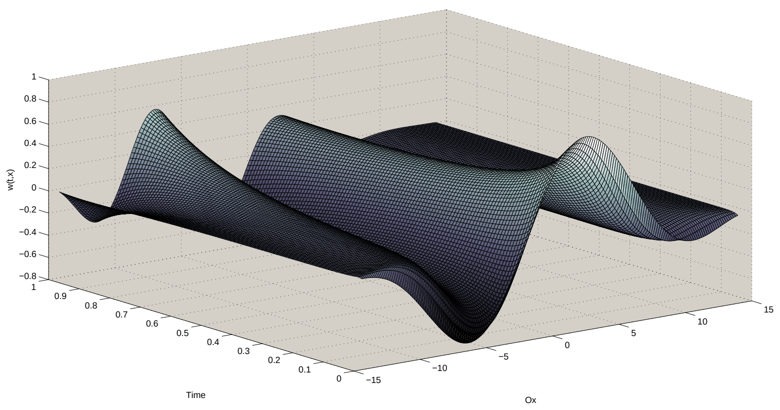
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА
(МГТУ им. Н.Э.Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Бузинов Максим Сергеевич

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА



КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
бакалавра математики

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук, доцент
Яна Анатольевна Киндеркнехт

МОСКВА — 2012

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Р А С Ч Ё Т Н О - П О Я С Н И Т Е Л Ь Н А Я З А П И С К А

к квалификационной работе бакалавра на тему:

Формулы Фейнмана для нестационарного уравнения четвертого порядка

Студент ________________________________ Максим Сергеевич Бузинов
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Руководитель квалификационной работы ____________Яна Анатольевна Киндеркнехт
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Москва, 2012

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ________
(Индекс)

________________ ________________
(И.О.Фамилия)

« ___ » ____________ 20 __ г.

К А Л Е Н Д А Р Н Ы Й   П Л А Н
выполнения квалификационной работы бакалавра

Студент Бузинов Максим Сергеевич
(Фамилия, имя, отчество)

Формулы Фейнмана для нестационарного уравнения четвертого порядка
(Тема квалификационной работы)

№ п/п	Наименование этапов квалификационной работы	Выполнение этапов		Примечание
		Срок	Объем, %	
1.	Обзор литературы	15.10.12	20%	
2.	Доказательство существования полугруппы, разрешающей задачу Коши для нестационарного уравнения четвертого порядка	20.11.12	40%	
3.	Получение гамильтоновой формулы Фейнмана для решения задачи Коши	08.12.12	55%	
4.	Получение лагранжевой формулы Фейнмана для решения задачи Коши	10.01.12	82%	
5.	Численное моделирование решения задачи Коши на основе полученной лагранжевой Формулы Фейнмана	24.01.12	93%	
6.	Оформление диплома и презентации	04.02.12	98%	
7.	Подготовка к защите	08.02.12	100%	

Руководитель квалификационной работы Яна Анатольевна Киндеркнехт
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Студент Максим Сергеевич Бузинов
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ________
(Индекс)

________________ ________________
(И.О.Фамилия)

« ___ » ____________ 20 __ г.

З А Д А Н И Е
на выполнение квалификационной работы бакалавра

Студент ______________________Бузинов Максим Сергеевич______________________________
(Фамилия, имя, отчество)

_________Формулы Фейнмана для нестационарного уравнения четвертого порядка___________
(Тема квалификационной работы)

Источник тематики (НИР кафедры, заказ организаций и т.п.)_НИР кафедры__________________

Тема квалификационной работы утверждена распоряжением по факультету № ____
от « ___ » _____________ 20__ г.

1. Научно-исследовательская часть

Получение гамильтоновых и лагранжевой формул Фейнмана , представляющих решение задачи Коши для нестационарного уравнения четвертого порядка. Применение полученных формул Фейнмана для численного решения задачи Коши для нестационарного уравнения четвертого порядка____

2. Проектно-конструкторская часть

Задача не ставилась____

3. Технологическая часть

Реализация решения задачи Коши для нестационарного уравнения четвертого порядка по формуле Фейнмана в комплексе MATLAB. Компьютерное моделирование модельных задач при помощи созданного алгоритма. Анализ показателей скорости работы метода. Проведение вычислительных экспериментов.__

4. Оформление квалификационной работы

4.1. Расчетно-пояснительная записка на ___ листах формата А4.

4.2. Перечень графического материала (плакаты, схемы, чертежи и т.п.) ___________________

Дата выдачи задания « ___ » _____________ 20__ г.

В соответствии с учебным планом квалификационную работу выполнить в полном объеме в срок до « ___ » _____________ 20__ г.

Руководитель квалификационной работы _______________Яна Анатольевна Киндеркнехт
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Студент __________________Бузинов Максим Сергеевич
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Примечание:

1. Задание оформляется в двух экземплярах; один выдаётся студенту, второй хранится на кафедре.

Оглавление

Глава 1.

Введение

Формулами Фейнмана называются представления решений начальных и начально-краевых задач для эволюционных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений в виде пределов конечнократных интегралов от элементарных функций, зависящих от коэффициентов уравнения и начально-краевых условий. Конечнократные интегралы в формулах Фейнмана являются аппроксимациями функциональных интегралов по некоторым мерам гауссовского или фейнмановского типа на множестве траекторий в тех областях, на которых рассматриваются уравнения. Представления решений эволюционных уравнений с помощью функциональных интегралов обычно называются формулами Фейнмана–Каца. Подобные представления полезны для исследования характера решений эволюционных уравнений, в том числе и методами стохастического анализа. В то же время, собственно формулы Фейнмана можно использовать для непосредственных вычислений решений рассматриваемых уравнений. Метод получения формул Фейнмана (а, следовательно, и формул Фейнмана–Каца) для эволюционных уравнений был предложен в работах О.Г.Смолянова и его соавторов в 1999- 2003 г.г. (см. [7], [6], [9], [8], [10]) Этот метод был развит Бутко Я.А. для исследования уравнений диффузии и Шрёдингера на римановом многообразии, а также для исследования некоторых псевдо-дифференциальных уравнений (с нелокальными операторами) [11], [12]. Данный метод является принципиально новым и позволяет получать формулы Фейнмана и Фейнмана–Каца для обширного класса эволюционных уравнений на различных геометрических структурах. В настоящей работе получены представления решения задачи Коши одномерного нестационарного уравнения четвертого порядка на прямой с постоянным коэффициентом. Кроме того, в работе представлен программный алгоритм, позволяющий использовать полученные формулы для численного решения соответствующей задачи Коши для одномерного нестационарного уравнения четвертого порядка.

Глава 2.

Предварительные сведения

2.1. Используемые обозначения

$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ — пространство Шварца, все функции класса $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, убывающие при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$.

$\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}$, таких что $\lim\limits_{|x|\to\infty} \omega(x) = 0$

$L_2(\mathbb{R})$ — банахово пространство квадратично интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций.

$Dom(\cdot)$ — область определения оператора.

$Ran(\cdot)$ — область значений оператора.

$Cor(\cdot)$ — существенная область определения оператора.

$\|L\|$ — норма оператора.

$\|\cdot\|_X$ — норма элемента банахова пространства X.

$\|\cdot\|_2$ — норма элемента банахова пространства $L_2(\mathbb{R})$.

$\|\cdot\|_\infty$ — норма элемента банахова пространства $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$.

$\mathcal{L}(X;Y)$ — пространство непрерывных линейных операторов из X в Y, где X, Y-линейные топологические пространства.

$\mathcal{F}[\omega] := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\omega(x)dx$ или $\widehat{\omega}$ — прямое преобразование Фурье.

$\mathcal{F}^{-1}[\omega] := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ixy}\omega(y)dy$ — обратное преобразование Фурье.

2.2. Полугруппы операторов и их генераторы

Определение 2.1. *Пусть X - банахово пространство. Семейство ограниченных линейных операторов $(T_t), t \geq 0$ в X называется сильно непрерывной операторной полугруппой, если для $t, s \geq 0, x \in X$ выполнено:*

(i) $T_0 = Id$ *;*

(ii) $T_{t+s} = T_t T_s$*;*

(iii) $\lim\limits_{t \to 0} \| T_t x - x \|_X = 0.$

Определение 2.2. *Если $\|T_t\| \leq 1$, то сильно непрерывная операторная полугруппа называется сжимающей.*

Определение 2.3. *Сильная операторная топология - это слабейшая топология на $\mathcal{L}(X;Y)$ в которой отображения $E_x : \mathcal{L}(X;Y) \to Y$; заданные равенством $E_x(T) = Tx$ непрерывны для любого $x \in X$. База окрестностей нуля задается множествами вида $S : S \in \mathcal{L}(X;Y); \|Sx_i\|_Y \leq \varepsilon, i = (1, \ldots, n)$; где x_i - конечный набор элементов из X, а $\varepsilon > 0$. В этой топологии последовательность операторов T_α сходится к T, тогда и только тогда, когда $\|T_\alpha x - Tx\|_Y \to 0$ для любого $x \in X$. Предел в сильной операторной топологии обозначается $s - \lim$.*

Определение 2.4. *Функция $F(t) : [0; \infty) \to \mathcal{L}(X)$ называется сильно непрерывной, если для всех $x \in X$ отображения $t \to F(t)x$ являются непрерывными функциями из $\mathbb{R}_+$ в X.*

Положим

$$Dom(L) := \left\{ x \in X : \exists \lim_{t \to 0} \tfrac{T_t x - x}{t} \right\};$$
$$Lx := \lim_{t \to 0} \tfrac{T_t x - x}{t}, x \in D(L).$$

Оператор с указанной областью определения $Dom(L)$ называется генератором или производящим оператором полугруппы $(T_t)_{t \geq 0}$.

