

**МГТУ им. Н.Э. Баумана<sup>©</sup>, НУК ФН,  
кафедра ”Математического моделирования”  
текущее домашнее задание по курсу ”ММФ”  
для ВФН, лектор: Киндеркнехт Я.А.**

**Тема №1. Преобразование Фурье.**

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy} dx$$

**№ 1.** Пусть функция  $f \in L_1(\mathbb{R})$ . Доказать, что

- а)  $f$  чётная функция тогда и только тогда, когда  $\widehat{f}$  чётная;
- б)  $f$  нечётная функция тогда и только тогда, когда  $\widehat{f}$  нечётная;
- в) если  $f$  вещественнозначная, то  $\overline{\widehat{f}(y)} = \widehat{f}(-y)$ ;
- г) если  $if$  вещественнозначная, то  $\overline{\widehat{f}(y)} = -\widehat{f}(-y)$ ;
- д) если  $\overline{f(x)} = f(-x)$ , то  $\widehat{f}$  вещественнозначная;
- е) если  $\overline{f(x)} = -f(-x)$ , то  $i\widehat{f}$  вещественнозначная.

**№ 2.** Найти преобразование Фурье следующих функций:

а)  $f(x) = \eta(a - |x|)$ ,  $a > 0$  — фикс. константа,  $\eta$  — функция Хевисайда;

б)  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$

в)  $f(x) = \Lambda(x) \equiv \begin{cases} x - 1, & x \in [-1, 0], \\ 1 - x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$

г)  $f(x) = e^{-x}\eta(x)$

д)  $f(x) = e^{-a|x|}$ ,  $a > 0$  — фикс. константа

**№ 3.** Пользуясь свойствами преобразования Фурье и результатами задачи № 2, найти (без вычисления интегралов) преобразование Фурье следующих функций:

а)  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ,

б)  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ,

- в)  $f(x) = \frac{x-2}{x^2+4}$ ,
- г)  $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}$ ,
- д)  $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(x+1)$ ,
- е)  $f(x) = \sin x (\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(x+1))$
- ж)  $f(x) = \frac{\sin x}{x^2+1}$ ,
- з)  $f(x) = \frac{\cos x}{x^2+4}$ ,
- и)  $f(x) = xe^{-x}\eta(x)$ ,
- к)  $f(x) = x \sin xe^{-x}\eta(x)$ ,
- л)  $f(x) = xe^{-|x|}$ ,
- м)  $f(x) = (1 + a|x|)e^{-a|x|}$ ,  $a > 0$  — фикс. константа,
- н)  $f(x) = e^{ax}\eta(-x)$ ,  $a > 0$  — фикс. константа,
- о)  $f(x) = \frac{1}{x+\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,
- п)  $f(x) = \frac{1}{x-\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,
- р)  $f(x) = \frac{\sin ax}{x}$ ,
- с)  $f(x) = (x+7)e^{-|x+7|}$ .

Каким пространствам принадлежат вышперечисленные функции?  
(  $L_1(\mathbb{R})$  или  $L_2(\mathbb{R})$  )

## Тема №2. Свертка.

**№ 1.** Пусть функции  $f, g, h \in L_1(\mathbb{R})$ . Доказать следующие свойства свертки:

- 1) линейность:  $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha f * h + \beta g * h$ ,
- 2) ассоциативность:  $(f * g) * h = f * (g * h)$ ,
- 3) симметричность:  $f * g = g * f$ ,
- 4) инвариантность относительно сдвига:  $f(x - x_0) * g = (f * g)(x - x_0)$ ,
- 5) правило дифференцирования: если существуют  $f' * g, f * g', (f * g)'$ , то они равны между собой,
- 6) свёртка двух чётных функций чётна, свёртка двух нечётных функций чётна, свёртка чётной и нечётной функций нечётна,
- 7) свёртка двух финитных функций финитна.

**№ 2.** Вычислить свёртку функций

а)  $\eta * \eta$ ,  $\eta$  — функция Хевисайда,

б)  $\eta(x) * (x^2 \eta(x))$ ,

в)  $\eta * \chi_{[a,b]}$ , где  $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$  — индикатор отрезка  $[a, b]$ ,

г)  $\chi_{[a,b]} * \chi_{[c,d]}$ ,

д)  $e^{-|x|} * e^{-|x|}$ ,

е)  $(x^2 \eta(x)) * (\sin x \eta(x))$ ,

ж)  $(\sin x \eta(x)) * (\operatorname{sh} x \eta(x))$ ,

з)  $e^{-ax^2} * e^{-ax^2}$ ,  $a > 0$ ,

и)  $\eta(a - |x|) * \eta(a - |x|)$ ,

к)  $\chi_{[a,b]} * \Lambda$ , где  $\Lambda(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in [-1, 0], \\ 1 - x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$  — треугольный импульс.

**№ 3.** С помощью результатов заданий N1 и N2 найти свёртку без вычисления интегралов

а)  $e^{-|x-2|} * e^{-|x|}$ ,

$$\text{б) } e^{-ax^2} * (-2axe^{-ax^2}), a > 0,$$

$$\text{в) } (xe^{-ax^2}) * (xe^{-ax^2}), a > 0,$$

$$\text{г) } ((x^2 + 4x + 4)\eta(x)) * (\sin x\eta(x)),$$

$$\text{д) } ((x^2 - 2x + 1)\eta(x)) * (\cos x\eta(x)),$$

**№ 4.** Вычислить преобразование Фурье от функции

$$\text{а) } f(x) = e^{-x^2} * \frac{1}{x^2+1},$$

$$\text{б) } f(x) = e^{-|x|} * \frac{\cos x}{x^2+1},$$

$$\text{в) } f(x) = e^{-|x-2|} * \frac{\sin x}{x^2+4}$$

$$\text{г) } f(x) = e^{-ax^2} * (-2axe^{-ax^2}) * \frac{1}{x^2+1}, a > 0,$$