

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ "УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ" для ИУ-9, лектор: Киндеркнехт Я.А.

1. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности с помощью преобразования Фурье.
2. Дать определение фундаментального решения линейного дифференциального оператора. Сформулировать и доказать теорему Дюамеля о связи фундаментального решения линейного дифференциального оператора L с решением уравнения $Lu = f$.
3. Написать уравнение Лапласа и его и найти фундаментальное решение в \mathbb{R}^3 .
4. Дать определение гармонической функции. Найти интегральное представление гармонической в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ функции через фундаментальное решение и краевые данные. Сформулировать и доказать свойство интеграла от нормальной производной по замкнутой поверхности.
5. Дать определение гармонической функции. Сформулировать и доказать формулу среднего значения гармонической функции. Сформулировать и доказать принцип максимума.
6. Сформулировать внутреннюю краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Сформулировать и доказать теорему о единственности решения такой задачи. Сформулировать внутреннюю краевую задачу Неймана для уравнения Лапласа в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Перечислить свойства решения такой задачи. Доказать необходимое условие разрешимости такой задачи.
7. Найти интегральное представление гармонической в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ функции через функцию Грина и краевые данные. Описать метод функции Грина для решения краевых задач для уравнения Лапласа. Описать свойства функций Грина задачи Дирихле и задачи Неймана.
8. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве методом функции Грина.
9. Найти фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Сформулировать классическую и обобщённую постановки задачи Коши для уравнения теплопроводности. Решить классическую задачу Коши методом включения начальных условий в мгновенно действующие источники.
10. Найти фундаментальное решение волнового оператора в \mathbb{R}^1 и \mathbb{R}^3 .
11. Сформулировать классическую и обобщённую постановки задачи Коши для волнового уравнения. Решить классическую задачу Коши методом включения начальных условий в мгновенно действующие источники.

12. Найти фундаментальные решения уравнения Гельмгольца в \mathbb{R}^3 . Вывести формулу Кирхгофа и интегральное представление решения уравнения Гельмгольца в ограниченной области через фундаментальное решение и краевые данные.
13. Поставить задачу Штурма-Лиувилля. Описать свойства оператора Штурма-Лиувилля. Описать свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма-Лиувилля. Привести примеры решения задачи Штурма-Лиувилля.
14. Написать уравнение Бесселя, найти его частные решения в виде обобщённых степенных рядов. Определить функции Бесселя и Неймана. Показать ортогональность функций Бесселя. Найти формулы квадрата нормы для граничных условий первого и второго рода.
15. Описать метод разделения переменных решения краевых задач для уравнения Лапласа в цилиндрических областях. Построить собственные функции.