Пример 2.5. Пусть L – ограниченный оператор на банаховом пространстве X и

$$T_t = e^{tL} := \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{t^n}{n!} L^n.$$

Тогда указанный ряд сходиться по операторной норме и задает на банаховом пространстве X сильно непрерывную полугруппу, генератор которой совпадает с оператором L.

Теорема 2.6. *Для всякой непрерывной полугруппы операторов $(T_t)_{t \geq 0}$ справедливо:*

(i) Оператор L – генератор полугруппы является плотно определенным и замкнутым;

(ii) *для всякого* $x \in \mathcal{D}(L)$ *верны равенства:*

$$\frac{d}{dt} T_t x = L T_t x = T_t L x;$$

(iii) *для всякого* $x \in X$ *верно равенство* $T_t x = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} exp\Big(t \frac{T_\varepsilon - Id}{\varepsilon}\Big) x;$

причем сходимость равномерна на отрезках в $[0, +\infty)$.

Определение 2.7. *Если оператор* L *замкнут, то подмножество* $C \in D(L)$ *называется существенной областью определения оператора, если* $\overline{L \restriction C} = L$, *т.е. оператор* L *совпадает с замыканием сужения* L *на подмножество* C .

Предложение 2.8. *Пусть* L*-генератор сильно непрерывной полугруппы* $(T_t)_{t \geq 0}$ *в банаховом пространстве* X. *Пусть* C *- подмножество* $D(L)$, *где* $D(L)$*- область определения* L. *Пусть* C *плотно в* X *и инвариантно относительно* $(T_t)_{t \geq 0}$, *т.е.* $T_t x \in C$, *для любого* $x \in C$ *и* $t \in [0, +\infty)$. *Тогда* C *- существенная область определения* L.

Теорема 2.9. *(Об ограниченном линейном отображении). Пусть* T *— ограниченное линейное преобразование из нормированного линейного пространства* $\langle V_1, \| \cdot \|_{V_1} \rangle$ *в полное нормированное линейное пространство* $\langle V_2, \| \cdot \|_{V_2} \rangle$. *Тогда* T *единственным образом может быть расширено до ограниченного линейного преобразования (с прежней нормой)* T *из пополнения пространства* V_1 *в* $\langle V_2, \| \cdot \|_{V_2} \rangle$.

2.3. Резольвента и полугруппы операторов

Определение 2.10. *Ограниченный оператор L называют обратимым, если он взаимно-однозначно отображает банахово пространство X на X.*

Важную роль в теории линейных операторов играет вопрос обратимости оператора $L - \lambda Id$

Определение 2.11. *Резольвентным множеством оператора L называют такое множество чисел λ, что оператор $L - \lambda Id$ обратим. Точки резольвентного множества называются регулярными, а оператор:*

$$R_\lambda(L) := (L - \lambda Id)^{-1}$$

- резольвентой оператора L.

Теорема 2.12. *(Банаха-Штейнгауза)*

Пусть дано семейство L_α ограниченных линейных операторов на банаховом пространстве X, принимающих значения в нормированном пространстве Y. Предположим, что:

$$\sup \|A_\alpha x\| < \infty \text{ для каждого } x \in X,$$

тогда $\sup\limits_{\alpha} \|A_\alpha\| < \infty$.

Из теоремы Банаха-Штейнгауза, и определения полугруппы операторов следует равномерная ограниченность операторов T_t на $t \in [0,1]$, т.е. $\sup\limits_{t\in[0,1]} \|T_t\| < C < \infty$, а также оценка $\|T_t\| \leq Ce^{\beta t}$ где β - некоторая постоянная.

Такая оценка позволяет рассмотреть оператор:

$$R_\lambda x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s} T_s x ds,$$

определенный для λ, таких, что $Re\lambda > \beta$

Предложение 2.13. *Для всякого λ с $Re\lambda > \beta$, имеем*

$R_\lambda(X) \subset \mathcal{D}(L)$, $(\lambda Id - L)R_\lambda = Id$

причем

$\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x = x$, для всех $x \in X$.

Теорема 2.14. *(Хилле - Иосиды) [14] Пусть L - генератор сильно непрерывной сжимающей полугруппы $T_t, t \geq 0$ в банаховом пространстве X. Тогда всякое вещественное число λ входит в резольвентное множество L, причем:*

$$\|R_\lambda\| = \|(\lambda Id - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda};$$

верно и обратное утверждение.

2.4. Псевдодифференциальные операторы

Псевдодифференциальный оператор, это естественное расширение понятия дифференциального оператора в частных производных. Рассмотрим дифференциальный оператор Q степени m, определенный на множестве m раз дифференцируемых функций от n-переменных:

$$Q[\omega](x) = \sum_{|k_1+\dots+k_n|\leq m} a_{k_1+\dots+k_n} \tfrac{\partial^{k_1}\omega}{\partial x_1^{k_1}}(x)\dots\tfrac{\partial^{k_n}\omega}{\partial x_n}(x),$$

где $a_\alpha = \mathrm{const}, \forall\alpha$.

Ассоциируем с Q полином

$$q(y) = \sum_{|k_1+\dots+k_n|\leq m} a_{|k_1+\dots+k_n|}(iy)^{|k_1+\dots+k_n|},$$

который называется символом Q.

Для любой функции $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ преобразованием Фурье функции $Q[\omega] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ является функция $q(y)\widehat{\omega}$. Если же символ $q(y)$ не является полиномом, то он задает оператор, который называют псевдо-дифференциальным (ПДО). Для всех $\omega \in Dom(Q)\cap\mathcal{S}(\mathbb{R})$ оператор Q выглядит следующим образом:

$$Q[\omega](x) = \tfrac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} q(x,y)e^{ixy}\widehat{\omega}(y)dy$$

Если символ q не является полиномом, то оператор Q уже не локальный оператор (т.е. для вычисления $Q[\omega]$ в точке x недостаточно знать ω в некоторой окрестности точки x). Отметим, что дифференциальные операторы являются локальными.

2.5. Задача Коши и Теорема Чернова

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial\omega}{\partial t}(t,\mathbf{x}) = L\omega(t,\mathbf{x}), \\ \omega(0,\mathbf{x}) = \omega_0(\mathbf{x}); \end{cases}$$

Здесь L - некоторый линейный оператор, действующий на функцию ω, зависящий от времени $t \geq 0$ и переменной $\mathbf{x} \in Q$, где Q - некоторое множество, которое мы будем называть конфигурационным пространством эволюционной системы, описываемой рассматриваемым уравнением.

Пусть $\mathcal{L}(X)$ - пространство всех линейных, непрерывных отображений $T : X \to X$, где X - банахово пространство, а $Dom(T) = X$ область определения оператора T.

Можно показать, что для корректно поставленной в банаховом пространстве X задачи Коши с начальным условием $\omega(0,x) = \omega_0(x)$, $\omega_0 \in Dom(L)$, ее решение представляется в виде $\omega(t,\mathbf{x}) = T_t\omega_0(\mathbf{x})$. И значит решение задачи Коши равносильно построению полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$ с заданным генератором L. Однако, как правило, полугруппу $(T_t)_{t\geq 0}$ не удается получить в явном виде, но удается различными методами ее аппроксимировать. В настоящей работе используется метод приближения, основанный на теореме Чернова.

Теорема 2.15. *(Теорема Чернова)[13] Пусть X банахово пространство, $F : [0;\infty) \to \mathcal{L}(X)$ - (сильно) непрерывное отображение такое, что $F(0) = Id$ и $\|F(t)\| \leq e^{Mt}$ для некоторой константы $M \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$. Пусть C - это линейное подпространство $Dom(F'(0))$ такое, что сужение оператора $F'(0)$ на C замыкаемо. Пусть $(L; Dom(L)) = \overline{F'(0) \restriction C}$ - соответствующее замыкание. Если $(L; Dom(L))$ - является генератором сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$, то для всех $t_0 > 0$ последовательность операторов $(F(t/n))^n\big|_{n\in\mathbf{N}}$ сходится к $(T_t)_{t\geq 0}$ при $n \to \infty$ в сильной операторной топологии равномерно по $t \in [0;t_0]$ то есть*

$$T_t = \lim_{n\to\infty}(F(t/n))^n.$$

Отметим, что производная в нуле функции $F : [0,\varepsilon) \to \mathcal{L}(X), \varepsilon > 0$ - линейное отображение $F'(0) : Dom(F'(0)) \to X$, определяемое следующим образом:

$$F'(0)x := \lim_{t\to 0+} \frac{F(t)x - F(0)x}{t};$$

где $Dom(F'(0))$ - векторное пространство элементов из X для которых данный предел существует.

