Типовое домашнее задание по курсу "Функциональный анализ "

(ВО: прикладная математика)

Часть I: Метрические пространства.

Вариант 1.

Задача №1:

a) Найти расстояние между точками $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^n}, ...)$ и $y = (1, 0, 0, ..., 0, ...)$ в пространствах l_1, l_2, l_3, l_∞, $\mathbb{R}^\infty$.

b) Найти расстояние между точками $x(t) = t^2$ и $y(t) = 1 - t$ в пространствах $\mathbf{C}[0, 1]$, $L_1[0, 1]$, $L_2[0, 1]$, $L_3[0, 1]$.

Задача №2:

a) В каких из пространств l_p, $p \geq 1$, l_∞, $\mathbb{R}^\infty$ сходится последовательность $x_k = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, ..., \frac{1}{k^2}, 0, ..., 0, ...)$?

b) В каких из пространств $\mathbf{C}[0, 2\pi]$, $L_p[0, 2\pi]$, $p \geq 1$, сходится последовательность $x_k(t) = \frac{1}{k}\sin kt$?

Задача №3: Являются ли следующие отображения линейными? Непрерывными?

a) $F : \mathbf{C}[0, 1] \to \mathbf{C}[0, 1]$, $F(x)(t) = \int\limits_0^t (x(s) + 1)ds$;

b) $F : L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $F(x)(t) = x^2(t)$.

Задача №4: Методом последовательных приближений решить уравнение $3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$ с точностью до $0,01$.

Типовое домашнее задание
по курсу "Функциональный анализ "

(ВО: прикладная математика)

Часть I: Метрические пространства.

Вариант 2.

Задача №1:

a) Найти расстояние между точками $x = (1, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n^2}, ...)$ и $y = (1, 0, 0, ..., 0, ...)$ в пространствах l_1, l_2, l_3, l_∞, $\mathbb{R}^\infty$.

b) Найти расстояние между точками $x(t) = 2t + 2$ и $y(t) = 1 - t^3$ в пространствах $\mathbf{C}[0, 1]$, $L_1[0, 1]$, $L_2[0, 1]$, $L_3[0, 1]$.

Задача №2:

a) В каких из пространств l_p, $p \geq 1$, l_∞, $\mathbb{R}^\infty$ сходится последовательность $x_k = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^k}, 0, ..., 0, ...)$?

b) В каких из пространств $\mathbf{C}[0, 1]$, $L_p[0, 1]$, $p \geq 1$, сходится последовательность $x_k(t) = t^k$?

Задача №3: Являются ли следующие отображения линейными? Непрерывными?

a) $F : \mathbf{C}[0, 1] \to \mathbf{C}[0, 1]$, $F(x)(t) = \int\limits_0^t x^2(s)ds$;

b) $F : L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $F(x)(t) = t^2 x(t)$.

Задача №4: Методом последовательных приближений решить уравнение $2x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$ с точностью до $0,01$.

Типовое домашнее задание по курсу "Функциональный анализ "

(ВО: прикладная математика)

Часть I: Метрические пространства.

Вариант 3.

Задача №1:

a) Найти расстояние между точками $x = (1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}, \ldots)$ и $y = (1, 0, 0, ..., 0, ...)$ в пространствах l_1, l_2, l_3, l_∞, $\mathbb{R}^\infty$.

b) Найти расстояние между точками $x(t) = e^t$ и $y(t) = e^{-t}$ в пространствах $\mathbf{C}[0,1]$, $L_1[0,1]$, $L_2[0,1]$, $L_3[0,1]$.

Задача №2:

a) В каких из пространств l_p, $p \geq 1$, l_∞, $\mathbb{R}^\infty$ сходится последовательность $x_k = (1, \frac{2}{9}, ..., \frac{2}{(k+1)^2}, 0, ..., 0, ...)$?

b) В каких из пространств $\mathbf{C}[1,2]$, $L_p[1,2]$, $p \geq 1$, сходится последовательность $x_k(t) = \frac{1}{t^k}$?

Задача №3: Являются ли следующие отображения линейными? Непрерывными?

a) $F : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{C}[0,1]$, $F(x)(t) = \int\limits_0^t x(s)(s+1)ds$;

b) $F : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $F(x)(t) = e^{x(t)}$.

