

ВОПРОСЫ К ЗАЧЁТУ ПО КУРСУ «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»  
ВФН, лектор Киндеркнехт Я.А., 2012 г.

1. Мощность множеств. Конечные, счётные множества и множества мощности континуум. Их свойства. Примеры. Другие мощности.
2. Метрические пространства. Примеры. Основные типы метрик. Всюду плотные и нигде не плотные множества. Сепарабельные метрические пространства. Примеры.
3. Открытые и замкнутые подмножества метрического пространства, их свойства. Замыкание множества. Предельные точки, сходящиеся последовательности, непрерывность функции в метрическом пространстве. Эквивалентность пределов по Коши и по Гейне.
4. Фундаментальные последовательности. Полнота метрического пространства. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Пополнение метрического пространства.
5. Сжимающие отображения; неподвижные точки. Принцип сжимающих отображений, его применения.
6. Топологические пространства. Хаусдорфовы топологии. Различные определения непрерывности отображения, их эквивалентность.
7. Понятия линейного пространства, отношения эквивалентности, факторпространства по линейному подпространству. Свойства факторпространства.
8. Понятия линейного функционала, ядра и коядра. Связь линейных функционалов с гиперплоскостями. Непрерывные линейные функционалы. Теорема Хана--Банаха в нормированном пространстве.
9. Понятие сопряжённого пространства, примеры. Норма линейного функционала, сильная топология в сопряжённом пространстве. Полнота сопряжённого к нормированному пространству. Понятие рефлексивности пространства.
10. Понятия скалярного произведения, гильбертова пространства, примеры. Неравенство Коши--Буняковского--Шварца. Пространство  $L_2[a,b]$ . Теорема о виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве.
11. Сепарабельность. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств. Ортогональные системы векторов, полнота системы векторов, ортогональные базисы. Мощность ортогональных систем и существование ортогонального базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве.
12. Коэффициенты и ряд Фурье по ортонормированной системе векторов. Минимальное свойство частных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля, замкнутость ортонормированной системы векторов. Теорема Рисса--Фишера, критерий полноты ортонормированной системы. Эквивалентность полноты и замкнутости в сепарабельном гильбертовом пространстве. Примеры ортогональных базисов.
13. Понятия линейного оператора, непрерывного линейного оператора, ограниченного линейного оператора, примеры. Связь непрерывности и ограниченности оператора в банаховом пространстве. Норма оператора.