

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ
ПО МОДУЛЮ I КУРСА “ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО
ПЕРЕМЕННОГО”

для ИУ9, лектор Киндеркнехт Я.А., 2013 г.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Дать определение степенного ряда в \mathbb{C} ; сформулировать и доказать теорему Абеля о сходимости степенного ряда и её следствие о существовании круга сходимости.
2. Определить функции $\sin z$, $\cos z$, e^z при $z \in \mathbb{C}$; сформулировать и доказать формулу Эйлера. Определить логарифмическую, общую показательную и общую степенную функции комплексного переменного. Дать определение предела и непрерывности функции комплексного переменного.
3. Дать определение комплексной производной. Сформулировать и доказать теорему Коши–Римана.
4. Дать определение аналитической функции; сформулировать и доказать свойства аналитических функций.
5. Дать определения неограниченно возрастающей последовательности, бесконечно удаленной точки, расширенной комплексной плоскости, окрестности бесконечно удаленной точки, дифференцируемости в бесконечности. Описать конструкцию стереографической проекции.
6. Дать определение производной по направлению. Сформулировать и доказать обобщенные условия Коши–Римана.
7. Описать геометрический смысл комплексной производной. Дать определение конформного отображения. Сформулировать и доказать теорему о связи конформности и дифференцируемости функции.
8. Определить дробно-линейное отображение (ДЛО), дать его геометрическую интерпретацию, исследовать на конформность. Сформулировать и доказать групповое свойство ДЛО.
9. Определить дробно-линейное отображение (ДЛО), дать его геометрическую интерпретацию, исследовать на конформность. Сформулировать и доказать круговое свойство ДЛО.
10. Определить дробно-линейное отображение (ДЛО). Сформулировать и доказать свойство ДЛО сохранения симметричности относительно обобщенной окружности.

11. Определить дробно-линейное отображение (ДЛО). Сформулировать и доказать свойство трёх точек. Определить ангармоническое соотношение четырех точек. Описать модель Пуанкаре геометрии Лобачевского.
12. Описать максимальные области конформности функций z^n , $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$. Определить функцию Жуковского, описать ее свойства.
13. Описать максимальные области конформности функций e^z , $\operatorname{Ln} z$, тригонометрических и обратных тригонометрических функций.
14. Сформулировать теорему Римана, обратный принцип соответствия границ, принцип симметрии Римана–Шварца.

ЗАДАЧИ

1. Найдите область аналитичности функции f , на этой области найдите производную $f'(z)$ (если существует).
 - а) (1 балл). $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + ie^x \cos y$,
 - б) (1 балл). $f(x, y) = x^2y + icy^2$.
2. (2 балла). Определите круг сходимости заданного степенного ряда. Сходится ли ряд в заданной точке z_1 ? Если сходится, то как — абсолютно или условно?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (z + i\sqrt{3})^{2n}}{3^n \sqrt{n^2 + 1} + \ln n}, \quad z_1 = 0.$$

3. Отобразить указанные области на верхнюю полуплоскость при помощи конформного отображения.
 - а) (3 балла). Сегмент круга $|z + i| < \sqrt{2}$, $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом от точки 0 до точки $(2 - \sqrt{3})i$.
 - б) (3 балла). Полуполосу $-1 < \operatorname{Re} z < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом от точки 0 до точки i .