

ВОПРОСЫ К РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ N 2 по теме “ТЕОРИЯ МЕРЫ И
ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА: ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ” курса “ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ
ГЛАВЫ МАТ. АНАЛИЗА”

для ИУ-9, 4 семестр, 2013 г., лектор: Киндеркнехт Я.А.

1. Сформулировать и доказать теорему Лебега о мажорированной сходимости.
2. Сформулировать и доказать теорему Беппо Леви о монотонной сходимости.
3. Сформулировать и доказать теорему Фату.
4. Определить пространство $L_1(\Omega, \mu)$, доказать его полноту.
5. Определить сходимость в среднем. Описать связь сходимости в среднем со сходимостью почти всюду и сходимостью по мере.
6. Определить операцию произведения мер, доказать счётную аддитивность произведения счётно-аддитивных мер.
7. Сформулировать и доказать теорему о связи меры множества с интегралом по мерам сечений этого множества.
8. Сформулировать и доказать теорему Фубини.
9. Сформулировать и доказать теорему Тонелли.
10. Сформулировать и доказать теорему Хана–Жордана. Сформулировать теорему Радона–Никодима для зарядов.
11. Сформулировать и доказать теорему Лебега о связи интеграла с производной.
12. Определить функции ограниченной вариации, абсолютно непрерывные функции, перечислить их свойства.
13. Сформулировать и доказать формулу Ньютона–Лейбница и формулу интегрирования по частям для интеграла Лебега.

ЗАДАЧИ:

1. Вычислить, обосновав все переходы в выкладках:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \sin^n x \cdot \frac{1}{1+x^2} \mu_L(dx)$$

2. Вычислить, обосновав все переходы в выкладках:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^{+\infty} x \exp\{-(x^4 + 1)^2 y^2\} dx \right] dy.$$

3. Пусть мера Стильеса μ_F на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ задана функцией распределения F , где

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3, & x \in [0, 1), \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Найти плотность Радона–Никодима μ_F относительно меры Лебега μ_L .

4. Найти разложение Жордана заряда Стильеса μ_F на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, заданного функцией распределения F ,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - x, & x \in (0, 1], \\ 2x, & x \in (1, 2], \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Какие множества можно взять в качестве Ω^+ , Ω^- ?

5. Вычислить интеграл Лебега по мере (заряду) Стильеса μ_F из предыдущих задач от функции $f(x) = x^2 + 1$ по множеству $[-1, 100)$.