

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К КОЛЛОКВИУМУ №2 ПО КУРСУ
"УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ"

ИУ-9, весенний семестр, лектор: Киндеркнехт Я.А.

1. Дать определения скалярного произведения и гильбертова пространства. Рассмотреть в качестве примеров гильбертовых пространств пространство $L_2[a, b]$ и $L_2([a, b], \rho)$; указать скалярное произведение и норму в этих пространствах.
2. Дать определения ортогональной системы и ортогонального базиса. Привести примеры ортогональных базисов в $L_2[a, b]$. Дать определения коэффициентов Фурье и ряда Фурье функции по ортогональной системе.
3. Дать определения линейного оператора и его области определения в гильбертовом пространстве; сопряжённого и самосопряжённого оператора. Рассмотреть оператор Штурма–Лиувилля, доказать его самосопряжённость.
4. Дать определение неотрицательной (положительной) определённости линейного оператора в гильбертовом пространстве. Рассмотреть оператор Штурма–Лиувилля, доказать, что он неотрицательно определён.
5. Дать определения собственных чисел (значений) и собственных векторов (функций) линейного оператора. Сформулировать задачу Штурма–Лиувилля. Доказать неотрицательность собственных чисел оператора Штурма–Лиувилля.
6. Перечислить свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля. Сформулировать теорему Стеклова. Доказать ортогональность с весом ρ собственных функций, отвечающих различным собственным числам.
7. Дать определение гамма-функции Эйлера, описать её свойства.
8. Написать уравнение Бесселя, получить в качестве его частных решений функции Бесселя.
9. Дать определение цилиндрических функций Бесселя, Неймана, Ханкеля. Написать уравнение Бесселя с дополнительным параметром, найти его общее решение.
10. Показать ортогональность функций Бесселя с помощью свойств собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Сформулировать теорему Стеклова для функций Бесселя.
11. Вывести формулы квадрата нормы функций Бесселя для граничных условий Дирихле и Неймана.