Семейство операторов $(F(t))_{t\geq 0}$, для которого выполнены все условия теоремы Чернова по отношению к полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$ называется эквивалентным по Чернову полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$. Обозначается это так: $F(t) \sim T_t$.

Равенство:

$$T_t = \lim_{n\to\infty} (F(t/n))^n.$$

называется формулой Фейнмана.

Теорема 2.16. *(Формула Фейнмана для аддитивных возмущений, см.[3])*

Пусть $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ *- банахово пространство с соответствующей нормой. И пусть* $\{T_t^k\}_{t\geq 0}, k = 1,\ldots,n$ *- сильно непрерывные полугруппы на* X *с генераторами* L_k. *Т.е.* $L_k\omega = \lim\limits_{t\to 0} \frac{T_t^k\omega-\omega}{t}$, *с областью определения* $D(L_k) = \{\omega\in X : \exists \lim\limits_{t\to 0}\frac{T_t^k\omega-\omega}{t}\in X\}$. *Положим, что оператор* $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ *с областью определения* $D = \bigcap\limits_{k=1}^{n} D(L_k)$ *замыкаем, и что замыкание этого оператора является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов* $(T_t)_{t\geq 0}$ *на* X. *Пусть* $(F_k(t))_{t\geq 0}, k = 1,\ldots,m$ *- семейство операторов в* X *эквивалентных по Чернову полугруппе* $(T_t^k)_{t\geq 0}$. *Тогда семейство* $F(t) = F_1(t)\circ F_2(t)\circ\cdots\circ F_n(t)$ *эквивалентно по Чернову полугруппе* $(T_t)_{t\geq 0}$, *и имеет место формула Фейнмана:*

$$T_t = \lim_{n\to\infty} (F(t/n))^n.$$

в сильной операторной топологии, для $t\geq 0$

Определение 2.17. *Формула Фейнмана называется гамильтоновой, если для всех* $t \geq 0$ *оператор* $F(t)$ *является псевдодифференциальным оператором, то есть представим в виде:*

$$F(t)\omega(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(i(y,x))P(x,y)\widehat{\omega}(y)dy$$

Определение 2.18. *Формула Фейнмана называется лагранжевой, если для всех* $t \geq 0$ *оператор* $F(t)$ *является интегральным оператором, то есть представим в виде:*

$$F(t)\omega(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x,y)\omega(y)dy$$

Здесь $K(t,x,y)$ *- ядро интегрального оператора.*

Глава 3.

Гамильтонова Формула Фейнмана для нестационарного дифференциального уравнения четвертого порядка на прямой

В данной главе рассматривается задача Коши для нестационарного дифференциального уравнения четвертого порядка. Ее решение найдено в виде формулы Фейнмана, то есть в виде предела конечнократных интегралов.

3.1. Задача Коши для нестационарного дифференциального уравнения четвертого порядка

Будем рассматривать задачу Коши на прямой $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t}(t,x) = -A\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4}(t,x) \\ \omega(o,x) = \omega_0(x) \end{cases} \qquad (I)$$

Обозначим $X = L_2(\mathbb{R})$ - банахово пространство квадратично интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций. Норма в пространстве X определена стандартным образом: $\|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}} |f|^2(x)dx}$.

Мы предполагаем, что $\omega_0 \in X$ и $\omega(t;\cdot) \in X$ для всех $t > 0$, а также будем полагать $A > 0$.

Если функция ω принадлежит пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, то определено её преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}[\omega](y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\omega(x)dx$$

Для удобства мы будем обозначать $\mathcal{F}[\omega](y) = \widehat{\omega}(y)$. Также на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ определено обратное преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}^{-1}[\omega](y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ixy} \widehat{\omega}(y) dy$$

Допустим ω_0 и $\omega(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Применим преобразование Фурье к уравнению задачи Коши (I). Оно примет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-iyx} \frac{\partial \omega}{\partial t}(t, x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} A \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4}(t, x) dx$$

Начальные условия соответственно примут вид:$\widehat{\omega(0, \cdot)}(y) = \widehat{\omega_0}(y)$

Для функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеет место следующее свойство преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}\left[\tfrac{\partial^k \omega}{\partial x^k}\right](y) = (-iy)^k \mathcal{F}[\omega](y).$$

Тогда уравнение задачи Коши (I) примет вид:

$$\frac{\partial \widehat{w}}{\partial t} = -Ay^4 \widehat{\omega}.$$

Решая это ОДУ относительно t, получаем его общее решение в области переменной y:

$$\widehat{\omega}(y) = \exp(-Ay^4 t) C.$$

Применив обратное преобразование Фурье, с учетом начальных условий получим явное решение задачи Коши (I):

$$\omega(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp(-Ay^4 t) e^{ixy} \widehat{\omega_0}(y) dy.$$

3.2. Получение полугруппы операторов разрешающей задачу Коши (I)

Полученное решение задает зависящее от t семейство псевдо-дифференциальных операторов (ПДО), определенных для всех $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,$\forall t \geq 0$. Обозначим его $\left(H_t\right)_{t \geq 0}$, таким образом:

$$H_t[\omega](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp(-Ay^4 t) e^{ixy} \omega(y) dy,$$

,а его символ соответственно $h_t(y) = exp(-Ay^4 t)$.

Если символ ПДО зависит от одной переменной, то справедливо следующее.

Утверждение 3.1. *Пусть Q и P - ПДО с символами $p(y)$ и $q(y)$, тогда для любой $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеет место:*

$$P \circ Q[\omega](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} p(y)q(y)e^{ixy}\widehat{\omega}(y)dy$$

Доказательство. Действительно:

$$P \circ Q[\omega](x) = P\Big[Q[\omega]\Big](x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}} p(s)e^{ixs} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-isy}\Big[\int\limits_{\mathbb{R}} q(\tau)e^{iy\tau}\widehat{\omega}(\tau)d\tau\Big]dyds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} p(s)q(s)e^{ixs}\widehat{\omega}(s)ds \qquad \square$$

Заметим также, что $h_s(y)h_\tau(y) = e^{-A(s+\tau)y^4} = h_{s+\tau}(y), \forall s, \tau \in \mathbb{R}$.

Тогда верно

Предложение 3.2. *Для всех $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall t, s \geq 0$:*

(i) $H_0[\omega] = \int\limits_{\mathbb{R}} e^0 e^{i(y,\tau)}\widehat{\omega}(\tau)d\tau = \omega$,
Таким образом, $H_0 = Id$.

(ii) $H_s \circ H_\tau = H_{s+\tau}$

Предложение 3.3. *Для любого $t \geq 0$ оператор H_t отображает $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Так как $\forall \phi(x), \psi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall \alpha \geq 0$ $\exists x_0$: что при $|x| > \max(1, |x_0|)$

$\psi(x) < |x|^{-\alpha}, \phi(x) < |x|^{-\alpha}$, и вместе с тем их произведение $\psi\phi(x) < |x|^{-2\alpha} < |x|^{-\alpha}$, то при $|x| \to \infty$, $\phi\psi$ убывает быстрее $|x|^{-\alpha}$.

Производная $\big[\psi\phi\big]^{(n)}(x), n \in \mathbf{N}$, представима в виде: $\big[\psi\phi\big]^{(n)}(x) = \sum\limits_{m=1}^{n} C_n^m \psi^{(m)}\phi^{(n-m)}$, т.е. как линейная комбинация из n функций убывающих быстрее любой степени $|x|^{-1}$.

Таким образом $\exists x_0$: $|x| > \max(1, |x_0|)$: $\sum\limits_{m=1}^{n} C_n^m \psi^{(m)}\phi^{(n-m)} \leq \dfrac{M}{|x|^\alpha}$, где $M = \sum\limits_{k=1}^{n} |C_n^m|$.
Следовательно $\forall n : \exists x' = M^{1/\alpha}x_0$: $|x| > \max(1, |x'|)$: $\big[\psi\phi\big]^{(n)}(x) < \dfrac{1}{|x|^\alpha}$

Следовательно любая n-я производная произведения $\psi\phi(x)$ убывает быстрее любой степени $|x|^{-1}$.

Очевидно, что функции $\omega, e^{-Aty^4} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, а значит их произведение также принадлежит пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$\big(H_t\big)_{t\geq 0}$ можно представить соответственно:

$$\big(H_t\big)[\omega](x) = \mathcal{F}^{-1}[\exp(-Ay^4t)\widehat{\omega}(y)]$$

Так как прямое и обратное преобразование Фурье отображает $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, получаем исходное утверждение. $\square$

Тем самым показано, что семейство $\left(H_t\right)_{t\geq 0}$ обладает свойствами полугруппы и отображает $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в себя.

