Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Р А С Ч Ё Т Н О - П О Я С Н И Т Е Л Ь Н А Я З А П И С К А

к квалификационной работе бакалавра на тему:

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Студент ______________ Андрей Владимирович Дурягин
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Руководитель квалификационной работы ______________ Яна Анатольевна Бутко
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Москва, 2010

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ________
(Индекс)

________________ ______________
(И.О.Фамилия)

« ___ » ____________ 20 __ г.

К А Л Е Н Д А Р Н Ы Й   П Л А Н

выполнения квалификационной работы бакалавра

Студент __ДУРЯГИН АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ____
(Фамилия, имя, отчество)

___ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА __И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ____
(Тема квалификационной работы)

№ п/п	Наименование этапов квалификационной работы	Выполнение этапов		Примечание
		Срок	Объем, %	
1.	Обзор литературы	01.09.09	**3%**	
2.	Вывод гамильтоновой формулы Фейнмана для параболического уравнения второго порядка. Задача Коши.	03.10.09	48%	
3.	Вывод гамильтоновой формулы Фейнмана для параболического уравнения второго порядка. Задача Коши-Дирихле.	03.11.09	35%	
4.	Разработка алгоритма для вычисления решения задачи Коши-Дирихле для параболического уравнения второго порядка по формулам Фейнмана.	20.11.09	82%	
5.	Проведение вычислительных экспериментов.	15.12.09	90%	
6.	Оформление диплома.	14.01.10	95%	
7.	Оформление презентации.	01.02.10	98%	
8.	Подготовка к защите.	09.02.10	100%	

Руководитель квалификационной работы __________________ Яна Анатольевна Бутко_
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Студент ____________________ Андрей Владимирович Дурягин
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ________
(Индекс)

________________ ________________
(И.О.Фамилия)

« ___ » ____________ 20 __ г.

З А Д А Н И Е
на выполнение квалификационной работы бакалавра

Студент ________ДУРЯГИН АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ________________________________
(Фамилия, имя, отчество)

_____ ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА __И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ____
(Тема квалификационной работы)

Источник тематики (НИР кафедры, заказ организаций и т.п.)__НИР кафедры________________

Тема квалификационной работы утверждена распоряжением по факультету № ____
от « ___ » _____________ 20__ г.

1. Научно-исследовательская часть

_Получение гамильтоновых формул Фейнмана, представляющих решения задач Коши и Коши-Дирихле для параболического уравнения второго порядка. Применение формулы Фейнмана для численного решения задачи Коши-Дирихле для параболического уравнения второго порядка.____

2. Проектно-конструкторская часть

_Задача не ставилась____

3. Технологическая часть

Разработка в среде MATLAB вычислительного алгоритма, реализующего решение задачи Коши-Дирихле для параболического уравнения второго порядка по формуле Фейнмана. Применение разработанного алгоритма для решения модельных задач, сравнение результатов с результатами, полученными другими методами. Проведение вычислительных эксперементов.

4. Оформление квалификационной работы

4.1. Расчетно-пояснительная записка на ___ листах формата А4.

4.2. Перечень графического материала (плакаты, схемы, чертежи и т.п.) включены в расчетно-пояснительную записку

Дата выдачи задания « ___ » ____________ 20__ г.

В соответствии с учебным планом квалификационную работу выполнить в полном объеме в срок до « ___ » ____________ 20__ г.

Руководитель квалификационной работы __________________ Яна Анатольевна Бутко
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Студент _________________________ Андрей Владимирович Дурягин
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Примечание:

1. Задание оформляется в двух экземплярах; один выдаётся студенту, второй хранится на кафедре.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА
(МГТУ им. Н.Э.Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

ДУРЯГИН АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалавра математики

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук, доцент Я.А. Бутко

Москва — 2010

Оглавление

Введение

Формулами Фейнмана называются представления решений начальных и начально-краевых задач для эволюционных дифференциальных и псевдо-дифференциальных уравнений в виде пределов конечнократных интегралов от элементарных функций, зависящих от коэффициентов уравнения и начально-краевых условий. Конечнократные интегралы в формулах Фейнмана являются аппроксимациями функциональных интегралов по некоторым мерам гауссовского или фейнмановского типа на множестве траекторий в тех областях, на которых рассматриваются уравнения. Представления решений эволюционных уравнений с помощью функциональных интегралов обычно называются формулами Фейнмана-Каца. Подобные представления полезны для исследования характера решений эволюционных уравнений, в том числе и методами стохастического анализа. В то же время, собственно формулы Фейнмана можно использовать для непосредственных вычислений решений рассматриваемых уравнений. Метод получения формул Фейнмана (а, следовательно, и формул Фейнмана-Каца) для эволюционных уравнений был предложен в работах О.Г.Смолянова и его соавторов в 1999- 2003 г.г. [см.[STT],[SWW1],[SWW2],[SWW4],[SWW5],[SWW6]] Этот метод был развит Бутко Я.А.[см.[БГС]] для исследования уравнений диффузии и Шрёдингера на римановом многообразии. Данный метод является принципиально новым и позволяет получать формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца для обширного класса эволюционных уравнений на различных геометрических структурах. Для большинства таких уравнений функциональные интегралы ранее не рассматривались, что, по-видимому, объясняется тем, что переходные вероятности диффузионных процессов, порождаемых такими уравнениями, не выражаются через элементарные функции. В настоящем исследовании вместо этих переходных вероятностей используются их аппроксимации, выражающиеся через элементарные функции, что позволяет получать формулы Фейнмана, пригодные для непосредственных вычислений.

