frac{\cos\alpha t-\cos\beta t}{t};\ \int\limits_0^t \frac{\cos\alpha\tau-\cos\beta\tau}{\tau}d\tau$	8	$\frac{\operatorname{ch}t-\cos t}{t};\ \int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch}\tau-\cos\tau}{\tau}d\tau$
9	$\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{t};\ \int\limits_0^t \frac{e^{\alpha\tau}-e^{\beta\tau}}{\tau}d\tau$	10	$\frac{e^{t}-\cos t}{t};\ \int\limits_0^t \frac{e^{\tau}-\cos\tau}{\tau}d\tau$
11	$\frac{\cos t-e^{-t}}{t};\ \int\limits_0^t \frac{\cos\tau-e^{-\tau}}{\tau}d\tau$	12	$\frac{\operatorname{ch}\alpha t-\operatorname{ch}\beta t}{t};\ \int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch}\alpha\tau-\operatorname{ch}\beta\tau}{\tau}d\tau$
13	$\frac{1-\cos t}{t^2};\ \int\limits_0^t \frac{1-\cos\tau}{\tau^2}d\tau$	14	$\frac{\operatorname{ch}t-1}{t^2};\ \int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch}\tau-1}{\tau^2}d\tau$
15	$\frac{t-\sin t}{t^2};\ \int\limits_0^t \frac{\tau-\sin\tau}{\tau^2}d\tau$	16	$\frac{e^{t}-t-1}{t^2};\ \int\limits_0^t \frac{e^{\tau}-\tau-1}{\tau^2}d\tau$
17	$\frac{e^{-t}+t-1}{t^2};\ \int\limits_0^t \frac{e^{-\tau}+\tau-1}{\tau^2}d\tau$	18	$\frac{\operatorname{ch}t-\cos t}{t^2};\ \int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch}\tau-\cos\tau}{\tau^2}d\tau$
19	$\frac{e^{\alpha t}-1}{t};\ \int\limits_0^t \frac{e^{\alpha\tau}-1}{\tau}d\tau$	20	$\frac{1-e^{-\beta t}}{t};\ \int\limits_0^t \frac{1-e^{-\beta\tau}}{\tau}d\tau$
21	$\frac{\sin\alpha t}{t};\ \int\limits_0^t \frac{\sin\alpha\tau}{\tau}d\tau$	22	$\frac{1-\cos\alpha t}{t};\ \int\limits_0^t \frac{1-\cos\alpha\tau}{\tau}d\tau$
23	$\frac{\operatorname{ch}\alpha t-1}{t};\ \int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch}\alpha\tau-1}{\tau}d\tau$	24	$\frac{\operatorname{sh}\alpha t}{t};\ \int\limits_0^t \frac{\operatorname{sh}\alpha\tau}{\tau}d\tau$
25	$\frac{\operatorname{ch}\alpha t-\cos\beta t}{t};\ \int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch}\alpha\tau-\cos\beta\tau}{\tau}d\tau$	26	$\frac{e^{\alpha t}-\cos\beta t}{t};\ \int\limits_0^t \frac{e^{\alpha t}-\cos\beta\tau}{\tau}d\tau$
27	$\frac{\cos\alpha t-e^{-\beta t}}{t};\ \int\limits_0^t \frac{\cos\alpha\tau-e^{-\beta\tau}}{\tau}d\tau$	28	$\frac{e^{\alpha t}-1-\alpha t}{t^2};\ \int\limits_0^t \frac{e^{\alpha\tau}-1-\alpha\tau}{\tau^2}d\tau$
29	$\frac{1-\beta t-e^{-\beta t}}{t^2};\ \int\limits_0^t \frac{1-\beta\tau-e^{-\beta\tau}}{\tau^2}d\tau$	30	$\frac{1-\cos\alpha t}{t^2};\ \int\limits_0^t \frac{1-\cos\alpha\tau}{\tau^2}d\tau$

Задача 2

Пользуясь теоремой свертывания найти оригинал первой из заданных функций. Для отыскания оригиналов, соответствующих остальным функциям, использовать полученный результат и либо теорему дифференцирования, либо теорему интегрирования оригинала. Ответ к последнему из заданных примеров проверить, либо находя по полученному оригиналу его изображение, либо находя сам оригинал иным способом (например, по второй или по обобщенной (третьей) теоремам разложения, или разложением на простые дроби).

