

**Типовое домашнее задание “Метод разделения переменных. Специальные функции” по курсу “УРМФ” для ИУ9, 2013 г., лектор: Киндеркнехт Я.А.**

**Вариант 1**

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u(2, \varphi) = 2 \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi + \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u|_{x=0} = \frac{y - y_0}{8y_0}, & u'_x|_{x=l} = 0, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u_y|_{y=0} = -\frac{1}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l}, & u|_{y=y_0} = \sin \frac{5\pi x}{2l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R} \cos \varphi, & u|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r(2, \varphi) = 2 \cos^3 \varphi - 3 \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u(1, \varphi, \vartheta) = 3 \cos^2 \vartheta + \cos \vartheta. \end{cases}$$

## Вариант 2

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r(1, \varphi) = 3 \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi - \sin \varphi; \\ u(2, \varphi) = 0. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u'_x|_{x=0} = \frac{y(2y_0 - y)}{4y_0^3}, & u|_{x=l} = 0, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u'_y|_{y=0} = -\frac{3}{2l} \cos \frac{3\pi x}{2l}, & u'_y|_{y=y_0} = \frac{1}{2l} \cos \frac{3\pi x}{2l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R} \sin \varphi, & u_z|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r(1, \varphi) = \cos^3 \varphi + \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u(2, \varphi, \vartheta) = \cos^2 \vartheta - 2 \cos \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 3

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 4, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u'_r(4, \varphi) = \cos^3 \varphi + 4 \sin^3 \varphi + \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u|_{x=0} = \frac{y - y_0}{8y_0}, & u|_{x=l} = 0, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u'_y|_{y=0} = -\frac{2}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}, & u|_{y=y_0} = \sin \frac{\pi x}{l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u_r|_{r=R}, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R} \cos \varphi, & u|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u(2, \varphi) = 3 \cos^3 \varphi - \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u'_r(1, \varphi, \vartheta) = 4 \cos^2 \vartheta + 3 \cos \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 4

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 3, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u(1, \varphi) = 4 \sin^3 \varphi - \sin^2 \varphi + \sin \varphi; \\ u'_r(3, \varphi) = 0. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u'_x|_{x=0} = \frac{y - y_0}{2y_0^2}, & u'_x|_{x=l} = 0, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u|_{y=0} = 1, & u|_{y=y_0} = \cos \frac{\pi x}{l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u_r|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R} \sin \varphi, & u_z|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u(3, \varphi) = \cos^2 \varphi - 3 \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u'_r(1, \varphi, \vartheta) = 4 \cos \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 5

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u'_r(2, \varphi) = 2 \cos^3 \varphi + \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u|_{x=0} = \frac{y - y_0}{2y_0}, & u'_x|_{x=l} = 0, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u|_{y=0} = -\sin \frac{5\pi x}{2l}, & u|_{y=y_0} = \sin \frac{\pi x}{2l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u_z|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R^2} \cos \varphi, & u|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r(2, \varphi) = \cos^3 \varphi - 2 \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u(1, \varphi, \vartheta) = \sin^2 \vartheta + 3 \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 6

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u(1, \varphi) = \cos^3 \varphi - \cos^2 \varphi + \sin \varphi \\ u(2, \varphi) = \cos^2 \varphi + 2 \sin 3\varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u'_x|_{x=0} = \frac{y(y-2y_0)}{64y_0^3}, & u'_x|_{x=l} = 0, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u|_{y=0} = -\cos \frac{\pi x}{l}, & u'_y|_{y=y_0} = \frac{3}{l} \cos \frac{3\pi x}{l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u_z|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R^2} \sin \varphi, & u_z|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r(2, \varphi) = \sin^3 \varphi + 5 \cos \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u(3, \varphi, \vartheta) = \cos \vartheta + 2 \sin^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 7

