ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4 семестр, спец. ИУ9

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература (ОЛ)

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, 1972. – 496 с.
2. Богачев В.И., Смолянов О.Г., Действительный и функциональный анализ: университетский курс. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 724 с.
3. Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П., Методы решения задач по функциональному анализу: Учебное пособие. – Киев: Высшая школа, 1990. – 479 с.

Дополнительная литература (ДЛ)

1. Богачев В.И., Основы теории меры. Том 1,2. – Москва-Ижевск: РХД, 2003.
2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной – М.: Наука, 1974. – 480 с.
3. Халмош П. Теория меры. – М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2003. – 256 с.
4. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная. – М.: Наука, 1967. – 220 с.
5. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л., Мера и интеграл. – М.: Факториал, 1998. – 160 с.
6. Босс В. Лекции по математике. Функциональный анализ. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 216 с.
7. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 252с.
8. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. III – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 728 с.
9. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В., Задачи и упражнения по функциональному анализу. – Минск: Высшая школа, 1978. – 205 с.

ЛЕКЦИИ

Модуль 1. Теория меры, конструкция интеграла Лебега

Лекции 1–2. Кольцо множеств, различные определения, их эквивалентность. Теорема о пересечении колец. Теорема о существовании и единственности минимального кольца, содержащего данную систему множеств. Полукольцо множеств. Сигма-алгебра множеств, ее свойства. Борелевская сигма-алгебра. Мера на полукольце множеств. Продолжение меры с полукольца, на наименьшее содержащее его кольцо. Счетная аддитивность меры. Непрерывность меры. Связь непрерывности и счетной аддитивности.. Пример меры, не являющейся счетно-аддитивной. Теорема Каратеодори.

Лекции 3–4. Схема построения лебегова продолжения меры (без док-ва), случай полукольца с единицей и без нее. Свойства меры Лебега. Теорема о существовании неизмеримых по Лебегу множеств на $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$.

Лекция 5. Измеримые функции, измеримость по Лебегу, борелевость. Операции над измеримыми функциями. Измеримость предела поточечно и почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций.

Лекциии 6–7. Теорема Егорова. Теорема Лузина. Фундаментальность и сходимость по мере. Связь сходимости по мере и почти всюду в случае конечной и сигма-конечной меры. Пример последовательности, сходящейся по мере и не сходящейся почти всюду. Интеграл Лебега, его построение. Простые функции, интеграл Лебега для простых функций, его свойства.

Лекции 8–9. Распространение определения интеграла Лебега с помощью предельного перехода. Свойства интеграла Лебега. Неравенство Чебышева. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Критерий интегрируемости функции.

Модуль 2. Теория интеграла Лебега, действительный анализ

Лекции 10–12. Предельный переход под знаком интеграла Лебега: теоремы Лебега, Б. Леви, Фату. Взаимосвязь интегралов Римана и Лебега. Полнота пространства $L_1(D)$. Сходимость в среднем, ее связь со сходимостью почти всюду и сходимостью по мере. Произведение мер.

Лекции 13–14. Теорема Фубини. Теорема Тонелли. Теорема Радона — Никодима. Теорема Хана — Жордана.

Лекция 15. Связь интеграла с производной. Теорема Лебега о первообразной.

Лекции 16–17. Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции. Их свойства. Формула Ньютона — Лейбница. Формула интегрирования по частям. Меры Лебега — Стилтьеса. Интеграл Лебега — Стилтьеса. Интеграл Римана — Стилтьеса, его свойства, его связь с интегралом Лебега — Стилтьеса. Формула замены переменных в интеграле Лебега. Приложения меры и интеграла Лебега в теории вероятности.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Модуль 1. Теория меры, конструкция интеграла Лебега

Занятие 1. Канторово множество, его мощность. Системы множеств: кольцо, полукольцо, сигма-алгебра; их свойства. Структура открытых множеств в $\mathbf{R}^n$. Классы множеств, порождающие борелевскую сигма-алгебру на прямой. Мощность борелевской сигма-алгебры. Мера на кольце множеств, ее свойства. Счетная аддитивность меры.
Методическая разработка кафедры.

Занятие 2. Вычисление меры Лебега различных множеств. Меры Лебега — Стилтьеса на прямой, примеры. Абсолютная непрерывность и сингулярность мер. Дискретные меры. Канторова лестница, ее длина.
Методическая разработка кафедры.

Занятие 3. Измеримые и неизмеримые по Лебегу множества. Мощность сигма-алгебры всех измеримых по Лебегу множеств. Структура измеримых по Лебегу множеств. Измеримые функции и их свойства.
Методическая разработка кафедры.

Занятия 4-5. Измеримые функции и их свойства. Сходимость по мере. Связь сходимости по мере и почти всюду в случае конечной и сигма-конечной меры. Пример последовательности, сходящейся по мере и не сходящейся почти всюду.
Методическая разработка кафедры.

Занятие 6. Вычисление интегралов Лебега. Связь интегралов Лебега и Римана. Применение теорем о предельном переходе для вычисления интегралов Лебега.
Методическая разработка кафедры/

Занятие 7. Пространство $L_1(D)$, его свойства. Сходимость в среднем. Пространства $L_p(D)$. Неравенство Чебышева. Сходимости: равномерная, поточечная, почти всюду, по мере, в среднем, в среднем квадратичном; их взаимосвязь.
Методическая разработка кафедры.

Занятия 8-9. Рубежный контроль.

Модуль 2. Теория интеграла Лебега, действительный анализ

Занятия 10-12. Абсолютно непрерывные функции. Функции ограниченной вариации. Интеграл Лебега с переменным верхним пределом. Разложение функции ограниченной вариации на сумму абсолютно непрерывной, сингулярной и функции скачков. Связь с разложением мер. Абсолютная непрерывность заряда.
Методическая разработка кафедры

Занятия 13-14. Теорема Радона — Никодима. Случай заряда, построенного по абсолютно непрерывной функции (сведение интеграла Лебега — Стилтьеса к интегралу Лебега). Интеграл Римана — Стилтьеса, его свойства. Интегрирование по частям. Вычисление интегралов Стилтьеса.

Методическая разработка кафедры

Занятие 15. Подготовка к рубежному контролю.

Занятия 16-17. Рубежный контроль по модулю 2.

КОНТРОЛЬНЫЕ МЕРОПРИЯТИЯ

Модуль 1. Теория меры, конструкция интеграла Лебега (1–10 неделя).
Рубежный контроль по модулю 1 (10 неделя).

Модуль 2. Теория интеграла Лебега, действительный анализ (11–17 неделя).
Рубежный контроль по модулю 2 (17 неделя).