N вар.	
1	$\dfrac{1}{p(p^2+1)}$; $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$; $\dfrac{1}{p^3(p^2+1)}$
2	$\dfrac{1}{p(p^2-1)}$; $\dfrac{1}{p^2(p^2-1)}$; $\dfrac{1}{p^3(p^2-1)}$
3	$\dfrac{1}{p^4-1}$; $\dfrac{p}{p^4-1}$; $\dfrac{p^2}{p^4-1}$; $\dfrac{p^3}{p^4-1}$
4	$\dfrac{p}{p^4-1}$; $\dfrac{1}{p^4-1}$; $\dfrac{1}{p(p^4-1)}$; $\dfrac{1}{p^2(p^4-1)}$
5	$\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$; $\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$; $\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$; $\dfrac{p^3}{(p^2+1)^2}$
6	$\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$; $\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$; $\dfrac{1}{p(p^2+1)^2}$; $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)^2}$
7	$\dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$; $\dfrac{p}{(p-1)(p^2+1)}$; $\dfrac{p^2}{(p-1)(p^2+1)}$
8	$\dfrac{p}{(p-1)(p^2+1)}$; $\dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$; $\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+1)}$
9	$\dfrac{1}{(p+1)(p^2+1)}$; $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+1)}$; $\dfrac{p^2}{(p+1)(p^2+1)}$
10	$\dfrac{p}{(p+1)(p^2+1)}$; $\dfrac{1}{(p+1)(p^2+1)}$; $\dfrac{1}{p(p+1)(p^2+1)}$
11	$\dfrac{1}{p(p-1)}$; $\dfrac{1}{p^2(p-1)}$; $\dfrac{1}{p^3(p-1)}$
12	$\dfrac{1}{p(p+1)}$; $\dfrac{1}{p^2(p+1)}$; $\dfrac{1}{p^3(p+1)}$
13	$\dfrac{1}{(p^2-1)^2}$; $\dfrac{p}{(p^2-1)^2}$; $\dfrac{p^2}{(p^2-1)^2}$
14	$\dfrac{p}{(p^2-1)^2}$; $\dfrac{1}{(p^2-1)^2}$; $\dfrac{1}{p(p^2-1)^2}$; $\dfrac{1}{p^2(p^2-1)^2}$
15	$\dfrac{1}{(p-1)(p^2-2p+2)}$; $\dfrac{p}{(p-1)(p^2-2p+2)}$; $\dfrac{p^2}{(p-1)(p^2-2p+2)}$
16	$\dfrac{1}{(p-1)^2(p^2-2p+2)}$; $\dfrac{p}{(p-1)^2(p^2-2p+2)}$; $\dfrac{p^2}{(p-1)^2(p^2-2p+2)}$
17	$\dfrac{1}{(p-1)^3(p^2-2p+2)}$; $\dfrac{p}{(p-1)^3(p^2-2p+2)}$; $\dfrac{p^2}{(p-1)^3(p^2-2p+2)}$

Задача 3

При помощи обобщенной (третьей) теоремы разложения найти оригиналы заданных функций; ответ проверить, пользуясь либо второй теоремой разложения, либо разложением на простые дроби.

N вар.		N вар.		N вар.	
1	$\frac{p-c}{p(p-a)(p-b)}$	2	$\frac{p^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}$	3	$\frac{p}{(p-a)^2(p-b)}$
4	$\frac{1}{(p-a)^3(p-b)}$	5	$\frac{p^2-1}{p^3+5p^2+6p}$	6	$\frac{p^2+1}{p^3-3p^2+2p}$
7	$\frac{p-1}{p(p^2+1)}$	8	$\frac{p+1}{p(p^2+1)}$	9	$\frac{p^2+p}{(p-1)(p^2+1)}$
10	$\frac{p+1}{(p-1)(p^2+1)}$	11	$\frac{1-p}{(p+1)(p^2+1)}$	12	$\frac{p^3+p^2+p-1}{p^4-1}$
13	$\frac{p^3+3p}{p^4-1}$	14	$\frac{p^2+2}{p^2(p^2+1)}$	15	$\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$
16	$\frac{2p-1}{p^2(p-1)^2}$	17	$\frac{2p+1}{p^2(p+1)^2}$	18	$\frac{p^2+1}{(p^2-1)^2}$
19	$\frac{p^2+p+1}{(p^2-1)^2}$	20	$\frac{p^2+2p-1}{(p^2+1)^2}$	21	$\frac{3p^2-3p+1}{p^3(p-1)^3}$
22	$\frac{3p^2+3p+1}{p^3(p+1)^3}$	23	$\frac{1}{(p^2-1)(p^2-4)}$	24	$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}$
25	$\frac{p}{(p^2-1)(p^2-4)}$	26	$\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$	27	$\frac{p^2}{(p^2+1)(p^2+4)}$
28	$\frac{p^2}{(p^2-1)(p^2-4)}$	29	$\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2+4)}$	30	$\frac{p^3}{(p^2-1)(p^2-4)}$

