КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

4 семестр, спец. ИУ9

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература (ОЛ)

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1967, – 304 с.
2. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций: Т.1, 2. – М.: Наука, 1968.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1973, – 736 с.
4. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 444 с.
5. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Функции одного переменного: Учебник: В 2-х ч. Ч. 1. – 4-е изд. – СПб.: Лань, 2004. – 336 с.
6. Сборник задач по теории аналитических функций / под ред. М.А. Евграфова. – М.: Наука, 1972, – 416 с.

Дополнительная литература (ДЛ)

1. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М.: Наука, 1966. – 331 с.
2. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1970. – 320 с.
3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981.
4. Шабунин М., Половинкин Е., Карлов М. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2006. – 362 с.
5. Леонтьева Т.А., Панферов В.С., Серов В.С. Задачи по теории функций комплексного переменного с решениями. – М.: Мир, 2005. – 360 с.

ЛЕКЦИИ

Модуль 1. Элементарная теория

Лекции 1–2. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма. Возведение в степень и извлечение корней. Топология комплексной плоскости: окрестности, предельные точки, граница множества, открытость, замкнутость, связность, компакт, область. Расширенная комплексная плоскость и её топология. Стереографическая проекция, сфера Римана. Предел последовательности. Функциональные последовательности, область сходимости, равномерная сходимость. Функциональные ряды. Признак Вейерштрасса. Степенные ряды. Равномерная сходимость. Круг и радиус сходимости. Теоремы Абеля. Предел функции. Непрерывность. Определение и свойства функции e^z. Показательная форма комплексного числа. Основные элементарные функции комплексного переменного.

Лекции 3–4. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Определение голоморфной функции в точке и в области. Свойства комплексной производной. Производная сложной и обратной функции. Производная по направлению. Обобщённые условия Коши-Римана. Геометрический смысл комплексной производной. Понятие конформного отображения. Дифференцируемость в бесконечности.

Лекции 5–6. Дробно-линейные отображения (ДЛО) и их свойства. Геометрия Лобачевского, модель Пуанкаре. Степенная функция и экспонента. Их основные (максимальные) области конформности. Функция Жуковского.

Лекции 7–8. Многозначные функции, их непрерывные и голоморфные ветви. Корень степени n и логарифм. Их основные ветви и области конформности. Общая степенная и показательная функция. Тригонометрические и гиперболические функции. Обратные тригонометрические функции. Функции arcsin(z), arctg(z). Обратный принцип соответствия границ и принцип симметрии Римана — Шварца (б/д). Гармонические функции, их связь с голоморфными. Метод конформных отображений для решения краевых задач для уравнения Лапласа.

Модуль 2. Ряды и контурные интегралы

Лекция 9. Пути и кривые в **C**. Теорема Жордана (б/д). Приращение (полярного) аргумента вдоль пути. Интеграл по комплексному переменному вдоль пути. Теорема о существовании интеграла от непрерывной функции вдоль спрямляемого пути. Основные свойства интеграла. Вычисление интеграла вдоль непрерывно-дифференцируемого пути. Интеграл вдоль кривой. Оценка интеграла. Теорема Коши для односвязных областей.

Лекция 10. Интегральная теорема Коши для допустимых областей. Теорема Коши для функций, голоморфных внутри области и непрерывных на границе. Комплексная первообразная. Теорема о существовании первообразной в односвязной области. Формула Ньютона-Лейбница. Интегральная формула Коши.

Лекция 11. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Основная теорема алгебры. Формула Коши для производных. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Теорема Морера.

Лекция 12. Равномерная сходимость внутри области. Теоремы Вейерштрасса. Степенные ряды, их свойства. Почленная дифференцируемость и интегрируемость степенных рядов. Единственность разложения в степенной ряд. Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Эквивалентность голоморфности и аналитичности. Табличные разложения в ряд Маклорена.

Лекции 13–14. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля. Формула Тейлора. Теорема о нулях голоморфных функций. Локальная теорема единственности, её следствия. Особые точки на границе круга сходимости. Обобщенные степенные ряды. Кольцо сходимости. Теорема Лорана. Теорема об устранимой особой точке. Изолированные особые точки и их классификация в терминах рядов Лорана. Вычеты и их вычисление. Теорема Коши о вычетах и о полной сумме вычетов.