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u'_r(3, \varphi) = 3 \sin^3 \varphi - \cos^3 \varphi + \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u|_{x=0} = \frac{y(y-2y_0)}{32y_0^2}, & u|_{x=l} = 0, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u|_{y=0} = -\sin \frac{2\pi x}{l}, & u'_y|_{y=y_0} = \frac{1}{l} \sin \frac{\pi x}{l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u_r|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u_z|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R^2} \cos \varphi, & u|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + 16u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u(1, \varphi) = \cos^2 \varphi - 3 \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u'_r(2, \varphi, \vartheta) = 3 \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 8

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u(1, \varphi) = 2 \cos^3 \varphi + 4 \sin^3 \varphi - \sin^2 \varphi; \\ u'_r(2, \varphi) = \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u|_{x=0} = -\cos \frac{5\pi y}{2y_0}, & u'_x|_{x=l} = \frac{1}{2y_0} \cos \frac{\pi y}{2y_0}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u'_y|_{y=0} = \frac{x(x-2l)}{64l^3}, & u|_{y=y_0} = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u_z|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R^2} \sin \varphi, & u_z|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r(2, \varphi) = \cos^3 \varphi + \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u(1, \varphi, \vartheta) = 2 \cos^2 \vartheta + 7 \cos \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 9

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u'_r(1, \varphi) = -4 \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi + 2 \cos \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u'_x|_{x=0} = -\frac{1}{y_0} \cos \frac{\pi y}{y_0}, & u|_{x=l} = 1, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u'_y|_{y=0} = \frac{x-l}{16l^2}, & u'_y|_{y=y_0} = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R} \sin \varphi, & u|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u(3, \varphi) = \cos^3 \varphi + \sin^2 \varphi - \cos \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u'_r(1, \varphi, \vartheta) = \cos \vartheta - 5 \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 10

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u(2, \varphi) = 2 \cos^3 \varphi - 4 \sin^3 \varphi + 3 \cos \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u|_{x=0} = -\cos \frac{\pi y}{2y_0}, & u|_{x=l} = \cos \frac{\pi y}{2y_0}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u'_y|_{y=0} = \frac{x-l}{2l^2}, & u|_{y=y_0} = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R} \cos \varphi, & u_z|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r(1, \varphi) = \sin^3 \varphi + 3 \cos \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 4, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u'_r(4, \varphi, \vartheta) = \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 11

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u'_r(3, \varphi) = \sin^3 \varphi - \cos^3 \varphi + 3 \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u'_x|_{x=0} = -\frac{1}{y_0} \sin \frac{\pi y}{y_0}, & u'_x|_{x=l} = \frac{1}{3y_0} \sin \frac{\pi y}{y_0}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u|_{y=0} = \frac{x(2l-x)}{4l^2}, & u|_{y=y_0} = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u_r|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R} \sin \varphi, & u|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u(1, \varphi) = \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u(1, \varphi, \vartheta) = \cos^2 \vartheta + 3 \cos \vartheta. \end{cases}$$

## Вариант 12

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 6, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u'_r(6, \varphi) = 2 \cos^3 \varphi - 3 \cos^3 \varphi + \cos \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u|_{x=0} = -\sin \frac{\pi y}{y_0}, & u'_x|_{x=l} = \frac{2}{y_0} \sin \frac{2\pi y}{y_0}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u|_{y=0} = \frac{x(x-2l)}{32l^2}, & u|_{y=y_0} = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u_r|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R} \cos \varphi, & u_z|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u(2, \varphi) = \cos^2 \varphi + 5 \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u'_r(1, \varphi, \vartheta) = \cos \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 13

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 4, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u'_r(4, \varphi) = 2 \cos^3 \varphi + 2 \sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u'_x|_{x=0} = -\frac{1}{2y_0} \sin \frac{\pi y}{2y_0}, & u'_x|_{x=l} = \frac{3}{2y_0} \sin \frac{3\pi y}{2y_0}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u|_{y=0} = \frac{x(2l-x)}{4l^2}, & u'_y|_{y=y_0} = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u_z|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R^2} \sin \varphi, & u|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + 16u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r(2, \varphi) = \cos^3 \varphi - \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u'_r(1, \varphi, \vartheta) = 4 \cos \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 14

