

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ ПО КУРСУ
“ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА” ПО
МОДУЛЮ 1 “ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА: ВВЕДЕНИЕ” для ИУ-9,
4 семестр, 2013

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Кольцо множеств, различные определения, их эквивалентность. Теорема о пересечении колец. Теорема о существовании и единственности минимального кольца, содержащего данную систему множеств.
2. Сигма-алгебра множеств, её свойства. Борелевская сигма-алгебра. Структура открытых множеств в \mathbb{R}^n . Классы множеств, порождающие борелевскую сигма-алгебру на прямой.
3. Полукольцо множеств. Мера на полукольце множеств. Продолжение меры с полукольца, на наименьшее содержащее его кольцо.
4. Счётная аддитивность меры. Пример меры, не являющейся счётно-аддитивной. Непрерывность меры. Связь непрерывности и счётной аддитивности.
5. Теорема Каратеодори. Схема построения лебегова продолжения меры (без дока-ва), случай полукольца с единицей и без неё.
6. Теорема о существовании неизмеримых по Лебегу множеств на \mathbb{R} .
7. Измеримые функции, измеримость по Лебегу, борелевость. Операции над измеримыми функциями.
8. Измеримость предела поточечно и почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций.
9. Теорема Егорова.
10. Сходимость по мере. Связь сходимости по мере и почти всюду. Пример последовательности, сходящейся по мере и не сходящейся почти всюду.
11. Простые функции, их свойства. Интеграл Лебега для простых функций. Свойства интеграла Лебега от простых функций.
12. Распространение определения интеграла Лебега с помощью предельного перехода, корректность такого определения. Связь простых и измеримых функций. Интеграл Лебега по сигма-конечной мере.
13. Основные свойства интеграла Лебега. Связь интеграла Римана и интеграла Лебега.
14. Счётная аддитивность интеграла Лебега как функции множества.

15. Неравенство Чебышева. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.

ЗАДАЧИ

1. Задачи по теме: системы множеств, меры.
2. Задачи по теме: измеримые функции, интеграл Лебега.
3. Задачи теоретического характера.