В настоящей работе получено представление решения задачи Коши и Коши-Дирихле для параболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, зависящими от координаты в виде гамильтоновой формулы Фейнмана. Кроме того, в работе представлен програмный алгоритм, позволяющий использовать полученные формулы для численного решения соответствующих начальных и начально-краевых задач для параболического уравнения второго порядка.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Список обозначений

$\mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R})$-пространство бесконечно дифференцируемых функций на $(\mathbb{R})$.

$\mathbf{S}(\mathbb{R})$-пространство Шварца, т.е. пространство функций $\varphi(x) \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, таких что $\lim\limits_{|x|\to\infty} \varphi(x)|x|^n = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

$\mathbf{C}_{\infty}(\mathbb{R})$-пространство непрерывных функций на $(\mathbb{R})$, таких что $\lim\limits_{|x|\to\infty} \varphi(x) = 0$

$\mathbf{C_0}(\overline{G})$ пространство непрерывных на $\overline{G}$ функций, обращающихся в ноль на границе.

$\mathbf{C_c}(\mathbb{R})$ пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, с компактным носителем.

$\mathbf{C_c^{\infty}}(\mathbb{R})$ пространство бесконечно дифференцируемых функций, с компактным носителем.

$\mathrm{Dom}(\cdot)$-область определения оператора.

$\mathrm{Ran}(\cdot)$-область значений оператора.

$\mathrm{Cor}(\cdot)$-существенная область определения оператора.

$||\cdot||$-Норма пространства.

$L(X_1, X_2)$-пространство непрерывных линейных операторов из X_1 в X_2, где X_i-линейные топологические пространства.

$\hat{\varphi}$-Прямое преобразование Фурье.

$\check{\varphi}$-Обратное преобразование Фурье.

1.2 Полугруппы операторов

Определение 1.1 (см.[Б,С]). *Семейство ограниченных операторов* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *в банаховом пространстве* X *называется непрерывной операторной полугруппой (или* C_0 *полугруппой), если*

1). $T_0 = Id, \quad T_{t+s} = T_t T_s \quad t, s \geq 0$

2). $\lim\limits_{t\to 0} ||T_t x - x|| = 0, \quad x \in X$

Определение 1.2. *Если норма* $||T(t)|| \leq 1$ *то непрерывная операторная полугруппа называется сжимающей.*

Определение 1.3. *Сильная операторная топология—это слабейшая топология на* $L(X, Y)$ *в которой отображения*

$E_x : L(X, Y) \to Y,$

заданные равенством $E_x(T) = Tx$ *непрерывны для любого* $x \in X$.

База окрестностей нуля задается множествами вида

$\{S : S \in L(X, Y), ||Sx_i||_Y \leq \varepsilon, \quad i = (1, \ldots, n)\},$

где $\{x_i\}$*-конечный набор элементов из* X*, а* $\varepsilon > 0$.

В этой топологии, последовательность операторов $\{T_\alpha\}$ *сходится к* T *(обозначается* $T_\alpha \xrightarrow{s} T$*), тогда и только тогда, когда* $||T_\alpha x - Tx||_Y \to 0$ *для любого* $x \in X$.

Предел в сильной операторной топологии обозначается s- lim.

Определение 1.4. *Функция* $F(t) : [0, \infty) \to \mathbf{L}(X)$ *называется сильно непрерывной, если для всех* $x \in X$ *отображения* $t \mapsto F(t)x$ *являются непрерывными функциями из* $\mathbb{R}_+$ *в* X.

Определение 1.5. *Сильная производная в нуле функции* $F : [0, \varepsilon) \to \mathbf{L}(X)$*,* $\varepsilon > 0$*, — это линейное отображение* $F'(0) : \mathrm{Dom}(F'(0)) \to X$ *такое, что*

$$F'(0)g = \lim_{t\to 0} t^{-1}(F(t)g - F(0)g),$$

где $\mathrm{Dom}(F'(0))$ *— векторное пространство всех элементов* $g \in X$*, для которых такой предел существует.*

Положим

$\mathrm{Dom}(C) := \{x \in X : \exists \lim\limits_{t\to 0} \frac{T_t x - x}{t}\}$,
$Cx := \lim\limits_{t\to 0} \frac{T_t x - x}{t}, x \in \mathrm{Dom}(C)$.

Оператор C с областью определения $\mathrm{Dom}(C)$ называется генератором или производящим оператором полугруппы $\{T_t\}_{t\geq 0}$.

Лемма 1.6 (см.[Б,С]). *Для всякой непрерывной полугруппы операторов $\{T_t\}_{t\geq 0}$ справедливы следующие утверждения:*

1) Оператор C - генератор полугруппы -является плотно определенным и замкнутым;

2) Для всякого $x \in \mathrm{Dom}(C)$ верны равенства
$\frac{d}{dt}T_t x = CT_t x = T_t C x$,
3) Для всякого $x \in X$ верно равенство
$T_t x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} e^{(t\frac{T_\varepsilon - Id}{\varepsilon})x}$,
Причем сходимость равномерна на отрезках в $[0, +\infty)$.