Задача №4: Методом последовательных приближений решить уравнение $3x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$ с точностью до $0,01$.

Типовое домашнее задание по курсу "Функциональный анализ "

(ВО: прикладная математика)

Часть I: Метрические пространства.

Вариант 4.

Задача №1:

a) Найти расстояние между точками $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^n}, ...)$ и $y = (1, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}, 0, ...)$ в пространствах l_1, l_2, l_3, l_∞, $\mathbb{R}^\infty$.

b) Найти расстояние между точками $x(t) = (t+1)^3$ и $y(t) = 1 - t$ в пространствах $\mathbf{C}[0,1]$, $L_1[0,1]$, $L_2[0,1]$, $L_3[0,1]$.

Задача №2:

a) В каких из пространств l_p, $p \geq 1$, l_∞, $\mathbb{R}^\infty$ сходится последовательность $x_k = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, 0, ..., 0, ...)$?

b) В каких из пространств $\mathbf{C}[0,1]$, $L_p[0,1]$, $p \geq 1$, сходится последовательность $x_k(t) = \frac{1}{kt^2+1}$?

Задача №3: Являются ли следующие отображения линейными? Непрерывными?

a) $F : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{C}[0,1]$, $F(x)(t) = \sin(x(s) + 1)$;

b) $F : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $F(x)(t) = 2x(t) + 1$.

Задача №4: Методом последовательных приближений решить уравнение $4x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$ с точностью до $0,01$.

Типовое домашнее задание по курсу "Функциональный анализ "

(ВО: прикладная математика)

Часть I: Метрические пространства.

Вариант 5.

Задача №1:

a) Найти расстояние между точками $x = (1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^n}, 0, ...)$ и $y = (1, 0, 0, ..., 0, ...)$ в пространствах l_1, l_2, l_3, l_∞, $\mathbb{R}^\infty$.

b) Найти расстояние между точками $x(t) = t^2 + 2$ и $y(t) = 1 - 2t$ в пространствах $\mathbf{C}[0,1]$, $L_1[0,1]$, $L_2[0,1]$, $L_3[0,1]$.

Задача №2:

a) В каких из пространств l_p, $p \geq 1$, l_∞, $\mathbb{R}^\infty$ сходится последовательность $x_k = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, ..., \frac{1}{k^2}, 0, ..., 0, ...)$?

b) В каких из пространств $\mathbf{C}[0, 2\pi]$, $L_p[0, 2\pi]$, $p \geq 1$, сходится последовательность $x_k(t) = \frac{1}{k}\cos kt$?

Задача №3: Являются ли следующие отображения линейными? Непрерывными?

a) $F : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{C}[0,1]$, $F(x)(t) = \int\limits_0^t (2x(s) - 1)ds$;

b) $F : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $F(x)(t) = x^5(t)$.

Задача №4: Методом последовательных приближений решить уравнение $5x^3 + 19x^2 + 21x - 5 = 0$ с точностью до $0,01$.

Типовое домашнее задание по курсу "Функциональный анализ "

(ВО: прикладная математика)

Часть I: Метрические пространства.

Вариант 6.

Задача №1:

a) Найти расстояние между точками $x = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ..., \frac{1}{3^n}, ...)$ и $y = (1, 0, 0, ..., 0, ...)$ в пространствах l_1, l_2, l_3, l_∞, $\mathbb{R}^\infty$.

b) Найти расстояние между точками $x(t) = e^t$ и $y(t) = e^{-t}$ в пространствах $\mathbf{C}[0,1]$, $L_1[0,1]$, $L_2[0,1]$, $L_3[0,1]$.

Задача №2:

a) В каких из пространств l_p, $p \geq 1$, l_∞, $\mathbb{R}^\infty$ сходится последовательность $x_k = (1, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, ..., \frac{1}{k^2+1}, 0, ..., 0, ...)$?

b) В каких из пространств $\mathbf{C}[0, 2\pi]$, $L_p[0, 2\pi]$, $p \geq 1$, сходится последовательность $x_k(t) = \frac{1}{k} \cos kt$?

