ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ ПО КУРСУ “ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА” ПО МОДУЛЮ 1 “ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА: ВВЕДЕНИЕ” для ИУ-9, 4 семестр, 2013

1. Задачи по теме: системы множеств, меры.

2. Задачи по теме: измеримые функции, сходимость, интеграл Лебега.

3. Задачи теоретического характера.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ПО ТЕМАМ "СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВ, МЕРЫ"

1. Является ли система множеств $\{[0,2],[0,1],(1,2],\emptyset\}$ полукольцом, кольцом, алгеброй?

2. Принадлежит ли канторово множество сигма-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$?

3. Вычислить меру Лебега множества $A=\cup_{n=1}^{\infty}(n-3^{-n};n+2^{-n}]\setminus\mathbb{Q}$.

4. Найти меру Лебега множества тех точек отрезка $[0,1]$, в десятичном разложении которых обязательно встечается либо цифра 2, либо цифра 7.

5. Построить последовательность $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ борелевых множеств, такую, что:

   (a) $\mu_1(A_n)=1$, $n\geq 1$, $\cup_{n=1}^{\infty}A_n=\mathbb{R}$;

   (b) $\mu_1(A_n)=+\infty$, $A_n\supset A_{n+1}$, $n\geq 1$, $\mu_1(\cap_{n=1}^{\infty}A_n)=0$;

   (c) $\mu_1(A_n)=+\infty$, $A_n\supset A_{n+1}$, $n\geq 1$, $\mu_1(\cap_{n=1}^{\infty}A_n)=1$;

   (d) $\mu_1(A_n)=+\infty$, $n\geq 1$, $\cap_{n=1}^{\infty}A_n=\mathbb{N}$.

6. Показать, что если A — произвольное подмножество $\mathbb{R}^{n-1}$, то множество $B=\{(x_1,...,x_{n-1},c)\}\subset\mathbb{R}^n$, где c — фиксированная константа измеримо по Лебегу и мера Лебега $\mu_n(B)=0$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ПО ТЕМАМ "ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ, СХОДИМОСТЬ, ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА"

1. Является ли функция $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n[x]}{1+n^5[x]^2}$ измеримой? Здесь $[x]$ — целая часть числа x.

2. Показать, что $f_n(x,y)=\sin^n x+\cos^n x\to f(x,y)\equiv 0$ при $n\to\infty$ почти всюду на $A=[0,\pi]\times[0,\pi]$ относительно меры Лебега на плоскости.

3. Вычислить интеграл
$$\int\limits_{(0,1]} \operatorname{sign} \sin \frac{\pi}{x} \, \mu_{\mathrm{Leb}}(dx).$$

4. Вычислить интеграл
$$\int\limits_{[0,2]\times[0,2]} [x+y] \, \mu_{\mathrm{Leb}}(dxdy).$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

1. Показать, что система множеств, замкнутая относительно операций $\cup$ и $\cap$ необязательно является кольцом.

2. Пусть μ — мера на кольце $\mathcal{R}$, $A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$. Доказать, что если $A \subset \cup_{k=1}^{n} A_k$, то $\mu(A) \le \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.

3. Пусть μ — мера на кольце $\mathcal{R}$. Доказать: мера μ счетно-аддитивна $\Leftrightarrow$ мера μ счетно-полуаддитивна, т.е. для любых множеств $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{R}$ с $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \mathcal{R}$ выполняется $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

4. Пусть μ — мера на кольце $\mathcal{R}$. Доказать: мера μ непрерывна $\Leftrightarrow$ мера μ непрерывна снизу, т.е. если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{R}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \mathcal{R}$, то $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

5. Показать, что точка $\frac{1}{4}$ принадлежит канторову множеству K, не являясь концом ни одного из выбрасываемых отрезков.

6. Показать, что $K + K = [0, 2]$.

7. Показать, что система всех измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}$ имеет мощность гиперконтинуум.

8. Построить на плоскости $\mathbb{R}^2$ такое μ_2-измеримое множество, проекции которого на обе координатные оси неизмеримы по Лебегу в $\mathbb{R}^1$.

9. Показать, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, то f — борелевская функция.

10. Показать, что если для каждого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) = c\}$ измеримо, то f не обязательно является измеримой.

11. Привести пример измеримой функции f и непрерывной функции g таких, что $f \circ g$ является неизмеримой.