Множество функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ плотно в пространстве $L_p(\mathbb{R}), p \geq 1$ и $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$. В связи с этим возникает вопрос о продолжении семейства операторов $\left(H_t\right)_{t\geq 0}$ до полугруппы в этих пространствах.

Теорема 3.4. *[5] Пусть дан ПДО с символом $f(x,y)$, частные производные которого $\frac{\partial^\alpha}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial^\beta}{\partial \boldsymbol{y}}f$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$\text{Найдется такое } C > 0, \text{ такое что } \|\tfrac{\partial^\alpha}{\partial \boldsymbol{x}}\tfrac{\partial^\beta}{\partial \boldsymbol{y}}f\|_\infty \leq C, \text{ где}$$
$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbf{N}^n, \text{ а } \alpha_i = \overline{0,1}, \beta_i = \overline{0,1}$$

Тогда ПДО с символом $f(x,y)$ непрерывно отображает $L_2(\mathbb{R}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$, и ограничен по норме.

Предложение 3.5. $(H_t), t \geq 0$ *продолжается до полугруппы операторов на банаховом пространстве $L_2(\mathbb{R})$*

Доказательство. Так как для всех $t \geq 0, n \in \mathbf{N}$ символ $h_t(y) = e^{-Aty^4}$семейства операторов $\left(H_t\right)_{t\geq 0}$ удовлетворяет следующей оценке:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}h_t(y)\right\|_\infty < \infty; \ \left\|h_t(y)\right\|_\infty < \infty,$$

то по теореме 3.4 семейство операторов $\left(H_t\right)_{t\geq 0}$ продолжается до ограниченного семейства операторов на $L_2(\mathbb{R})$. При этом $\left(H_t\right)_{t\geq 0}$ сохраняет полугрупповое свойство. В самом деле, так как $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ всюду плотно в $L_2(\mathbb{R})$, то для фиксированных $\tau, s \geq 0, \forall\omega \in L_2(\mathbb{R}), \forall\varepsilon > 0 \exists\omega_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$: $\|\omega - \omega_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2M}$, где $M = \max(\|H_{s+\tau}\|, \|H_s \circ H_\tau\|)$.

Тогда $\forall\varepsilon > 0$:

$$\|H_s \circ H_\tau\omega - H_{s+\tau}\omega\| =$$
$$\|H_s \circ H_\tau\omega - H_s \circ H_\tau\omega_\varepsilon + H_s \circ H_\tau\omega_\varepsilon - H_{s+\tau}\omega_\varepsilon + H_{s+\tau}\omega_\varepsilon - H_{s+\tau}\omega\|_{L_2} \leq$$
$$\|H_s \circ H_\tau\| \cdot \|\omega - \omega_\varepsilon\| + \|H_s \circ H_\tau\omega_\varepsilon - H_{s+\tau}\omega_\varepsilon\| + \|H_{s+\tau}\| \cdot \|\omega_\varepsilon - \omega\| < \varepsilon$$

□

Таким образом $\left(H_t\right)_{t\geq 0}$ задает полугруппу операторов на $L_2(\mathbb{R})$. Следовательно для доказательства ее сильной непрерывности достаточно проверить это свойство в $t_0 = 0$.

Предложение 3.6. *Семейство операторов $\left(H_t\right)_{t\geq 0}$ сильно непрерывно (см.2.3) на $L_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Для всех $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеем:

$$\lim_{t\to 0}\Big\|H(t)[\omega]-\omega\Big\|_2 = \lim_{t\to 0}\Big\|\mathcal{F}^{-1}[(h_t\widehat{\omega})]-\mathcal{F}^{-1}[\widehat{\omega}]\Big\|_2 =$$
$$= \lim_{t\to 0}\Big\|\mathcal{F}^{-1}[(h_t-1)\widehat{\omega}]\Big\|_2 =$$
$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ixy}(e^{-Aty^4}-1)\widehat{\omega}(y)\Big|^2 dy = \lim_{t\to 0} t\|\mathcal{F}^{-1}[\psi\widehat{\omega}]\|_2 = 0$$

В самом деле, можно представить $e^{-Aty^4}-1 = (-Ay^4+t\dfrac{A^2y^8}{2}e^{-Asy^4})t = \psi(y)t$, где $s\in(0,t)$. Следовательно $\psi(y)\widehat{\omega}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Таким образом $\|\mathcal{F}^{-1}[\psi(y)\widehat{\omega}]\|_2 = \mathrm{const}$.

Теперь аналогично тому как было доказано продолжение полугруппового свойства в 3.6, можно показать, что для $\forall\omega\in L_2(\mathbb{R})$ выполнено:

$$\lim_{t\to 0}\Big\|H_t[\omega]-\omega\Big\|_2 = 0$$

□

Предложение 3.7. *Генератором полугруппы* $\big(H_t\big)_{t\geq 0}$ *служит замыкание* $(L, Dom(L))$ *оператора* $L = -A\frac{\partial^4}{\partial x^4}$*, заданного на множестве* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$*.*

Доказательство. Нам необходимо показать, что $\forall\omega\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ выполнено равенство: $\lim\limits_{t\to 0}\Big\|\dfrac{H(t)[\omega]-\omega}{t}-L\omega\Big\|_2 = 0$

Имеем:
$\lim\limits_{t\to 0}\Big\|\dfrac{H_t[\omega]-\omega}{t}-L\omega\Big\|_2 = \lim\limits_{t\to 0}\Big\|\dfrac{\mathcal{F}^{-1}[(h_t\widehat{\omega})]-\mathcal{F}^{-1}[\widehat{\omega}]}{t}-\mathcal{F}^{-1}[-Ay^4\widehat{\omega}]\Big\|_2 =$
$\lim\limits_{t\to 0}\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big[\Big(\dfrac{h_t-1}{t}-(-Ay^4)\widehat{\omega}\Big)\Big]\Big\|_2 = \lim\limits_{t\to 0} t\Big\|\mathcal{F}^{-1}[\xi\widehat{\omega}]\Big\|_2 = 0$

Здесь $\xi(y) = \dfrac{A^2y^8}{2}e^{-Asy^4}, s\in(0,t)$. Тогда $\xi(y)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Следовательно $\xi(y)\widehat{\omega}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Таким образом $\|\mathcal{F}^{-1}[\xi(y)\widehat{\omega}]\|_2 = \mathrm{const}$. □

Таким образом для любой функции $\omega_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\subset Dom(L)$ функция ω, определенная следующим образом:

$$\omega(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\exp(-Ay^4t)e^{ixy}\widehat{\omega_0}(y)dy \qquad (\diamond),$$

является решением задачи Коши (I). При этом $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = Cor(L)$, т.е. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ является существенной областью определения оператора $(L, Dom(L))$, где $(L, Dom(L))$ замыкание оператора $(-A\frac{d^4}{dx^4}, S(R))$.

Следовательно для любой функции $\omega_0\in L_2(\mathbb{R})$, функция ω, определенная по формуле $(\diamond)$ является элементом $L_2(\mathbb{R})$. Будем называть ее решением (mild solution [2]) задачи Коши (I).

3.3. Вывод гамильтоновой формулы Фейнмана для нестационарного дифференциального уравнения четвертого порядка на прямой

Будем рассматривать задачу Коши (I). И построим для нее гамильтонову Формулу Фейнмана. Пусть $R(\lambda, L)$ - резольвента оператора L.

Теорема 3.8. *[1] Для любой сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$ на банаховом пространстве X с генератором $(L, Dom(L))$, имеет место равенство:*

$$T_t x = \lim_{n\to\infty} \Big[n/tR(n/t, L)\Big]^n x = \lim_{n\to\infty} \Big[Id - \tfrac{t}{n}L\Big]^{-n} x, \qquad x \in X.$$

Обозначим $E_t = (Id - tL)^{-1}$ и представим E_t в виде интегрального оператора с некоторым ядром. Найдем ядро с помощью фундаментального решения оператора $Id - tL$

В рассматриваемой нами задаче Коши (I) оператор $L = -A\frac{\partial^4}{\partial x^4}$.

Тогда:

$$(I - tL)\mathcal{E}_t = \delta, \text{ или } (I + tA\tfrac{\partial^4}{\partial x^4})\mathcal{E}_t = \delta,$$

здесь δ - функция Дирака.

Используя преобразование Фурье получим:

$$\widehat{\mathcal{E}_t}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 + tAy^4)}$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получим:

$$\mathcal{E}_t(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixy}}{1 + tAy^4} dy$$

Тогда по свойствам преобразования Фурье [15] получим следующий результат:

$$E_t[\omega_0](x) = (Id - tL)^{-1}[\omega_0](x) = \mathcal{E}_t * \omega_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixy}\widehat{\omega_0(y)}}{1 + tAy^4} dy$$

Заметим, что $(E_t)_{t\geq 0}$ — семейство ПДО; обозначим символ оператора E_t как: $e_t(y) = \dfrac{1}{1 + Aty^4}$.