Определение 1.7. *Область D называется существенной областью определения оператора C, если замыкание сужения на D, совпадает с C.*

Лемма 1.8 (см.[У. Браттели, Д. Робинсон]). *Пусть C-генератор сильно непрерывной полугруппы T в банаховом пространстве X. Пусть D - подмножество $D(C)$, где $D(C)$- область определения C. Пусть $D(C)$ плотно в X и инвариантно относительно T, т.е. $Tx \in D$, для любого $x \in D$ и $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда D - Существенная область определения C.*

Теорема 1.9 (Об ограниченном линейном отображении) (см.[Рид,Саймон 1]). *Пусть T-ограниченное линейное преобразование из нормированного линейного пространства $(V1, ||\cdot||_{V1})$в полное нормированное линейное пространство $(V2, ||\cdot||_{V2})$. Тогда T единственным образом можен быть расширенно до ограниченного линейного преобразования с сохранением нормы из пополнения пространства $V1$ в $(V2, ||\cdot||_{V2})$.*

1.3 Теорема Чернова

Если X, X_1, X_2 — банаховы пространства, то $L(X_1, X_2)$ — пространство непрерывных линейных отображений (операторов) из X_1 в X_2 с сильной операторной топологией, $L(X) = L(X, X)$, $||\cdot||$ — операторная норма на $L(X)$, Id — тождественный оператор в X. Если $A \in L(X)$, то $\mathrm{Dom}(A)$ область определения A.

Теорема 1.10 (Чернова (см.[Б,С])). *Пусть X — банахово пространство, пусть $F : [0, \infty) \to L(X)$ — (сильно) непрерывное отображение, такое что $F(0) = Id$ и $||F(t)|| \leq e^{at}$ для некоторого $a \in \mathbb{R}_+$, $t \geq 0$. Пусть D — векторное подпространство $\mathrm{Dom}(F'(0))$ такое, что сужение оператора $F'(0)$ на него обладает замыканием C. Если C — генератор сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$, то для любого $t_0 > 0$ последовательность $(F(t/n))^n$, $n \in \mathbf{N}$, сходится к $(T_t)_{t\geq 0}$ при $n \to \infty$ в сильной операторной топологии, и эта сходимость равномерна по $t \in [0, t_0]$, то есть $T_t = \text{s-}\lim\limits_{n\to\infty}(F(t/n))^n$.*

Семейство операторов $(F_t)_{t\geq 0}$ называется *эквивалентным по Чернову полугруппе* $(T_t)_{t\geq 0}$, если оно удовлетворяет предположениям теоремы Чернова для этой полугруппы.

1.4 Псевдодифференциальные операторы

Псевдодифференциальный оператор, это естественное расширение понятия дифференциального оператора в частных производных.

Рассмотрим дифференциальный оператор степени m, определенный на n-мерном Евклидовом пространстве.

$P\varphi(x) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha \varphi(x)$,

где $D_{x_j} = i\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$; $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$;

$D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}$

Ассоциируем с P полином $p(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, где $\xi = (\xi_1 \ldots \xi_n)$, $\xi^\alpha = (\xi_1^\alpha \ldots \xi_n^\alpha)$.

Полином $p(x,\xi)$ называется символом P.

Образом преобразования Фурье функций $D_{x_j}\varphi(x)$ и $x_j\varphi(x)$ будет $\xi_j\hat{\varphi}(\xi)$ и $-D_{\xi_j}\hat{\varphi}(\xi)$ соответственно, где $\hat{\varphi}(\xi)$-преобразование Фурье функции $\varphi(x)$.

Преобразование Фурье $\widehat{P\varphi}(\xi)$ оператора $P\varphi(x)$ есть умножение $p(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)$.

Таким образом, естественно определить оператор $P\varphi(x)$ через обратное преобразование Фурье функции $p(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)$.

Пусть теперь $p(\cdot,\cdot)$— функция из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{C}$.

Псевдодифференциальным оператором с символом $p(x,\xi)$ будем называть оператор вида

$P\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi,x)} p(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi) d\xi,$

где (ξ,x)-скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Областью определения оператора будем считать все φ, для которых формула имеет смысл.

Глава 2

Гамильтонова формула Фейнмана для параболического уравнения второго порядка

В этой главе будет представлено решение задачи Коши и Коши-Дирихле, для параболического уравления в виде предела конечнократных интегралов, которое и будет называться формулой Фейнмана.

В общем виде, формулу Фейнмана можно представить следующим образом:

$e^{tC} = \text{s-}\lim\limits_{n\to\infty}(F(t/n))^n$, где C-генератор полугруппы, разрешающей задачу Коши или Коши-Дирихле.