Задача 4

Найти решение задачи Коши для следующих линейных дифференциальных уравнений:

1. $x'' + 4x = e^t$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
2. $x'' + 9x = \cos 3t$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
3. $x'' - 4x = t$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
4. $x'' - 9x = \operatorname{sh} 3t$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
5. $x'' - 3x' = t$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
6. $x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
7. $x'' - 4x' + 5x = e^t$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
8. $x'' + 2x' + 2x = t^2$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
9. $x'' + 2x' + x = e^{-t}$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
10. $x'' + 4x' + 4x = e^{-2t}$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
11. $x'' + x' = e^{-t}$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
12. $x'' + 3x' + 2x = e^t$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
13. $x'' + x' - 2x = e^t$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
14. $x'' - x' - 2x = t$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
15. $x'' - 2x' = e^{2t}$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
16. $x'' + 2x = t$; при $t = 0$; $x = x_0$; $x' = x'_0$
17. $x'' + 2x' + x = e^{-t}$; при $t = 0$; $x_0 = 1$; $x'_0 = 0$
18. $x'' - 3x' = e^{3t}$; при $t = 0$; $x_0 = 0$; $x'_0 = -1$
19. $x'' - 2x' + 2x = \sin t$; при $t = 0$; $x_0 = 0$; $x'_0 = 1$
20. $x'' + 4x = \sin 2t$; при $t = 0$; $x_0 = 1$; $x'_0 = -2$
21. $x'' - 9x = \operatorname{sh} t$; при $t = 0$; $x_0 = -1$; $x'_0 = 3$
22. $x'' + x' = t^2$; при $t = 0$; $x_0 = 1$; $x'_0 = 0$
23. $x'' + x' - 2x = e^{-t}$; при $t = 0$; $x_0 = 1$; $x'_0 = -2$
24. $x'' - x' - 6x = e^{-t}$; при $t = 0$; $x_0 = 0$; $x'_0 = -1$
25. $x''' - x' = t$; при $t = 0$; $x_0 = 0$; $x'_0 = 1$; $x''_0 = 0$
26. $x''' - x' = e^t$; при $t = 0$; $x_0 = 1$; $x'_0 = 0$; $x''_0 = 0$
27. $x^{IV} - x = 1$; при $t = 0$; $x_0 = 1$; $x'_0 = x''_0 = x'''_0 = 0$
28. $x^{IV} - x'' = \operatorname{sh} t$; при $t = 0$; $x_0 = x'_0 = x''_0 = 0$; $x'''_0 = 1$
29. $x^{IV} - x''' = e^t$; при $t = 0$; $x_0 = x'_0 = x''_0 = 0$; $x'''_0 = 1$
30. $x''' - 2x'' + x' = 1$; при $t = 0$; $x_0 = x'_0 = x''_0 = 0$.