Предложение 3.9. *$(E_t)_{t\geq 0}$ продолжается до ограниченного по норме семейства операторов из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Функция $e_t(y)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.4. В самом деле:

$$\|e_t(y)\|_\infty < \infty, \|\tfrac{\partial}{\partial y} e_t(y)\|_\infty < \infty.$$

Согласно этой теореме 3.4 следует исходное утверждение. $\square$

Теорема 3.10. *Решение задачи Коши (I), $\omega(t,x)$ для $\forall \omega_0 \in L_2(\mathbb{R})$ представимо в виде гамильтоновой Формулы Фейнмана:*

$$\omega(t,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}} \dots \int\limits_{\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{t}{n}Au_k^4} e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(v_k - v_{k-1})} \omega_0(v_n) dv_1 du_1 \dots dv_n du_n,$$

где $x = v_0$

Доказательство. Это следует из предложения 3.9, и теоремы 3.8. $\square$

Глава 4.

Лагранжева Формула Фейнмана для нестационарного дифференциального уравнения четвертого порядка на прямой с потенциалом

Представим оператор $E_t = (Id - tL)^{-1}$ в виде виде оператора свёртки с функцией $\mathcal{E}_t$.

Найдем сначала $\mathcal{E}_t(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{e^{ixy}}{1+tAy^4}dy$.

Находим интеграл с использованием вычетов. Подинтегральная функция имеет 4 полюса:

$$y_{1,2} = \tfrac{1}{(tA)^{\frac{1}{4}}}\Big(\tfrac{\sqrt{2}}{2} \pm i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\Big),\ y_{3,4} = \tfrac{1}{(tA)^{\frac{1}{4}}}\Big(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} \pm i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\Big),\ \text{тогда}$$

$$\mathcal{E}_t(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixy}}{1+(tA)y^4}dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixy}}{(tA)\big(\frac{1}{(tA)}+y^4\big)}dy =$$

$$=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{e^{ixy}}{(tA)\Big(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})\Big)\Big(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})\Big)\Big(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})\Big)\Big(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})\Big)}dy$$

Лемма 4.1. *[16] (Лемма Жордана) Пусть функция $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа точек. Если $|f| \to 0$ равномерно относительно $arg(z) : (0 \le arg(z) \le \pi)$ при $|z| \to \infty$ на контурах дуг полуокружности $|z| = R$ в верхней полуплоскости Ω^* и Ω_* в нижней полуплоскости, то имеет место равенство:*

при $x > 0$:

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\Omega^*} e^{ixz}f(z)dz = 0.$$

при $x < 0$:

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\Omega_*} e^{ixz}f(z)dz = 0.$$

Тогда по теореме о вычетах [16] и 4.1 при положительном направлении обхода контура γ имеет место равенство:

$$\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\gamma}\frac{e^{ixz}}{1+(tA)z^4}dz = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^*}\frac{e^{ixz}}{1+(tA)z^4}dz + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{ixz}}{1+(tA)z^4}dz =,$$

$$\text{и при } R\to\infty = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixz}}{1+(tA)z^4}dz = i\sum_i res_i\Big(\frac{e^{ixy}}{1+(tA)y^4}\Big)$$

где $\gamma = [-R,R]\bigcup\Omega^*$

При $x>0$ внутри контура интегрирования лежат полюсы $y_{1,3}$, при $x<0$ - полюсы $y_{2,4}$

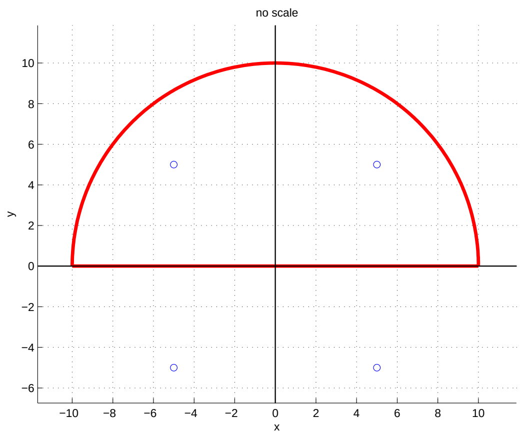


Рис. 4.1. $x>0$

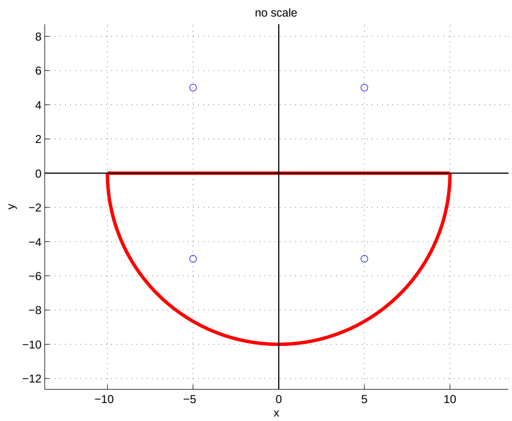


Рис. 4.2. $x<0$

Следовательно для $x>0$ имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixz}}{1+(tA)z^4}dz =$$

$$= i\Bigg(\frac{e^{ixy}}{(tA)\big(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})\big)\big(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2})\big)\big(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})\big)}\Bigg|_{y=\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)} +$$

$$+\frac{e^{ixy}}{(tA)\big(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2})\big)\big(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})\big)\big(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})\big)}\Bigg|_{y=\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}\Bigg) =$$

$$= i\left(\frac{e^{ix\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}}{(tA)^{\frac14}\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}-(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}-(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2})\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}-(-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{ix\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}}{(tA)^{\frac14}\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}-(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2})\right)\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}-(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})\right)\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}-(-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})\right)}\right)=$$

$$= i\left(\frac{e^{ix\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}\left(1+i\right)}}{(tA)^{\frac14}\left(i\sqrt2\sqrt2\sqrt2(1+i)\right)}+\frac{e^{ix\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}\left(-1+i\right)}}{(tA)^{\frac14}\left(-\sqrt2\sqrt2(-1+i)i\sqrt2\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt2(tA)^{\frac14}}\left(\frac{e^{x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}\left(-1+i\right)}}{(1+i)}+\frac{e^{x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}\left(-1-i\right)}}{-(-1+i)}\right)=\frac{e^{-x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}}}{2\sqrt2(tA)^{\frac14}}\left(\frac{e^{x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}i}}{(1+i)}+\frac{e^{-ix\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}}}{(1-i)}\right)=$$

$$=\frac{e^{-x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}}}{2\sqrt2(tA)^{\frac14}}\left(\frac{e^{x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}i}(1-i)+e^{-ix\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}}(1+i)}{2}\right)=$$

$$=\frac{e^{-x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}}}{2\sqrt2(tA)^{\frac14}}\left(\frac{e^{x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}i}+e^{-ix\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}}+i(e^{-x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}i}-e^{ix\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}})}{2}\right)$$

$$=\frac{e^{-\frac{x\sqrt2}{2(tA)^{\frac14}}}}{2\sqrt2(tA)^{\frac14}}\left(\frac{2\cos\frac{x\sqrt2}{2(tA)^{\frac14}}-i2i\sin\frac{x\sqrt2}{2(tA)^{\frac14}}}{2}\right)=\frac{e^{-\frac{x\sqrt2}{2(tA)^{\frac14}}}}{2\sqrt2(tA)^{\frac14}}\left(\cos\frac{x\sqrt2}{2(tA)^{\frac14}}+\sin\frac{x\sqrt2}{2(tA)^{\frac14}}\right)$$

Соответственно для $x<0$, с учетом направления обхода контура, имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixz}}{1+(tA)z^4}dz=$$

$$=-i\left(\left.\frac{e^{ixy}}{(tA)\left(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2})\right)\left(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2})\right)\left(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})\right)}\right|_{y=\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\left(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}\right)}+\right.$$

$$\left.+\left.\frac{e^{ixy}}{(tA)\left(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2})\right)\left(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})\right)\left(y-\frac{1}{(tA)^{1/4}}(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2})\right)}\right|_{y=\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\left(-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}\right)}\right)=$$

$$=-i\left(\frac{e^{ix\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\left(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}\right)}}{(tA)^{\frac14}\left(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}-(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2})\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}-(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2})\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}-(-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{ix\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\left(-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}\right)}}{(tA)^{\frac14}\left(-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}-(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2})\right)\left(-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}-(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})\right)\left(-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}-(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2})\right)}\right)=$$

$$= -i\left(\frac{e^{ix\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}\left(1-i\right)}}{(tA)^{\frac14}\left(-i\sqrt2\sqrt2\sqrt2(1-i)\right)} + \frac{e^{ix\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}\left(-1-i\right)}}{(tA)^{\frac14}\left(\sqrt2\sqrt2(-1-i)i\sqrt2\right)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt2(tA)^{\frac14}}\left(\frac{e^{x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}\left(1+i\right)}}{(i-1)} - \frac{e^{x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}\left(1-i\right)}}{(1+i)}\right) =$$