Определение 2.1. *Формула Фейнмана называется гамильтоновой, если оператор $F(t)$ является псевдодифференциальным, то есть представим в виде*

$[F(t)\varphi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi,x)}p(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi.$

Определение 2.2. *Формула Фейнмана называется лагранжевой, если $F(t)$ является интегральным оператором вида*

$[F(t)\varphi](x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x,y)\varphi(y)dy,$ *где $K(t,x,y)$- ядро интегрального оператора.*

2.1 Задача Коши для параболического уравнения

Пусть $a(x)$ — непрерывная на $\mathbb{R}$ положительно определенная функция не обращающаяся в ноль. Более того $a(x)$ не стремится к нулю на бесконечности. Пусть Δ_a — дифференциальный оператор на множестве дважды дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, определяемый равенством: $(\Delta_a\varphi)(x) = a(x)\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)$. Пусть $b(x)$ и $c(x)$ -непрерывные скалярные ограниченные на $\mathbb{R}$ функции. В дальнейшем мы будем рассматривать гамильнониан $\mathcal{H}$, определённый на множестве дважды дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ следующим образом:

$$(\mathcal{H}\varphi)(x) = \frac{1}{2}\Delta_a\varphi(x) + b(x)\nabla\varphi(x) + c(x)\varphi(x)$$

Символ $\nabla\varphi(x)$ означает $\frac{d}{dx}\varphi(x)$.

Рассмотрим задачу Коши для параболического уравнения второго порядка в $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\Delta_a f(t,x) + b(x)\nabla f(t,x) + c(x)f(t,x) \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ f(0,x) = f_0(x) \quad\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.1}$$

Обозначим $X = \mathbf{C}_\infty(\mathbb{R})$ — банахово пространство непрерывных в $\mathbb{R}$ функций таких что $f(x) \to 0$ при $||x||_{\mathbb{R}} \to \infty$. Норма в пространстве $X = \mathbf{C}_\infty(\mathbb{R})$ определена стандартным образом: $||f||_X = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$. Мы предполагаем, что $f_0 \in X$ и $f(t,\cdot) \in X$ для всех $t > 0$.

Можно показать, что оператор Лапласа Δ с существенной областью определения $S(\mathbb{R})$, является генератором сжимающей полугруппы $e^{t\Delta}$ на $\mathbf{C}_\infty(\mathbb{R})$, разрешающей задачу Коши для уравнения теплопроводности $\frac{df}{dt} = \Delta f$, $f(t,x) = e^{t\Delta}f_0$.(см.[Рид,Саймон 2]).

Будем предполагать, что коэффициенты рассматриваемого уравнения удовлетворяют достаточным условиям для того, чтобы существовала сильно непрерывная полугруппа $(T_t)_{t\geq 0}$ на пространстве $\mathbf{C}_\infty(\mathbb{R})$, разрешающая задачу Коши. Обозначим через $(C, \mathrm{Dom}(C))$ генератор полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$. Мы предполагаем, что множество $S(\mathbb{R})$– существенная область определения $(C, \mathrm{Dom}(C))$.

В дальнейшем мы построим семейство операторов на X, эквивалентное по Чернову разрешающей полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$. Тогда по теореме Чернова мы получим формулу Фейнмана для решения задачи (2.1).

2.2 Задача Коши-Дирихле для параболического уравнения в ограниченной области

Пусть $G \subset \mathbb{R}$ — ограниченная область. Её замыкание и границу обозначим соответственно $\overline{G}$ и ∂G. Далее, будем считать $\overline{G}$ отрезком $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим начально–краевую задачу Коши–Дирихле для параболического уравнения второго порядка в области G:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\Delta_a f(t,x) + b(x)\nabla f(t,x) + c(x)f(t,x) & t \geq 0, \quad x \in G \\ f(0,x) = f_0(x) \quad x \in G \\ f(t,x) = 0 \qquad t \geq 0, \quad x \in \partial G \end{cases} \tag{2.2}$$

Мы предполагаем, что $f_0 \in X$ и $f(t, \cdot) \in X$ для всех $t > 0$, где $X = \mathbf{C}_0(\overline{G})$ — банахово пространство непрерывных на $\overline{G}$ функций, обращающихся в ноль на границе. Норма в пространстве $X = \mathbf{C}_0(\overline{G})$ определена стандартным образом: $||f||_X = \sup_{x\in\overline{G}} |f(x)|$. Это пространство можно рассматривать как подпространство $\mathbf{C}_c(\mathbb{R})$ непрерывных в $\mathbb{R}$ функций с компактным носителем. Определим, для любой $\varphi \in \mathbf{C}_0(G)$ непрерывное продолжение до функции $\tilde{\varphi} \in \mathbf{C}_c(\mathbb{R})$ положив:

1.Для любых $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathbf{C}_0(\overline{G})$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеем:

Если $\varphi_1 = \alpha\varphi_2 + \beta\varphi_3$ на $\overline{G}$, тогда $\tilde{\varphi}_1 = \alpha\tilde{\varphi}_2 + \beta\tilde{\varphi}_3$ на $\mathbb{R}$.

2. $||\varphi||_{\mathbf{C}_0(\overline{G})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\tilde{\varphi}(x)|$.

3. Если $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\overline{G})$ тогда $\tilde{\varphi} \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

Векторное пространство $\tilde{\varphi}$ назовем $\tilde{D} \subset \mathbf{C}_c(\mathbb{R})$.