Задача №3: Являются ли следующие отображения линейными? Непрерывными?

a) $F : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{C}[0,1]$, $F(x)(t) = \int\limits_0^t (3x(s) + 1) ds$;

b) $F : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $F(x)(t) = \cos(x(t))$.

Задача №4: Методом последовательных приближений решить уравнение $5x^3 + 17x^2 + 13x - 15 = 0$ с точностью до $0,01$.

Типовое домашнее задание по курсу "Функциональный анализ "

(ВО: прикладная математика)

Часть II: Линейные операторы.

Вариант 1.

Задача №1: Найти норму линейного функционала f:
$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$, $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...)$, где
a) $f : l_\infty \to \mathbb{R}$,
b) $f : l_2 \to \mathbb{R}$,
c) $f : l_1 \to \mathbb{R}$.

Задача №2: Найти норму линейного функционала f:
a) $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)(t) = x(0) + \int\limits_0^1 \tau x(\tau) d\tau$;
b) $f : L_2[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)(t) = \int\limits_0^1 (\tau^2 + 1) x(\tau) d\tau$.

Задача №3: Найти норму линейного оператора A:
a) $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int\limits_0^1 e^{t-\tau} x(\tau) d\tau$;
b) $A : l_2 \to l_2$, $A(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$.

Задача №4: Найти сопряжённый к оператору $A : l_2 \to l_2$,
$A(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (0, x_2, ..., x_k, ...)$.

Задача № 5: Найти левый обратный к оператору $A : l_2 \to l_2$,
$A(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0.., x_k, 0, ...)$.

Типовое домашнее задание
по курсу "Функциональный анализ "

(ВО: прикладная математика)

Часть II: Линейные операторы.

Вариант 2.

Задача №1: Найти норму линейного функционала f:
$f(x) = x_{10} - 2x_1$, $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...)$, где
a) $f : l_\infty \to \mathbb{R}$,
b) $f : l_2 \to \mathbb{R}$,
c) $f : l_1 \to \mathbb{R}$.

Задача № 2: Найти норму линейного функционала f:
a) $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)(t) = x(1) + \int\limits_0^1 \tau^2 x(\tau) d\tau$;
b) $f : L_2[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)(t) = \int\limits_0^{1/2} \tau^2 x(\tau) d\tau$.

Задача №3: Найти норму линейного оператора A:
a) $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = t^2 x(t)$;
b) $A : l_\infty \to l_\infty$, $A(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1 + x_2, x_2, ..., x_n, ...)$.

Задача №4: Найти сопряжённый к оператору $A : l_2 \to l_2$,
$A(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (0, x_1, x_2, ..., x_k, ...)$.

Задача № 5: Найти обратный к оператору $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$,
$Ax(t) = e^t x(t)$.

Типовое домашнее задание
по курсу "Функциональный анализ "

(ВО: прикладная математика)

Часть II: Линейные операторы.

Вариант 3.

Задача №1: Найти норму линейного функционала f:
$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^2}$, $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...)$, где
a) $f : l_\infty \to \mathbb{R}$,
b) $f : l_2 \to \mathbb{R}$,
c) $f : l_1 \to \mathbb{R}$.

Задача № 2: Найти норму линейного функционала f:
a) $f : L_2[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)(t) = \int\limits_0^1 x(\tau) \sin \tau d\tau$.
b) $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)(t) = x(0) + \int\limits_0^1 x(\tau) d\tau - x(1)$.

Задача №3: Найти норму линейного оператора A:
a) $A : L_2[0,\pi] \to L_2[0,\pi]$, $Ax(t) = \int\limits_0^\pi \sin(t-\tau) x(\tau) d\tau$;
b) $A : l_2 \to l_2$, $A(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, ..., \frac{x_k}{2^k}..)$.

Задача №4: Найти сопряжённый к оператору $A : l_2 \to l_2$,
$A(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (x_2, ..., x_k, ...)$.

Задача № 5: Найти обратный к оператору $A : C_0^1[0,1] \to C_0^1[0,1]$,
$Ax(t) = 2 \int\limits_0^t x(\tau) d\tau$,
$C_0^1[0,1] = \{x \in C^1[0,1];\ x(0) = 0\}$.