Задача 5

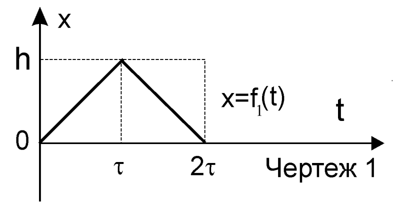
Найти решение следующих систем линейных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

N вар.	Система	Начальные условия
1	$\begin{cases} x'' - y' = t \\ y'' - x' = 0 \end{cases}$	$t = 0;\quad x = -1;\ x' = 0;\ y = 1;\quad y' = 0$
2	$\begin{cases} x'' + y' = t \\ y'' - x' = 1 \end{cases}$	$t = 0;\quad x = 1;\ x' = -1;\quad y = 1;\quad y' = 0$
3	$\begin{cases} x'' - y' = t \\ y'' + x' = 0 \end{cases}$	$t = 0;\quad x = -1;\ x' = 2;\quad y = 1;\quad y' = 0$
4	$\begin{cases} x'' + y'' = 0 \\ x' + y = 1 + e^t \end{cases}$	$t = 0;\quad x = 0;\ x' = 2;\quad y = 0;\quad y' = -1$
5	$\begin{cases} x'' + 2x' + y' = e^{-t} \\ y'' - x' = 0 \end{cases}$	$t = 0;\quad x = 0;\ x' = 1;\quad y = -1;\quad y' = 0$
6	$\begin{cases} x'' - y = te^t \\ x'' - x' + y'' - y = e^t + 2t \end{cases}$	$t = 0;\quad x = 0;\ x' = 1;\quad y = 0;\quad y' = 2$
7	$\begin{cases} x'' + y' = \operatorname{sh} t - \sin t - t \\ y'' + x' = \operatorname{ch} t - \cos t \end{cases}$	$t = 0;\quad x = 0;\ x' = 2;\quad y = 1;\quad y' = 0$
8	$\begin{cases} x'' + x' - y' = 1 \\ x' + x - y'' = 1 + 4e^{-t} \end{cases}$	$t = 0;\quad x = 1;\ x' = 0;\quad y = 0;\quad y' = 1$
9	$\begin{cases} x'' - y' + y = \cos t - t \\ y'' + x' = -2t \end{cases}$	$t = 0;\quad x = 0;\ x' = 1;\quad y = 2;\quad y' = -1$
10	$\begin{cases} x'' - x' + y' = e^{-t} + \cos t \\ x' - y'' - y' = 2e^t + \sin t \end{cases}$	$t = 0;\quad x = 2;\ x' = 1;\quad y = 0;\quad y' = 1$
11	$\begin{cases} x'' + x' + y = t \\ x' + x - y'' = 1 \end{cases}$	$t = 0;\quad x = 1;\ x' = 1;\quad y = 1;\quad y' = 0$
12	$\begin{cases} x'' - x - 2y' = t \\ x'' - x' - y'' = 1 \end{cases}$	$t = 0;\quad x = 0;\ x' = 0;\quad y = 2;\quad y' = 1$
13	$\begin{cases} x'' + x - 2y = 2\cos t \\ x' - y'' = 0 \end{cases}$	$t = 0;\quad x = 1;\ x' = 2;\quad y = 0;\quad y' = 1$
14	$\begin{cases} x'' + x + 2y' = 2 \\ x' + y'' = \cos t \end{cases}$	$t = 0;\quad x = 1;\ x' = 0;\quad y = 1;\quad y' = 0$

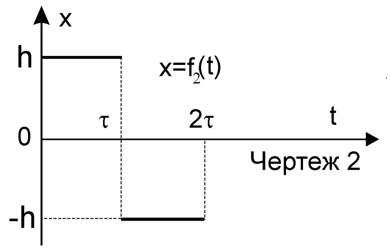
Задача 6

Решить задачу Коши для линейных дифференциальных уравнений, правые части которых заданы графиками, приведенными на чертежах N=1-5 (начальные условия для всех уравнений: при $t = 0$, $x = 0$, $x' = 0$):

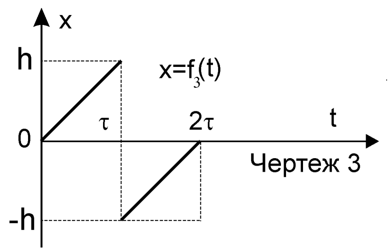
1. $x'' + x = f_1(t)$
2. $x'' - x = f_1(t)$
3. $x'' - x' = f_1(t)$
4. $x'' - 2x' + x = f_1(t)$
5. $x'' - 3x' + 2x = f_1(t)$
6. $x'' - 2x' + 2x = f_1(t)$