$$= -\frac{e^{x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}}}{2\sqrt2(tA)^{\frac14}}\left(\frac{-(1+i)e^{x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}i}}{(1-i)(1+i)} - \frac{(1-i)e^{-ix\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}}}{(1+i)(1-i)}\right) =$$

$$= -\frac{e^{x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}}}{2\sqrt2(tA)^{\frac14}}\left(\frac{-e^{x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}i} - e^{-ix\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}} + i(e^{-x\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}i} - e^{ix\frac{1}{(tA)^{\frac14}}\frac{\sqrt2}{2}})}{2}\right) =$$

$$= -\frac{e^{\frac{x\sqrt2}{(2tA)^{\frac14}}}}{2\sqrt2(tA)^{\frac14}}\left(\frac{-2\cos\left(x\frac{x\sqrt2}{(2tA)^{\frac14}}\right) - i2i\sin\left(x\frac{x\sqrt2}{(2tA)^{\frac14}}\right)}{2}\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{x\sqrt2}{2(tA)^{\frac14}}}}{2\sqrt2(tA)^{\frac14}}\left(\cos\left(\frac{x\sqrt2}{2(tA)^{\frac14}}\right) - \sin\left(\frac{x\sqrt2}{2(tA)^{\frac14}}\right)\right)$$

Обозначим $C = \frac{\sqrt2}{2(tA)^{\frac14}}$. Введем семейство интегральных операторов $(G_t)_{t\geq0}$ такое, что для любой $\omega_0 \in L_2(\mathbb{R})$ имеем :

$$G_t[\omega](x) = \big(\mathcal{E}_t * \omega_0\big)(x) = \big(\omega_0 * \mathcal{E}_t\big)(x) =$$

$$= \frac{C}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{Cy}\Big(\cos Cy - \sin Cy\Big)\omega_0(x-y)dy + \frac{C}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-Cy}\Big(\sin Cy + \cos Cy\Big)\omega_0(x-y)dy\Bigg) =$$

$$= \frac12\int_{-\infty}^{0} e^{z}\Big(\cos z - \sin z\Big)\omega_0(x-\frac{z}{C})dz + \frac12\int_{0}^{+\infty} e^{-z}\Big(\sin z + \cos z\Big)\omega_0(x-\frac{z}{C})dz =$$

$$= \frac{C}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-C|y|}\Big(\cos C|y| + \sin C|y|\Big)\omega_0(x-y)dy = \frac12\int_{\mathbb{R}} e^{-|z|}\Big(\cos|z| + \sin|z|\Big)\omega_0(x-\frac{z}{C})dz$$

Согласно теореме 3.8 $(G_t)_{t\geq0}$ эквивалентно по Чернову полугруппе $\big(H_t\big)_{t\geq0}$, разрешающей исходную задачу Коши (I). В итоге решение задачи Коши (I) для $\forall\omega_0 \in L_2$ может быть получено с помощью лагранжевой формулы Фейнмана:

$$\omega(t,x) = \lim_{n\to\infty}\Big[G_{t/n}\Big]^n[\omega_0](x) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\dots\int_{\mathbb{R}}}_{n} e^{\sum\limits_{k=1}^{n}-|u_k|}\prod_{k=1}^{n}\Big(\cos|u_k| + \sin|u_k|\Big)\omega_0\Big(u_{n+1} - \sqrt2(A(t/n))^{1/4}\sum_{k=1}^{n}u_k\Big)du_1\dots du_n,$$

где $x = u_{n+1}$

Глава 5.

Техника построения формул Фейнмана для аддитивных возмущений полугрупп операторов

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t}(t,x) = -A\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4}(t,x) + V(x)\omega(t,x) \\ \omega(o,x) = \omega_0(x) \end{cases} \qquad (II)$$

где $V(x)$ - ограниченная и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция.

Оператор умножения на функцию V можно рассматривать как ограниченное аддитивное возмущение оператора $L = -A\frac{\partial^4}{\partial x^4}$. Пусть оператор $\widetilde{L} = L + V$, с областью определения $Dom(\widetilde{L}) = Dom(L)$. Тогда оператор $(\widetilde{L}, Dom(\widetilde{L}))$ снова является генератором некоторой сильно непрерывной полугруппы $(F_t)_{t\geq 0}$ на $L_2(\mathbb{R})$.

Предложение 5.1. *Предположим, что $\forall t \geq 0$ выполнена оценка:*

$$\|H_t\| \leq 1, \text{ т.е. полугруппа } (H_t)_{t\geq 0} \text{ - сжимающая,}$$

, тогда $\forall t \geq 0$ выполнено:

$$\|G_t\| \leq 1.$$

Доказательство. Действительно по теореме 2.14:

$$\|G_t\| = \|\frac{1}{t}R_{1/t}(L)\| \leq \frac{1}{t}\frac{1}{\frac{1}{t}} = 1$$

□

Теорема 5.2. *Пусть $\left(H_t\right)_{t\geq 0}$ - полугруппа, разрешающая задачу Коши (I). Допустим, что $\|H_t\| \leq 1, \forall t \geq 0$. Тогда семейства операторов $\left(e^{tV} \circ H_t\right)_{t\geq 0}$, $\left(e^{tV} \circ E_t\right)_{t\geq 0}$, $\left(e^{tV} \circ G_t\right)_{t\geq 0}$*

эквивалентны по Чернову полугруппе $\left(F_t\right)_{t\geq 0}$, разрешающей задачу Коши (II). Здесь e^{tV} - это оператор умножения на функцию $e^{tV(x)}$.

Утверждение теоремы следует из теоремы 2.16 об аддитивных возмущениях.

В итоге в работе получены следующие формулы Фейнмана:

$\forall \omega_0 \in L_2(\mathbb{R})$

(i) $\omega(t,x) =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} \dots \int\limits_{\mathbb{R}}}_{2n} \exp\Big[(t/n)\sum_{k=1}^{n}(-Au_k^4 + V(v_k))\Big] e^{iu_k(v_k - v_{k-1})}\omega_0(v_n)du_1dv_1\dots du_ndv_n,$$

где $x = v_0$

(ii) $\omega(t,x) =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} \dots \int\limits_{\mathbb{R}}}_{2n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{t}{n}Au_k^4} \exp\Big[\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} V(v_k)\Big] e^{iu_k(v_k - v_{k-1})}\omega_0(v_n)du_1dv_1\dots du_ndv_n,$$

где $x = v_0$

(iii) $\omega(t,x) =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} \dots \int\limits_{\mathbb{R}}}_{n} e^{\sum\limits_{k=1}^{n} -|v_k|} \prod_{k=1}^{n}\Big(\cos|v_k| + \sin|v_k|\Big) \exp\Big[\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} V(v_k)\Big] \times$$

$$\times\, \omega_0\Big(v_{n+1} - \sqrt{2}(A(t/n))^{1/4}\sum_{k=1}^{n} v_k\Big)dv_1\dots dv_n,$$

где $x = v_{n+1}$

Замечание 5.3. *Равенства в полученных формулах Фейнмана (обозначим допредельные выражения в правых частях формул Фейнмана как $\Psi_n(t,x)$) следует понимать в смысле пространства $L_2(\mathbb{R})$, то есть как:*

$$\lim_{n\to\infty} \|\omega(t,x) - \Psi_n(t,x)\|_2 = 0$$

Замечание 5.4. *Как следует из результатов работы [4] Гамильтонова формула Фейнмана (i) может быть интерпретирована как интеграл Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве. Следовательно справедливо следующее представление полугруппы $(F_t)_{t\geq 0}$ с помощью интеграла Фейнмана:*

$$\omega(t,x) = F_t[\omega_0](x) = \int\limits_{E_t^x} e^{-A\int\limits_0^t p^4(\tau)d\tau}\omega_0(q(t))\Phi_1^x(dqdp) \qquad (**),$$

где пространство E_t^x и псевдомера Фейнмана Φ_1^x определены в работе [4].

Интеграл Фейнмана в формуле $(**)$ может быть вычислен для $\forall\omega \in L_2(\mathbb{R})$ с помощью Лагранжевой формулы Фейнмана (iii).

Глава 6.

Численное моделирование

В этой главе продемонстрирован результат работы метода получения формул Фейнмана на примере полученной лагранжевой формулы Фейнмана для задачи Коши (I).

Алгоритм реализован в среде MATLAB. Далее можно увидеть непосредственное полученое приближение решения задачи Коши (I). Также оценить скорость сходимости метода. Он согласуется с теоретическими данными о том, что скорость сходимости метода $\approx O(x^{-1})$ (см. работы Ю.Н. Орлова, В.Ж. Сакбаева, О.Г. Смолянова). Необходимые пояснения к алгоритму присутствуют в листинге программы.