Типовое домашнее задание
по курсу "Функциональный анализ "

(ВО: прикладная математика)

Часть II: Линейные операторы.

Вариант 4.

Задача №1: Найти норму линейного функционала f:
$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_{2k}}{2^k}$, $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...)$, где
a) $f : l_\infty \to \mathbb{R}$,
b) $f : l_2 \to \mathbb{R}$,
c) $f : l_1 \to \mathbb{R}$.

Задача № 2: Найти норму линейного функционала f:
a) $f : L_2[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)(t) = \int\limits_0^{1/2} \tau x(\tau) d\tau - \int\limits_{1/2}^{1} \tau x(\tau) d\tau$.
b) $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)(t) = x(0) + \int\limits_0^1 x(\tau) d\tau - x(1)$.

Задача №3: Найти норму линейного оператора A:
a) $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int\limits_0^1 (1 + t + \tau) x(\tau) d\tau$;
b) $A : l_2 \to l_2$, $A(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) = (0, 2x_2, x_3, ..., x_n, ...)$.

Задача №4: Найти сопряжённый к оператору $A : l_2 \to l_2$,
$A(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, ..., \frac{x_k}{2^k}, ...)$.

Задача № 5: Найти левый обратный к оператору $A : l_2 \to l_2$,
$A(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (0, 0, 0, x_1, x_2, x_3, .., x_k, ...)$.

Типовое домашнее задание
по курсу "Функциональный анализ "

(ВО: прикладная математика)

Часть II: Линейные операторы.

Вариант 5.

Задача №1: Найти норму линейного функционала f:
$f(x) = \sum\limits_{k=10}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$, $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...)$, где
a) $f : l_\infty \to \mathbb{R}$,
b) $f : l_2 \to \mathbb{R}$,
c) $f : l_1 \to \mathbb{R}$.

Задача № 2: Найти норму линейного функционала f:
a) $f : L_2[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)(t) = 2\int\limits_0^1 x(\tau^2)d\tau$,
b) $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)(t) = 2x(1/2) + \int\limits_0^1 (1 + \sin\tau)x(\tau)d\tau$.

Задача №3: Найти норму линейного оператора A:
a) $A : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$, $Ax(t) = \int\limits_0^1 e^{t-\tau}x(\tau)d\tau$;
b) $A : l_\infty \to l_\infty$, $A(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (10x_1, x_2, ..., x_n, ...)$.

Задача №4: Найти сопряжённый к оператору $A : l_2 \to l_2$,
$A(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (0, 2x_1, 0, ..., 0, ...)$.

Задача № 5: Найти обратный к оператору $A : l_2 \to l_2$,
$A(x_1, x_2, x_3, ..., x_k, ...) = (x_2, x_1, x_3, ..., x_k, ...)$.

Типовое домашнее задание по курсу "Функциональный анализ "

(ВО: прикладная математика)

Часть II: Линейные операторы.

Вариант 6.

Задача №1: Найти норму линейного функционала f:
$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{10} \frac{x_k}{2^k}$, $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...)$, где
a) $f : l_\infty \to \mathbb{R}$,
b) $f : l_2 \to \mathbb{R}$,
c) $f : l_1 \to \mathbb{R}$.

Задача № 2: Найти норму линейного функционала f:
a) $f : L_1[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)(t) = \int\limits_0^1 x(\tau)d\tau$.
b) $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)(t) = x(0) + \int\limits_0^1 \sin\tau x(\tau)d\tau - x(1)$.

Задача №3: Найти норму линейного оператора A:
a) $A : C[0,1] \to L_1[0,1]$, $Ax(t) = \int\limits_0^1 \cos(t-\tau)x(\tau)d\tau$;
b) $A : l_2 \to l_2$, $A(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1, 0, x_2, 0, ..., x_n, 0, ...)$.

Задача №4: Найти сопряжённый к оператору $A : l_2 \to l_2$,
$A(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (2x_2, 3x_3..., kx_k, 0, ..., 0, ...)$.

Задача № 5: Найти обратный к оператору $A : l_2 \to l_2$,
$A(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (x_1, 2x_2, 3x_3..., kx_k, x_{k+1}, ..., x_n, ...)$.