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u(1, \varphi) = -\sin^3 \varphi - 2\sin^2 \varphi + 3\sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u|_{x=0} = -\sin \frac{\pi y}{2y_0}, & u|_{x=l} = \sin \frac{5\pi y}{2y_0}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u|_{y=0} = \frac{x-l}{2l}, & u'_y|_{y=y_0} = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u_z|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R^2} \cos \varphi, & u_z|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u(1, \varphi) = \cos^2 \varphi - 6\sin^3 \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u'_r(1, \varphi, \vartheta) = 2\cos \vartheta + 3\cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 15

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u(2, \varphi) = 4 \cos^3 \varphi - 2 \sin^3 \varphi + \cos^2 \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u|_{x=0} = 0, & u'_x|_{x=l} = \frac{y_0 - y}{16y_0^2}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u'_y|_{y=0} = -\frac{3}{2l} \sin \frac{3\pi x}{2l}, & u|_{y=y_0} = \sin \frac{\pi x}{2l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u_r|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u_z|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R^2} \sin \varphi, & u|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u(2, \varphi) = \cos^3 \varphi - \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u'_r(1, \varphi, \vartheta) = \cos \vartheta + 4 \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 16

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u'_r(3, \varphi) = 2 \cos^3 \varphi - 4 \sin^3 \varphi + \cos \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u'_x|_{x=0} = 0, & u|_{x=l} = \frac{y(y-2y_0)}{4y_0^2}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u'_y|_{y=0} = -\frac{1}{2l} \cos \frac{\pi x}{2l}, & u'_y|_{y=y_0} = \frac{3}{2l} \cos \frac{3\pi x}{2l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u_z|_{z=0} = v_0 \frac{r}{R^2} \cos \varphi, & u_z|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u(3, \varphi) = \cos^2 \varphi - 3 \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u(1, \varphi, \vartheta) = \cos \vartheta - 2 \sin^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 17

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 4, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u(4, \varphi) = 2 \cos^2 \varphi - \sin^3 \varphi + \cos \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u|_{x=0} = 0, & u|_{x=l} = \frac{y_0 - y}{8y_0}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u'_y|_{y=0} = -\frac{4}{l} \sin \frac{4\pi x}{l}, & u|_{y=y_0} = \sin \frac{\pi x}{l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u|_{z=0} = v_0 \frac{r^2}{R^2} \cos 2\varphi, & u|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r(2, \varphi) = 2 \cos^3 \varphi - \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u(1, \varphi, \vartheta) = 5 \cos \vartheta - \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 18

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 5, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u'_r(5, \varphi) = 2 \sin^3 \varphi - \sin \varphi + 2 \cos \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u'_x|_{x=0} = 0, & u'_x|_{x=l} = \frac{y_0 - y}{2y_0^2}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u|_{y=0} = -\cos \frac{2\pi x}{l}, & u|_{y=y_0} = 1, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u|_{z=0} = v_0 \frac{r^2}{R^2} \sin 2\varphi, & u_z|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u(2, \varphi) = \cos^2 \varphi + 5 \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u(3, \varphi, \vartheta) = 3 \cos \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 19

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u(2, \varphi) = 2 \cos^3 \varphi + 4 \sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u|_{x=0} = 0, & u'_x|_{x=l} = \frac{y_0 - y}{2y_0^2}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u|_{y=0} = \sin \frac{\pi x}{2l}, & u|_{y=y_0} = \sin \frac{3\pi x}{2l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u_r|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u|_{z=0} = v_0 \frac{r^2}{R^2} \cos 2\varphi, & u|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r(2, \varphi) = 3 \cos^3 \varphi + 5 \cos \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u'_r(2, \varphi, \vartheta) = \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 20