Рассмотрим модельный пример: $\measuredangle$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t}(t,x) = -A\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4}(t,x) + V(x)\omega_0(t,x) \\ \omega(o,x) = \omega_0(x) \end{cases}$$

Данные модельного примера:

$$\text{A=3; } \omega_0(0,x) = e^{(-0.01x^4)}\sin(\tfrac{5}{2} - x), t \in [0,1]$$

На следующих изображениях можно увидеть динамику процесса описываемого нестационарным уравнением четвертого порядка при заданных параметрах.

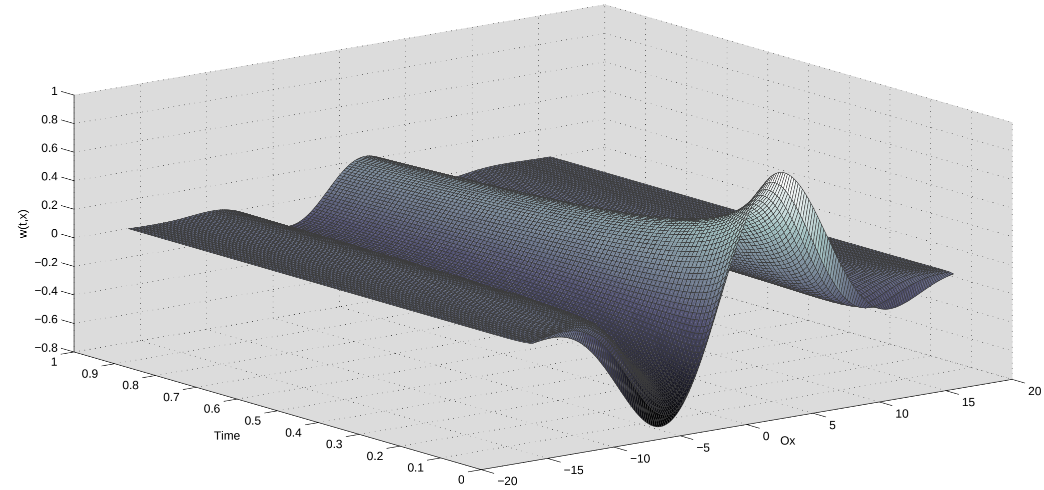


Рис. 6.1. Результат моделирования. $V(x) = 0$, Ось O_x – без масштаба.

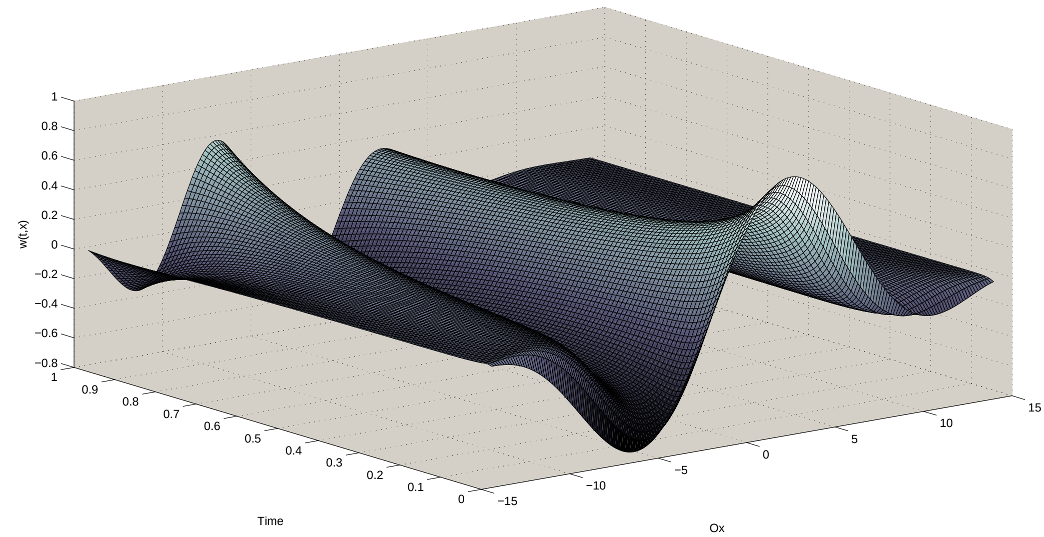


Рис. 6.2. Результат моделирования:$V(x) = \dfrac{-10x}{1 + (4 + x)^2}$, Ось O_x – без масштаба.

На следующих изображениях можно увидеть графики функций из допредельных выражений формулы Фейнмана:

$$\Psi_n(t,x) =$$

$$= \frac{1}{2^n}\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}}\dots\int\limits_{\mathbb{R}}}_{n} e^{\sum\limits_{k=1}^{n}-|v_k|}\prod_{k=0}^{n}\Big(\cos|v_k|+\sin|v_k|\Big)\exp\left[\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n}V(v_k)\right]\omega_0\Big(v_{n+1}-\sqrt{2}(A(t/n))^{1/4}\sum_{k=1}^{n}v_k\Big)dv_1...dv_n,$$

для $n=\overline{1,50}$, при фиксированном значении t.

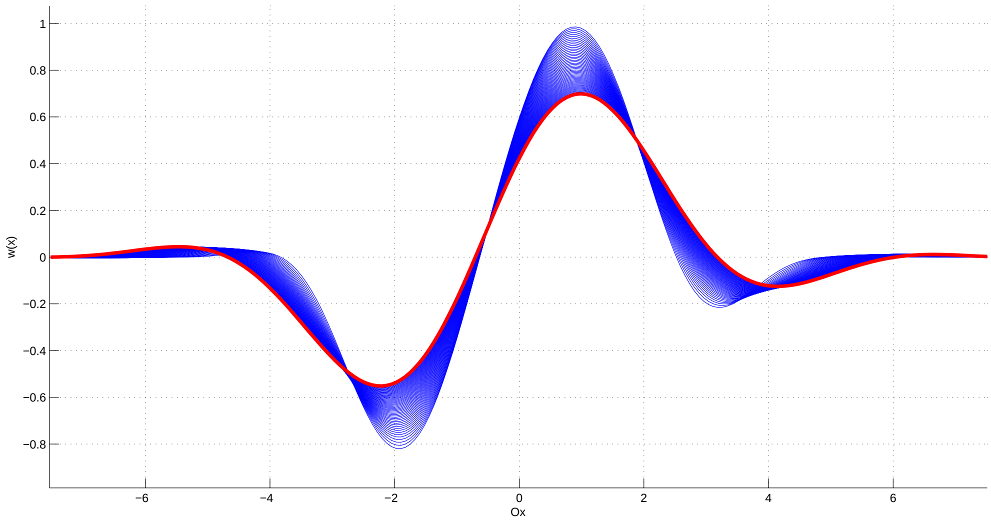


Рис. 6.3. Результат моделирования: Красной линией изображен график $\Psi_{50}(t_0,x)$, $t_0 = 0.1$.

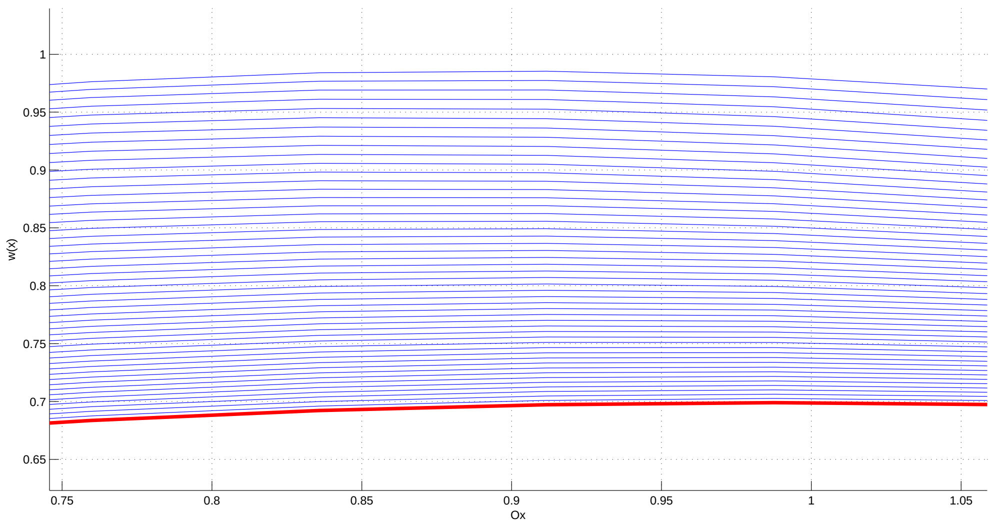


Рис. 6.4. Результат моделирования: то же, что на рис 6.3, с увеличением.

На этом графике изображена величина:

$$d(k) = \|\Psi_k(t_0, x) - \Psi_{k-1}(t_0, x)\|_2, k = \overline{2, 50}, t_0 = 0.1.$$

Эта величина отражает скорость сходимости метода.