Пусть $(T_t)_{t\geq 0}$ — полугруппа на $\mathbf{C}_0(\overline{G})$, разрешающая задачу Коши–Дирихле. Мы предполагаем, что коэффициенты рассматриваемого уравнения удовлетворяют достаточным условиям для того, чтобы полугруппа $(T_t)_{t\geq 0}$ была сильно непрерывной полугруппой на пространстве $\mathbf{C}_0(\overline{G})$. Обозначим через $(L, \mathrm{Dom}(L))$ генератор полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$. Мы предполагаем, что множество $D := \{\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\overline{G}) | L\varphi \in \mathbf{C}_0(\overline{G})\}$- существенная область определения $(L, \mathrm{Dom}(L))$.

2.3 Семейства операторов, эквивалентные по Чернову полугруппе, разрешающей задачу Коши

Рассмотрим семейство операторов $(F(t))_{t\geq 0}$ пространства $S(\mathbb{R})$ в $\mathbf{C}_\infty(\mathbb{R})$ таких что $F(0) = Id$,а для $t > 0$ и $\varphi \in S(\mathbb{R})$

$(F(t)\varphi)(x) = e^{tc(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}} e^{i\xi(x+tb(x))} \hat{\varphi}(\xi) d\xi.$

Такой оператор является псевдодифференциальным, с символом $e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}+i\xi tb(x)}$. Где $\hat{\varphi}(\xi)$ - преобразование Фурье функции $\varphi(x)$, определяемое как

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi\tau} \varphi(\tau) d\tau.$$

Обратное преобразование Фурье определим стандартным образом, как

$$\check{g}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi y} g(\xi) d\xi.$$

Таким образом, формула обращения примет вид:

$\varphi(x) = \check{\hat{\varphi}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi\tau} \varphi(\tau) d\tau e^{i\xi x} d\xi$

и имеет место для любой функции из пространства Шварца.

Лемма 2.3. *Для любого φ из $S(R)$ функция $F(t)\varphi$ принадлежит* $\mathbf{C}_\infty(\mathbb{R})$

При $t = 0$ оператор принимает вид

$$(F(t)\varphi)(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \varphi(x).$$

Следовательно, при $t=0$ $F(t)=Id$ на $S(\mathbb{R})$.

При $t>0$

$(F(t)\varphi)(x)=e^{tc(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}}e^{i\xi(x+tb(x))}\hat{\varphi}(\xi)d\xi.$

$\lim\limits_{|x|\searrow\infty}x^2(F(t)\varphi)(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}e^{tc(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}}e^{i\xi(x+tb(x))}\hat{\varphi}(\xi)d\xi=$

$=\lim\limits_{|x|\searrow 0}e^{tc(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{i\xi x}e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}}e^{i\xi tb(x)}\hat{\varphi}(\xi)d\xi=$

$\lim\limits_{|x|\searrow 0}-e^{tc(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^2e^{i\xi x}}{d\xi^2}\cdot e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}}e^{i\xi tb(x)}\hat{\varphi}(\xi)d\xi=$

Интегрированием по частям получим

$\lim\limits_{|x|\searrow 0}-e^{tc(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^2}{d\xi^2}[e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}}e^{i\xi tb(x)}\hat{\varphi}(\xi)]\cdot e^{i\xi x}d\xi,$

где

$|\frac{d^2}{d\xi^2}[e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}}e^{i\xi tb(x)}\hat{\varphi}(\xi)]|=$

$|e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}}e^{i\xi tb(x)}[\hat{\varphi}''(\xi)-2\hat{\varphi}'(\xi)(\xi ta(x)-itb(x))+\hat{\varphi}(\xi)(\xi^2ta(x)+it^2\xi^2b(x)a(x)-ta(x)-it^2b(x)a(x)-t^2b^2(x))]|\leq$

$|\hat{\varphi}''(\xi)-2\hat{\varphi}'(\xi)(\xi ta(x)-itb(x))+\hat{\varphi}(\xi)(\xi^2ta(x)+it^2\xi^2b(x)a(x)-ta(x)-it^2b(x)a(x)-t^2b^2(x))|.$

Таким образом,

$|\lim\limits_{|x|\searrow\infty}x^2(F(t)\varphi)(x)|\leq e^{\sup_{x\in\mathbb{R}}c(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\varphi}''(\xi)-2\hat{\varphi}'(\xi)(\xi ta(x)-itb(x))+\hat{\varphi}(\xi)(\xi^2ta(x)+it^2\xi^2b(x)a(x)-ta(x)-it^2b(x)a(x)-t^2b^2(x))|d\xi.$

В виду того, что функции $a(x),b(x),c(x)$ ограничены в $\mathbb{R}$, последний интеграл существует и равен константе. Его значение обозначим C.

В итоге

$|\lim\limits_{|x|\searrow\infty}x^2(F(t)\varphi)(x)|\leq e^{\sup_{x\in\mathbb{R}}c(x)}C\leq C^*$

Непрерывность по x следует из непрерывности по совокупности аргументов.

Таким образом, доказано что

$(F(t)\varphi)(x)=e^{tc(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}}e^{i\xi(x+tb(x))}\hat{\varphi}(\xi)d\xi$

отображает $S(\mathbb{R})$ в $\mathbf{C}_\infty(\mathbb{R})$.