Модуль 3. Приложения ТФКП

Лекция 15. Правило Лопиталя для аналитических функций. Теорема Сохоцкого. Большая теорема Пикара (б/д) и вывод из неё малой. Лемма Жордана. Логарифмический вычет и его вычисление.

Лекция 16-17. Принцип аргумента. Теорема Руше. Элементы и их аналитическое продолжение (непосредственное и по цепи). Многозначные аналитические функции и их римановы поверхности, примеры $\sqrt[n]{z}$ и $\mathrm{Ln}\, z$, понятие о точках ветвления. Продолжение вдоль пути и его единственность. Аналитическое продолжение по близким и по гомотопным путям. Теорема о монодромии. Аналитическое продолжение первообразной. Полная аналитическая функция (ПАФ) в смысле Вейерштрасса: теорема Пуанкаре — Вольтерра, голоморфные ветви, аналитичность ПАФ над точкой и над областью. Критерий аналитичности ПАФ над областью. Количество значений аналитичной над областью ПАФ. Изолированные особые точки неоднозначного характера; точки ветвления.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Модуль 1. Элементарная теория

Занятия 1–3. Операции над комплексными числами: сложение и вычитание, умножение и деление. Сопряженные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма записи. Возведение в степень и извлечение корня, формула Муавра. Решение уравнений и неравенств с комплексными коэффициентами. Последовательности и ряды комплексных чисел. Множества в комплексной плоскости. Стереографическая проекция. Выделение действительной и мнимой части, модуля и аргумента функции комплексного переменного. Изображение кривых. Элементарные функции и числовые выражения. Функциональные ряды в комплексной плоскости.
Методическая разработка кафедры.

Занятие 4. Дифференцируемость функций комплексного переменного и восстановление голоморфной функции по ее действительной или мнимой части.
Методическая разработка кафедры.

Занятие 5. Дробно-линейные отображения и их свойства; применение ДЛО к конформным отображениям областей.
Методическая разработка кафедры.

Занятие 6. Степенная функция, экспонента и тригонометрические функции. Применение элементарных функций к конформным отображениям областей.
Методическая разработка кафедры.

Занятие 7. Принцип симметрии. Применение элементарных функций к конформным отображениям областей. Перевод различных областей в верхнюю полуплоскость посредством конформных однолистных отображений.
Методическая разработка кафедры.

Занятие 8. Рубежный контроль модулю.

Модуль 2. Ряды и контурные интегралы

Занятие 9. Интегрирование функций комплексного переменного. Теорема и формула Коши. Вычисление интегралов с их помощью.
Методическая разработка кафедры.

Занятие 10. Разложение в степенной ряд. Нули голоморфных функций. Разложение функции в ряд Лорана. Особые точки и их классификация.
Методическая разработка кафедры.

Занятия 11–12. Вычеты, их вычисление. Вычет в бесконечной точке. Вычисление интегралов при помощи вычетов (с помощью вычетов внутри и снаружи области).
Методическая разработка кафедры.

Занятие 13. Интегралы по вещественной прямой. Вычисление вещественных интегралов, содержащих тригонометрические функции.
Методическая разработка кафедры.

Занятие 14. Рубежный контроль по модулю.

Модуль 3. Приложения ТФКП

Занятие 15. Вычисление интегралов с помощью леммы Жордана. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше.
Методическая разработка кафедры

Занятие 16. Гармонические функции, их связь с аналитическими функциями. Свойства гармонических функций. Интеграл Пуассона. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа с помощью конформных отображений.
Методическая разработка кафедры

Занятие 17. Рубежный контроль по модулю.

КОНТРОЛЬНЫЕ МЕРОПРИЯТИЯ

Модуль 1. Элементарная теория (1–8 недели).
Рубежный контроль по модулю 1 (8 неделя).

Модуль 2. Ряды и контурные интегралы (9–14 недели).
Рубежный контроль по модулю 2 (14 неделя).

Модуль 3. Приложения ТФК (15–17 недели).
Рубежный контроль по модулю 3 (17 неделя).