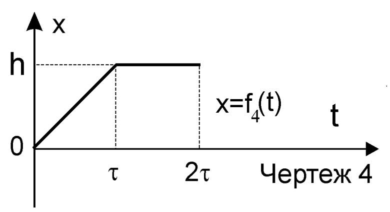
7. $x'' + x = f_2(t)$
8. $x'' - x = f_2(t)$
9. $x'' - x' = f_2(t)$
10. $x'' - 2x' + x = f_2(t)$
11. $x'' - 3x' + 2x = f_2(t)$
12. $x'' - 2x' + 2x = f_2(t)$



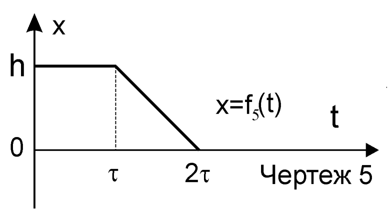
13. $x'' + x = f_3(t)$
14. $x'' - x = f_3(t)$
15. $x'' - x' = f_3(t)$
16. $x'' - 2x' + x = f_3(t)$
17. $x'' - 3x' + 2x = f_3(t)$
18. $x'' - 2x' + 2x = f_3(t)$



19. $x'' + x = f_4(t)$
20. $x'' - x = f_4(t)$
21. $x'' - x' = f_4(t)$
22. $x'' - 2x' + x = f_4(t)$
23. $x'' - 3x' + 2x = f_4(t)$
24. $x'' - 2x' + 2x = f_4(t)$



25. $x'' + x = f_5(t)$
26. $x'' - x = f_5(t)$
27. $x'' - x' = f_5(t)$
28. $x'' - 2x' + x = f_5(t)$
29. $x'' - 3x' + 2x = f_5(t)$
30. $x'' - 2x' + 2x = f_5(t)$



Задача 7

Найти фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения $Lu = f$. С помощью найденного фундаментального решения по формуле Дюамеля решить задачу Коши с нулевыми начальными данными.

1. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$;
2. $x''(t) - x'(t) = \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}$;
3. $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = \frac{1}{2+e^{t}}$;
4. $x''(t) + 6x'(t) + 8x(t) = \frac{1}{e^{2t}+3}$;
5. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = \frac{-1}{4+e^{-t}}$;
6. $x''(t) + 6x'(t) + 8x(t) = \frac{-2}{1+e^{2t}}$;
7. $x''(t) - x'(t) = \frac{e^{2t}}{2+e^{t}}$;
8. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = \frac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}}$;
9. $x''(t) + 6x'(t) + 8x(t) = \frac{-2e^{2t}}{1+e^{2t}}$;
10. $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = \frac{7}{2+e^{t}}$;
11. $x''(t) + 6x'(t) + 8x(t) = \frac{1-e^{2t}}{e^{2t}+3}$;
12. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = \frac{-1+e^{-t}}{4+e^{-t}}$;
13. $x''(t) - x'(t) = \frac{e^{-t}}{3+e^{-t}}$;
14. $x''(t) - x'(t) = \frac{e^{2t}-1}{4+e^{t}}$;
15. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = \frac{2e^{-t}}{1+e^{-t}}$;
16. $x''(t) - x'(t) = \frac{3e^{-t}}{3+e^{-t}}$;
17. $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = \frac{e^{t}-1}{2+e^{t}}$;
18. $x''(t) + 6x'(t) + 8x(t) = \frac{3e^{2t}}{e^{2t}+3}$;
19. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = \frac{3e^{-t}}{4+e^{-t}}$;
20. $x''(t) + 6x'(t) + 8x(t) = \frac{-3e^{2t}}{1+e^{2t}}$;
21. $x''(t) - x'(t) = \frac{e^{2t}-2}{2+e^{t}}$;
22. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = \frac{3e^{-t}}{1+e^{-t}}$;
23. $x''(t) - x'(t) = \frac{3e^{-t}+5}{1+e^{-t}}$;
24. $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = \frac{7e^{t}}{2+e^{t}}$;
25. $x''(t) + 6x'(t) + 8x(t) = \frac{1-e^{2t}}{e^{2t}+1}$.

Задача 8

Найти собственные числа и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля для оператора L на отрезке $[a, b]$ с заданными краевыми условиями и весом ρ. Разложить функцию f в ряд Фурье по собственным функциям данной задачи Штурма–Лиувилля в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2([a, b], \rho)$.