Ξ

Для доказательства эквивалентности данного семейства операторов по Чернову разрешающей полугруппе $T(t)$, в первую очередь покажем, что на $S(\mathbb{R})$, являющейся существенной областью определения генератора полугруппы, сильная производная в нуле оператора $(F(t)\varphi)(x)$ совпадает с $(C, \mathrm{Dom}(C))$.

Лемма 2.4. *На множестве $S(\mathbb{R})$ сильная производная $F(t)$ в нуле совпадает с $\frac{1}{2}a(x)\Delta\varphi(x) + b(x)\nabla\varphi(x) + c(x)\varphi(x)$, то есть для любого $\varphi \in S(\mathbb{R})$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{t\searrow 0} t^{-1}(F(t)\varphi(x) - \varphi(x)) = \tfrac{1}{2}a(x)\Delta\varphi(x) + b(x)\nabla\varphi(x) + c(x)\varphi(x).$$

Доказательство:

$$\lim_{t\searrow 0}\tfrac{1}{t}(F_1(t)\varphi - \varphi)(x) =$$

$$\lim_{t\searrow 0}\tfrac{1}{t}[\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{tc(x)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}}e^{i\xi(x+tb(x))}\hat{\varphi}(\xi)d\xi - \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi] =$$

$$\lim_{t\searrow 0}\tfrac{1}{t}[\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}+i\xi tb(x)+tc(x)} - 1]e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi] =$$

$$\lim_{t\searrow 0}\tfrac{1}{t}[\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))} - 1]e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi] =$$

$$\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lim_{t\searrow 0}\tfrac{1}{t}[e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))} - 1]e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi =$$

Обоснованием для предельного перехода под знаком интеграла служит выполнение условий теоремы о дифференцируемости несобственного интеграла с параметром. (см[ФГ2]) Условия эти таковы:

1. Существование непрерывной в области $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ производной по t от подынтегральной функции.

2. Равномерная сходимость в области $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{d}{dt}[e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)]d\xi.$$

3. Сходимость интеграла
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi$
в области $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$.

Первое условие выполняется, т.к.
$\frac{d}{dt}[e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}](\xi) =$
$(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)$
функция, непрерывная по совокупности аргументов на $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$.

Равномерная сходимость интеграла
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}[e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)]d\xi$
по переменным x и t следует из признака сходимости Абеля. Для проверки данного утверждения рассмотрим интеграл
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi =$
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} -\frac{a(x)\xi^2}{2}e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi b(x)e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi +$
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} c(x)e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi.$

Интеграл
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} -\frac{a(x)\xi^2}{2}e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi$
сходится равномерно, так как функция $e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}}$ равномерно по x,t ограниченная, монотонная функция по ξ, а интеграл
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} -\frac{a(x)\xi^2}{2}e^{t(i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi$
сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Действительно, подынтегральная функция мажорируется
$|-\frac{a(x)\xi^2}{2}e^{t(i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} a(x)e^{\sup_{x\in\mathbb{R}} c(x)}\frac{1}{2}\xi^2|\hat{\varphi}(\xi)| \le$
где C-константа, т.к мажорирующая функция интегрируема и интеграл
$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2|\hat{\varphi}(\xi)|d\xi$
сходится при $\hat{\varphi}(\xi)\in S(\mathbb{R})$.

Подобным образом, можно доказать что равномерно по x и t сходятся остальные интегралы в сумме.

Таким образом, выполнены условия теоремы Абеля, и интеграл
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}[e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)]d\xi$
сходится равномерно по x и t.

Условие поточечной сходимости интеграла
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi$
выполняется. Более того, аналогичным образом, можно показать что сходимость эта равномерная.

Следовательно, выполнены условия теоремы о дифференцируемости несобственного интеграла с параметром и справедливо отношение
$\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi =$
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}[e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)]d\xi,$
а следовательно, существует производная в точке $t = 0$ и справедлив предельный переход
$\lim\limits_{t\searrow 0}\frac{1}{t}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}-1]e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi] =$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lim\limits_{t\searrow 0}\frac{1}{t}[e^{t(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))}-1]e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi =$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(-\frac{a(x)\xi^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi =$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\frac{a(x)(i\xi)^2}{2}+i\xi b(x)+c(x))e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi =$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a(x)}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^2e^{i\xi x}}{dx^2}\hat{\varphi}(\xi)d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}b(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{de^{i\xi x}}{dx}\hat{\varphi}(\xi)d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}c(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi =$
$\frac{a(x)}{2}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \frac{a(x)}{2}\varphi''(x)+b(x)\varphi'(x)+c(x)\varphi(x).$

Последнее преобразование имеет место в силу свойства преобразования Фурье
$\frac{d}{dx}\hat{f} = \widehat{-ixf}.$

Таким образом, доказано что сильная производная в нуле оператора, совпадает с генератором полугруппы, разрешающей задачу Коши на его существенной области определения.

Ξ

Теорема 2.5. *Пусть* $(T_t)_{t\geq 0}$ *— сильно непрерывная полугруппа на пространстве* X*, разрешающая задачу Коши (2.1). Тогда семейство операторов* $(F(t))_{t\geq 0}$ *эквивалентно по Чернову этой полугруппе, то есть* $T_t = \text{s-}\lim\limits_{n\to\infty}[F(t/n)]^n$.