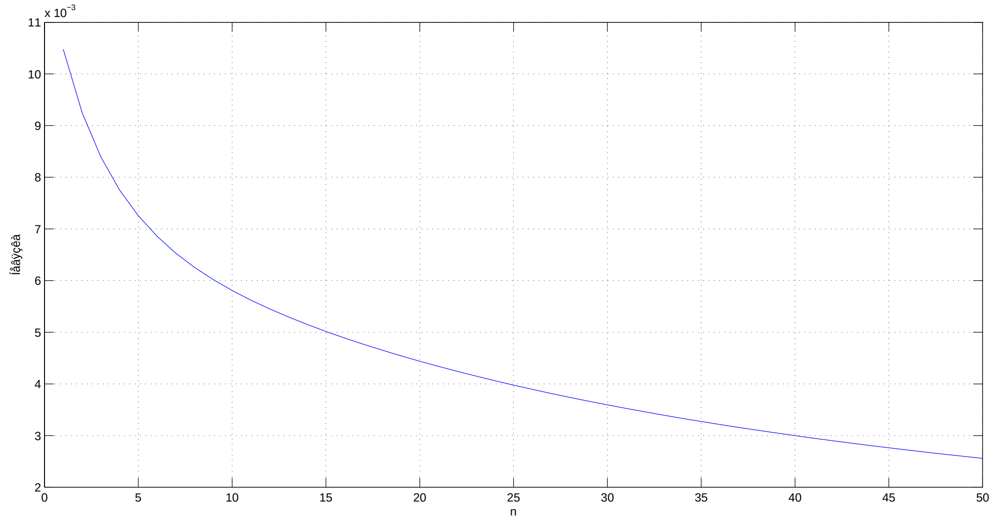


Рис. 6.5. Результат моделирования: $t_0 = 0.1$

Листинг программы в среде MATLAB

```
function formulamodel()
syms x;
% Ввод исходных данных задачи
Data = sym(inputdlg([{'Коэффициент A:'} {'Отрезок ab(симметричен), начало'}...
    {'Разбиений отрезка:'} {'Временной шаг:'} {'Количество шагов по времени'}...
    {'Сечение для анализа'} {'Количество интегралов ФФ, n:'} ...
A=double(Data(1));
abI(1)=double(Data(2));
abI(2)=double(-abI(1));
n=double(Data(3));
ht=double(Data(4));
tk=double(Data(5));
section=double(Data(6));
kint=double(Data(7));
omeganull=sym(Data(8));
M=2*n+1;
hI=(abI(2)-abI(1))/(2*n);
YI=abI(1):hI:abI(2);
t=0.01;  % Начальный момент времени моделирования
for k=1:1:tk
    C=(1/sqrt(2))*((A*(t/kint))^(-1/4)); % Коэффициент, зависящий от времени
    ab=(1/C)*abI;   % Динамический пересчет отрезка интегрирования
    h=(ab(2)-ab(1))/(2*n);
    Y=ab(1):h:ab(2);
    len=length(Y);
    for l=1:1:len   % Инициализация начальных условий
        omega(l)=double(subs(omeganull,Y(l)));
    end
    d=omega;  % d - вспомогательная величина для расчета сходимости
    err=zeros(1,kint);  % Разность двух промежуточных функций в ф-ле Фейнмана
```

```
    if (k==section)
        hold on;end
    for j=1:1:kint
        hold on;
        % Цикл рассчитывающий интеграл - как функцию от x
        for i=1:1:M
            argker=Y(i)-Y; % Пересчет аргумента - сдвиг для свертки функций
            % Циклы вычисления подинтегральной функции
            for l=1:1:len
                ker(l) = (C/2)*exp(-C*abs(argker(l)))*
                *(sin(C*abs(argker(l)))+cos(C*abs(argker(l))));
            end
            for m=1:1:len
                fx(m)=ker(m)*omega(m);
            end
            quadfx(i)=simpson(h,fx,n);  % Вычисление интеграла в фикс. т. x и t
        end
        omega=quadfx;  % Переопределение функции омега
        % Графический вывод функциональной сходимости
        if (k==section)
        plot(Y,quadfx);end
        % Вычисление скорости сходимости через норму L_2 разности двух
        % промежуточных функций
        d=d-quadfx;
        for l=1:1:len
           err(j)=err(j)+d(l)*d(l)*ht;
        end
        err(j)=sqrt(err(j));
        d=quadfx;
    end
    if (k==section)
        figure()
        plot(1:1:kint,err); % Вывод показателя сходимости
    end
t=t+ht; % Переход на следующий временной шаг
Z(k,:)=quadfx;
end
% Вывод полученного решения на экран
```

```
tI=1:1:tk;
tI=ht*tI;
[ZX,ZY] = meshgrid(YI,tI);
figure()
surf(ZX,ZY,Z);
end
% Функция интегрирования по Симпсону
function s = simpson( h,f,n )
% h - шаг интегрирования
% f - вектор значений функции
% n - число разбиений
s1=0;
s2=0;
for k=1:n
    s1=s1+f(2*k-1);
end
for k=1:(n-1)
    s2=s2+f(2*k);
end
s=h*(f(1)+f(2*n+1)+4*s1+2*s2)/3;
end
```

Глава 7.

Заключение

В работе рассмотрено эволюционное уравнение, содержащее производную четвертого порядка по пространственной переменной. В работе доказано существование сильно непрерывной полугруппы на пространстве $L_2(\mathbb{R})$, разрешающей задачу Коши для рассмотренного уравнения. Получены гамильтонова и лагранжева формулы Фейнмана для решения этой задачи Коши. При некоторых дополнительных предположениях получены гамильтоновы и лагранжева формулы Фейнмана для нестационарного уравнения четвертого порядка с дополнительными слагаемыми (потенциалом) в правой части. Надо отметить, что лагранжевы формулы Фейнмана удобны для численного моделирования решений эволюционных уравнений, в то время как гамильтоновы формулы Фейнмана связаны с интегралами Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве квантовой системы. Такие интегралы являются важными объектами квантовой физики.

В работе также проведено численное моделирование полученных формул Фейнмана, запрограммирован соответствующий алгоритм в комплексе программ MATLAB. В работе проведены соответствующие эксперименты на ряде модельных задач и получены экспериментальные данные скорости работы метода.

Литература

[1] K-J. Engel, R. Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations
— Springer, 1995.

[2] A.Pazy, Semigroups of linear operators and Applications to partial differential equation.
— Springer-Verlag, 1983.

[3] Yana A. Butko, Rene Schilling, And Oleg G. Smolyanov, Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations
— Preprint, 2011.

[4] Björn Böttcher, Yana A. Butko, Rene Schilling, And Oleg G. Smolyanov, Feynman formulae and path integrals for some evolution semigroups related to τ-Quantization
— Rus. J. Math. Phys.,Vol. 18, N. 4, p.381-399, PleiadesPublishing Ltd, 2011.

[5] I. L. Hwang, The L_2-Boundedness of Pseudodifferential Operators.
— American Mathematical Society,http://www.jstor.org/stable/2000896, 2010.

[6] Smolyanov O.G., Weizsäcker H.v. and Wittich O., Difusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures.
— Doklady Math. 61 (2000), 230-234.

[7] Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A., Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula.
— J. Math. Phys. 43 N 10 (2002), 5161-5171.

[8] Smolyanov O.G., Weizsäcker H. v., Wittich O., Brownian Motion on a Manifold as Limit of Stepwise Conditioned Standard Brownian Motions.
— In: Stochastic Proceses, Physics and Geometry: New Interplays. II: A Volume in Honor of Sergio Albeverio. Ser. Conference Proceedings. Canadian Math. Society. Providence: AMS. 29 (2000), 589-602.

[9] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. v., Wittich O., Chernoff's theorem and the construction of semigroups. Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and

Economics.
— Proc. 7th Intnl. Conf. Evolution Eqs and Appl., Levico Terme, Italy, Oct./Nov. 2000. Birkhäauser, Prog. Nonlinear Dier. Eq. Appl. 55, Basel 2003, 349-358.

[10] Smolyanov O.G., Weizsäcker H.v., Wittich O., Surface Measures and Initial Boundary Value Problems Generated by Diffusions with Drift.
— Doklady Math. 76 N 1 (2007), 606-610.

[11] Бутко Я.А., Формулы Фейнмана и функциональные интегралы для диффузии со сносом в области многообразия,
— Мат. Заметки, 83 N 3 (2008), 333-349.

[12] Бутко Я.А., Смолянов О.Г., Шиллинг Р.Л., Формулы Фейнмана для феллеровских по- лугрупп,
— Доклады РАН, 434 N 1 (2010), 7-11.

[13] В.И. Богачев, О.Г.Смолянов. Действительный и функциональный анализ. Университетский курс.
— Москва, Ижевск, 2009.

[14] М.Рид, Б.Саймон, Методы современной математической физики. Том 1,2.
— Издательство "Мир Москва 1977.

[15] В.А. Зорич, Математический анализ, часть II.
— МЦНМО, Москва 2002.

[16] А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов, Теория функций комплексной переменной.
— из серии Курс высшей математики и математической физики. Выпуск 4.