Вариант	Оператор L	Краевые условия	$[a, b]$	Вес $\rho(x)$	$f(x)$
1	$-\frac{d^2}{dx^2} + 1$	$u(a) = u(b) = 0$	$[0, 2]$	4	$x^2 - 1$
2	$-\frac{d^2}{dx^2} + 2$	$u'(a) = u(b) = 0$	$[0, 3]$	2	$1 - x^2$
3	$-\frac{d^2}{dx^2} + 3$	$u(a) = u'(b) = 0$	$[0, 1]$	5	$x^2 + x$
4	$-\frac{d^2}{dx^2} + 4$	$u'(a) = u'(b) = 0$	$[0, 4]$	3	$x^2 - x$
5	$-\frac{d^2}{dx^2} + 1$	$u(a) = u(b) = 0$	$[0, \pi]$	4	$\sin(x/2)$
6	$-\frac{d^2}{dx^2} + 2$	$u'(a) = u(b) = 0$	$[0, \pi]$	2	$\cos(x/2)$
7	$-\frac{d^2}{dx^2} + 3$	$u(a) = u'(b) = 0$	$[0, \pi]$	5	$\sin(x/2)$
8	$-\frac{d^2}{dx^2} + 4$	$u'(a) = u'(b) = 0$	$[0, \pi]$	3	$\cos(x/2)$
9	$-\frac{d^2}{dx^2} + 1$	$u(a) = u(b) = 0$	$[0, 1]$	5	$2x^2 + 1$
10	$-\frac{d^2}{dx^2} + 2$	$u'(a) = u(b) = 0$	$[0, 2]$	4	$1 - 2x^2$
11	$-\frac{d^2}{dx^2} + 3$	$u(a) = u'(b) = 0$	$[0, 3]$	3	$x^2 + 2x$
12	$-\frac{d^2}{dx^2} + 4$	$u'(a) = u'(b) = 0$	$[0, 4]$	2	$x^2 - 2x$
13	$-\frac{d^2}{dx^2} + 1$	$u(a) = u(b) = 0$	$[0, \pi]$	7	$\sin(x/2) - 1$
14	$-\frac{d^2}{dx^2} + 2$	$u'(a) = u(b) = 0$	$[0, \pi]$	8	$\cos(x/2) - 1$
15	$-\frac{d^2}{dx^2} + 3$	$u(a) = u'(b) = 0$	$[0, \pi]$	9	$\sin(x/2) + 1$
16	$-\frac{d^2}{dx^2} + 4$	$u'(a) = u'(b) = 0$	$[0, \pi]$	π	$\cos(x/2) + 1$
17	$-\frac{d^2}{dx^2} + 1$	$u(a) = u(b) = 0$	$[0, 4]$	4	$2x^2 + 3$
18	$-\frac{d^2}{dx^2} + 2$	$u'(a) = u(b) = 0$	$[0, 3]$	2	$2 - 3x^2$
19	$-\frac{d^2}{dx^2} + 3$	$u(a) = u'(b) = 0$	$[0, 2]$	5	$3x^2 + x$
20	$-\frac{d^2}{dx^2} + 4$	$u'(a) = u'(b) = 0$	$[0, 1]$	3	$3x^2 - x$
21	$-\frac{d^2}{dx^2} + 1$	$u(a) = u(b) = 0$	$[0, \pi/2]$	4	$\sin(x/2)$
22	$-\frac{d^2}{dx^2} + 2$	$u'(a) = u(b) = 0$	$[0, \pi/2]$	2	$\cos(x/2)$
23	$-\frac{d^2}{dx^2} + 3$	$u(a) = u'(b) = 0$	$[0, \pi/2]$	5	$\sin(x/2)$
24	$-\frac{d^2}{dx^2} + 4$	$u'(a) = u'(b) = 0$	$[0, \pi/2]$	3	$\cos(x/2)$
25	$-\frac{d^2}{dx^2} + 5$	$u(a) = u(b) = 0$	$[0, 1]$	5	$2x^2 + 1$

Задача 9
Решить задачи методом разделения переменных.

Вариант 1.

1. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге $\Delta u = 0$, $0 \le r < 2, \quad u(2,\phi) = 2\cos^3\phi - \sin^3\phi + \sin\phi$

2. Решить задачу Коши–Дирихле для однородного волнового уравнения на отрезке

   $u''_{tt} = u''_{xx}, \quad x \in (0,2), \quad t \ge 0,$

   $u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = x(2-x)$

   $u(0,t) = u(2,t) = 0$

3. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке

   $u'_t = 4u''_{xx}, \quad x \in (0,2), \quad t \ge 0,$

   $u(x,0) = \sin^3 2\pi x - \sin 4\pi x, \quad u(0,t) = u(2,t) = 0.$

Вариант 2.

1. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге

   $\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 2, \quad u(2,\phi) = 4\cos^3\phi + 4\sin^3\phi + \cos\phi + 2$

2. Решить задачу Коши–Дирихле для однородного волнового уравнения на отрезке

   $u''_{tt} = 2u''_{xx}, \quad x \in (0,1), \quad t \ge 0,$

   $u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = x(1-x)$

   $u(0,t) = u(1,t) = 0$

3. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке

   $u'_t = 9u''_{xx}, \quad x \in (0,3), \quad t \ge 0,$

   $u(x,0) = 4\sin^3 3\pi x + 2\sin 6\pi x, \quad u(0,t) = u(3,t) = 0.$

Вариант 3.

1. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге

   $\Delta u = 0, \;\; 0 \le r < 1, \quad u(1,\phi) = 2\cos^3\phi - 2\sin^3\phi + \sin\phi - \cos\phi$

2. Решить задачу Коши–Дирихле для однородного волнового уравнения на отрезке

   $u''_{tt} = 3u''_{xx}, \;\; x \in (0,3), \quad t \ge 0,$

   $u(x,0) = 0, \;\; u'_t(x,0) = x(3-x)$

   $u(0,t) = u(3,t) = 0$

3. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке

   $u'_t = 4u''_{xx}, \;\; x \in (0,1), \quad t \ge 0,$

   $u(x,0) = 16\sin^3\pi x - 3\sin 2\pi x, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0.$

Вариант 4.

1. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге

   $\Delta u = 0, \;\; 0 \le r < 2, \quad u(2,\phi) = -4\cos^3\phi + \sin\phi + 7$

2. Решить задачу Коши–Дирихле для однородного волнового уравнения на отрезке

   $u''_{tt} = 4u''_{xx}, \;\; x \in (0,2), \quad t \ge 0,$

   $u(x,0) = 0, \;\; u'_t(x,0) = x(2-x)$

   $u(0,t) = u(2,t) = 0$

3. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке

   $u'_t = u''_{xx}, \;\; x \in (0,2), \quad t \ge 0,$

   $u(x,0) = 8\sin^3 4\pi x - 2\sin 6\pi x, \quad u(0,t) = u(2,t) = 0.$

Вариант 5.

1. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге

   $\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 3, \quad u(3, \phi) = 12 \sin^3 \phi + \cos \phi - \sin \phi$

2. Решить задачу Коши–Дирихле для однородного волнового уравнения на отрезке

   $u''_{tt} = u''_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t \ge 0,$

   $u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = x(1 - x)$

   $u(0, t) = u(1, t) = 0$

3. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке

   $u'_t = \frac{1}{4} u''_{xx}, \quad x \in (0, \frac{1}{2}), \quad t \ge 0,$

   $u(x, 0) = \sin^3 \pi x + 4 \sin 2\pi x, \quad u(0, t) = u(\frac{1}{2}, t) = 0.$

Вариант 6.

1. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге

   $\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1, \quad u(1, \phi) = 3 \cos^3 \phi - 2 \sin^3 \phi - 3 \cos \phi + 2 \sin \phi$

2. Решить задачу Коши–Дирихле для однородного волнового уравнения на отрезке

   $u''_{tt} = \frac{1}{4} u''_{xx}, \quad x \in (0, 4), \quad t \ge 0,$

   $u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = x(4 - x)$

   $u(0, t) = u(4, t) = 0$

3. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке

   $u'_t = \frac{1}{9} u''_{xx}, \quad x \in (0, 3), \quad t \ge 0,$

   $u(x, 0) = 8 \sin^3 3\pi x - 4 \sin 12\pi x, \quad u(0, t) = u(3, t) = 0.$

Задача 10

Решить задачи N4 и N5 из второй части типовика по ФА.