Докажем, что $(F(t))_{t\geq 0}$ эквивалентно по Чернову полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$. Так как по лемме (2.4) сильная производная $F(t)$ в нуле совпадает с генератором полугруппы на его существенной области определния, достаточно оценить норму операторов $F(t)$ и показать сильную непрерывность семейства $F(t)$.

Лемма 2.6. *Норма* $||F(t)|| \leq e^{at}$ *для* $a \in \mathbb{R}$ *и* $t \geq 0$.

Доказательство:

$||F(t)|| = \sup_{||\varphi||_{C_\infty(\mathbb{R})}\leq 1} ||(F(t)\varphi)(x)||_{C_\infty(\mathbb{R})} =$

$\sup_{||\varphi||_{C_\infty(\mathbb{R})}\leq 1} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tc(x)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}} e^{i\xi(x+tb(x))}\hat{\varphi}(\xi)d\xi| =$

Для любых функций из пространства Шварца выполняется равенство $(\hat{f},\varphi) = (f,\hat{\varphi})$.

В нашем случае $(\hat{f},\varphi)(x) = (f,\hat{\varphi})(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Преобразование Фурье функции $e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}} e^{i\xi(x+b(x))}$ имеет вид

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}} e^{i\xi(x+tb(x))} e^{-i\xi y} d\xi.$

Выполнив промежуточные преобразования, получим:

$-\frac{a(x)t\xi^2}{2} + i\xi(x + tb(x) - y) = -(\frac{a(x)t\xi^2 - 2i\xi(x+tb(x)-y)}{2}) = -a(x)t(\frac{\xi^2 - \frac{2i\xi(x+tb(x)-y)}{a(x)t}}{2}) = -a(x)t(\frac{\xi^2 - \frac{2i\xi(x+tb(x)-y)}{a(x)t} + (\frac{i(x+tb(x)-y)}{a(x)t})^2 - (\frac{i(x+tb(x)-y)}{a(x)t})^2}{2}) = -a(x)t(\frac{(\xi - \frac{i(x+tb(x)-y)}{a(x)t})^2 + (\frac{y-(x+tb(x))}{a(x)t})^2}{2}) = -\frac{(y-(x+tb(x)))^2}{2a(x)t} - \frac{(\xi - \frac{i(x+tb(x))-y)}{a(x)t})^2}{\frac{2}{a(x)t}}.$

Таким образом,

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}} e^{i\xi(x+b(x))} e^{-i\xi y} d\xi =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-(x+tb(x)))^2}{2a(x)t}-\frac{(\xi-\frac{i(x+tb(x)-y)}{a(x)t})^2}{\frac{2}{a(x)t}}} d\xi =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-(x+tb(x)))^2}{2a(x)t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-\frac{i(x+tb(x)-y)}{a(x)t})^2}{\frac{2}{a(x)t}}} d\xi =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-(x+tb(x)))^2}{2a(x)t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-\frac{i(x+tb(x)-y)}{a(x)t})^2}{\frac{2}{a(x)t}}} d(\xi-\frac{i(x+tb(x)-y)}{a(x)t}) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2\pi}{a(x)t}}e^{-\frac{(y-(x+tb(x)))^2}{2a(x)t}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a(x)t}}e^{-\frac{(y-(x+tb(x)))^2}{2a(x)t}}$$

справедливо представление нормы оператора в виде

$$\sup_{||\varphi||_{C_\infty(\mathbb{R})}\leq 1}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}}e^{tc(x)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-(x+tb(x)))^2}{2a(x)t}}\varphi(y)dy| \leq$$

$$\sup_{||\varphi||_{C_\infty(\mathbb{R})}\leq 1}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}}e^{tc(x)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-(x+tb(x)))^2}{2a(x)t}}|\varphi(y)|dy \leq$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}}e^{tc(x)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-(x+tb(x)))^2}{2a(x)t}}d(y-(x+tb(x))) \leq e^{t\sup_{x\in\mathbb{R}}c(x)}.$$

Таким образом, показано, что норма оператора $F(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Чернова.

Ξ

Лемма 2.7. *Существует единственное расширение семейства операторов $F(t)$ до ограниченного линейного преобразования $\mathbf{C}_\infty(\mathbb{R})$ с сохранением нормы.*

Согласно теореме 1.9 (Об ограниченном линейном отображении), для ограниченного оператора, определенного на подпространстве банахова пространства, такое расширение существует и единственно. Семейство $F(t)$, для любого $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{+\infty\}$ ограниченно по норме. Кроме того, $S(\mathbb{R})$ плотно в $C_\infty(\mathbb{R})$. Следовательно, существует единственное расширение $F(t)$ из пополнения $S(\mathbb{R})$, то есть из $C_\infty(\mathbb{R})$ в себя, с сохранением нормы.

Ξ

Далее, будем обозначать символом $F(t)$, семейство операторов из $C_\infty(\mathbb{R})$ в себя.

