ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ №1 ПО КУРСУ "УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ"

для ИУ-9, 8 семестр

лектор: КИНДЕРНЕХТ Я.А.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К КОЛЛОКВИУМУ

1. Дать определение фундаментального решения линейного дифференциального оператора. Сформулировать и доказать теорему Дюамеля о связи фундаментального решения линейного дифференциального оператора L с решением уравнения $Lu = f$.

2. Найти фундаментальное решение оператора теплопроводности.

3. Описать многомерные аналоги δ-функции Дирака. Найти преобразование Фурье простого слоя на сфере.

4. Найти фундаментальное решение волнового уравнения (трёхмерного и одномерного).

5. Написать уравнение Лапласа и найти его фундаментальное решение в $\mathbb{R}^3$.

6. Найти фундаментальные решения оператора Гельмгольца в $\mathbb{R}^3$.

7. Сформулировать классическую и обобщённую постановки задачи Коши для уравнения теплопроводности. Решить классическую задачу Коши методом включения начальных условий в мгновенно действующие источники.

8. Сформулировать классическую и обобщённую постановки задачи Коши для волнового уравнения. Решить классическую задачу Коши методом включения начальных условий в мгновенно действующие источники.

9. Вывести интегральное представление решения уравнения Пуасона в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ через фундаментальное решение и краевые данные.

10. Вывести интегральное представление решения уравнения Гельмгольца в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ через фундаментальное решение и краевые данные.

11. Дать определение гармонической функции. Сформулировать и доказать свойство интеграла от нормальной производной гармонической функции по замкнутой поверхности. Сформулировать и доказать формулу среднего значения гармонической функции. Сформулировать и доказать принцип максимума.

12. Сформулировать внутреннюю краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Сформулировать и доказать теорему о единственности решения такой задачи. Сформулировать внутреннюю краевую задачу Неймана для уравнения Лапласа в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Перечислить свойства решения такой задачи. Доказать необходимое условие разрешимости такой задачи.

13. Найти интегральное представление гармонической в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ функции через функцию Грина и краевые данные. Описать метод функции Грина для решения краевых задач для уравнения Лапласа. Описать свойства функций Грина задачи Дирихле и задачи Неймана.

14. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве методом функции Грина.

ЗАДАЧИ

1. Проверить, является ли данная функция гармонической:
$$u(x,y,z) = z \arctan \frac{y}{x} + 2x - 3y.$$

2. Методом включения начальных условий в мгновенно действующие источники решить задачу Коши:
$$x'' - x' = \frac{e^{2t}}{1+e^t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

3. Построить функцию Грина смешанной задачи Дирихле-Неймана для двумерного уравнения Пуассона во второй координатной четверти, с помощью полученной функции Грина записать в интегральном виде решение рассматриваемой задачи:
   $\Delta u(x,y) = e^{-x^2-y^2}, \quad x < 0,\ y > 0,$
   $u(0,y) = \sin y e^{-y^2},$
   $u'_y(x,0) = \cos x e^{-x^2}.$

4. Найти функцию Грина заданной краевой задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = F$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. С помощью полученной функции Грина записать в интегральном виде решение рассматриваемой задачи.
   $\Omega = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ -\frac{3\pi}{4} < \varphi < -\frac{\pi}{4}\right\},$
   $F(r,\varphi) = \sin\varphi\, e^{-r^2+2},$
   $u'_\varphi(r, -\frac{3\pi}{4}) = \frac{r}{r^4+1},$
   $u'_\varphi(r, -\frac{\pi}{4}) = 0.$