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u'_r(1, \varphi) = 6 \sin^3 \varphi - \cos^3 \varphi + 4 \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u'_x|_{x=0} = 0, & u'_x|_{x=l} = \frac{y(2y_0 - y)}{64y_0^3}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u|_{y=0} = 1, & u'_y|_{y=y_0} = \frac{1}{l} \cos \frac{\pi x}{l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u_r|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u|_{z=0} = v_0 \frac{r^2}{R^2} \sin 2\varphi, & u_z|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u(2, \varphi) = \cos^2 \varphi + 4 \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u'_r(1, \varphi, \vartheta) = \cos \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 21

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u(3, \varphi) = \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi + \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u|_{x=0} = 0, & u|_{x=l} = \frac{y(2y_0 - y)}{32y_0^2}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u|_{y=0} = -\sin \frac{2\pi x}{l}, & u'_y|_{y=y_0} = \frac{2}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u_z|_{z=0} = v_0 \frac{r^2}{R^3} \cos 2\varphi, & u|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r(1, \varphi) = \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u(2, \varphi, \vartheta) = \cos \vartheta - \sin^2 \vartheta. \end{cases}$$

## Вариант 22

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 4, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u'_r(4, \varphi) = 4 \sin^3 \varphi - \sin \varphi - \cos \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u|_{x=0} = -\cos \frac{\pi y}{2y_0}, & u'_x|_{x=l} = \frac{1}{2y_0} \cos \frac{\pi y}{2y_0}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u'_y|_{y=0} = 0, & u|_{y=y_0} = \frac{x(2l-x)}{32l^2}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u_z|_{z=0} = v_0 \frac{r^2}{R^3} \sin 2\varphi, & u_z|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r(2, \varphi) = \cos^3 \varphi + 12 \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u(1, \varphi, \vartheta) = \cos \vartheta + 4 \sin^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 23

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 5, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u(5, \varphi) = -\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi + \cos \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u'_x|_{x=0} = -\frac{2}{y_0} \cos \frac{2\pi y}{y_0}, & u|_{x=l} = 1, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u'_y|_{y=0} = 0, & u'_y|_{y=y_0} = \frac{l-x}{16l^2}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u_r|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u_z|_{z=0} = v_0 \frac{r^2}{R^3} \cos 2\varphi, & u|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 3, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r(3, \varphi) = \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u'_r(1, \varphi, \vartheta) = \cos \vartheta + 2 \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 24

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u'_r(2, \varphi) = 4 \cos^3 \varphi + 2 \sin^3 \varphi + \sin \varphi - \cos \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u|_{x=0} = -\cos \frac{3\pi y}{2y_0}, & u|_{x=l} = \cos \frac{\pi y}{2y_0}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u'_y|_{y=0} = 0, & u|_{y=y_0} = \frac{l-x}{2l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u_z|_{z=0} = v_0 \frac{r^2}{R^3} \sin 2\varphi, & u_z|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u(2, \varphi) = \cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u'_r(1, \varphi, \vartheta) = \cos \vartheta + 12 \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

### Вариант 25

**Задача 1.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге/кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u'_r(1, \varphi) = 2 \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi + 3 \sin \varphi - 3 \cos \varphi. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < l, & 0 < y < y_0; \\ u'_x|_{x=0} = -\frac{3}{y_0} \sin \frac{3\pi y}{y_0}, & u'_x|_{x=l} = \frac{1}{y_0} \sin \frac{\pi y}{y_0}, & 0 \leq y \leq y_0; \\ u|_{y=0} = 0, & u|_{y=y_0} = \frac{x(x-2l)}{4l^2}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круговом цилиндре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 < z < l; \\ u|_{r=R} = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq z \leq l; \\ u|_{z=0} = v_0 \frac{r^2}{R^2} \sin 2\varphi, & u|_{z=l} = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**Задача 4.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + 16u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u(2, \varphi) = \cos^2 \varphi + 5 \sin \varphi. \end{cases}$$

**Задача 5.** Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ u(1, \varphi, \vartheta) = \cos \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$