Лемма 2.8. *Для любой $\varphi \in S(\mathbb{R})$ и любого $t_0 \geq 0$, семейство $F(t)$ сильно непрерывно.*

Для доказательства предположения о сильной непрерывности семейства $F(t)$, покажем, что $\lim\limits_{t\to t_0} ||F(t)\varphi - F(t_0)\varphi||_{C_\infty(\mathbb{R})} = 0$ для любой $\varphi \in S(\mathbb{R})$ и любого $t_0 \geq 0$.

$$\lim_{t\to t_0} ||F(t)\varphi - F(t_0)\varphi||_{C_\infty(\mathbb{R})} = \lim_{t\to t_0} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tc(x)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}} e^{i\xi(x+tb(x))}\hat{\varphi}(\xi)d\xi -$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t_0c(x)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(x)t_0\xi^2}{2}} e^{i\xi(x+t_0b(x))}\hat{\varphi}(\xi)d\xi| =$$

$$\lim_{t\to t_0} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)[e^{tc(x)}e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}}e^{i\xi tb(x)} - e^{t_0c(x)}e^{-\frac{a(x)t_0\xi^2}{2}}e^{i\xi t_0b(x)}]d\xi|.$$

Покажем, что интеграл сходится равномерно. Как и при доказательстве возможности предельного перехода под знаком интеграла при вычислении производной в нуле, воспользуемся признаком Абеля. Очевидно, условия выполняются. Интерал

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)e^{tc(x)}e^{i\xi tb(x)}d\xi$$

сходится равномерно, по признаку Вейерштрасса, так как модуль подынтегральной функции мажорируется интегрируемой в $\mathbb{R}$ функцией, зависящей только от ξ, а функция

$$e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}}$$

монотонная по ξ ограниченная по модулю функция в области $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ по переменным x и t.

Предел

$$\lim_{t\to t_0} \sup_{(x,\xi)\in[\xi^*,\xi^{**}]\times[x^*,x^{**}]} |e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)[e^{tc(x)}e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}}e^{i\xi tb(x)} - e^{t_0c(x)}e^{-\frac{a(x)t_0\xi^2}{2}}e^{i\xi t_0b(x)}]|$$

существует на каждом компакте $[\xi^*,\xi^{**}]\times[x^*,x^{**}] \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и равен нулю, в силу непрерывности функций под знаком предела.

Таким образом, выполнены условия теоремы о предельном переходе в несобственном интеграле и имеет место перестановка предельных переходов:

$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lim\limits_{t\to t_0} e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)[e^{tc(x)}e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}}e^{i\xi tb(x)} - e^{t_0c(x)}e^{-\frac{a(x)t_0\xi^2}{2}}e^{i\xi t_0b(x)}]d\xi|.$

Интеграл равен нулю, так как подынтегральная функция стремится к нулю.

Таким образом, $\lim\limits_{t\to t_0} ||F(t)\varphi - F(t_0)\varphi||_{C_\infty(\mathbb{R})} = 0$ для любого $\varphi \in S(\mathbb{R})$.

Ξ

Лемма 2.9. *Для любой $\Psi \in C_\infty(\mathbb{R})$ и любого $t_0 \geq 0$, семейство $F(t)$ сильно непрерывно.*

Доказательство:

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такие что , как только $|t - t_0| < \delta$, $||F(t)\Psi - F(t_0)\Psi||_{C_\infty(\mathbb{R})} < \varepsilon$, для любой $\Psi \in C_\infty(\mathbb{R})$.

Так как $S(\mathbb{R})$ плотно в $C_\infty(\mathbb{R})$, то для любого $\varepsilon > 0$ и любой $\Psi \in C_\infty(\mathbb{R})$ существует последовательность $\varphi_n \in S(\mathbb{R})$, такая что $||\Psi - \varphi_n||_{C_\infty(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{3M}$, начиная с некоторого $n \geq N$.

$||F(t_0)\Psi - F(t)\Psi||_{C_\infty(\mathbb{R})} = ||F(t_0)\Psi - F(t_0)\varphi_n + F(t_0)\varphi_n - F(t)\varphi_n + F(t)\varphi_n - F(t)\Psi||_{C_\infty(\mathbb{R})} \leq$

$||F(t_0)\Psi - F(t_0)\varphi_n||_{C_\infty(\mathbb{R})} + ||F(t_0)\varphi_n - F(t)\varphi_n||_{C_\infty(\mathbb{R})} + ||F(t)\varphi_n - F(t)\Psi||_{C_\infty(\mathbb{R})} \leq$

Так как $F(t)$ сильно непрерывно, то можно зафиксировать $\delta > 0$, при котором $||F(t_0)\varphi_n - F(t)\varphi_n|| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{3M}$

$||F(t_0)|| \cdot ||\Psi - \varphi_n||_{C_\infty(\mathbb{R})} + ||F(t_0)\varphi_n - F(t)\varphi_n||_{C_\infty(\mathbb{R})} + ||F(t)|| \cdot ||\varphi_n - \Psi||_{C_\infty(\mathbb{R})} \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon$

Где M наибольшая из $||F(t_0)||$ и $||F(t)||$.

Ξ

Таким образом, доказана эквивалентность по Чернову семейства $F(t)$ для полугруппы $T(t)$, и

$T_t = \text{s-}\lim\limits_{n\to\infty} [F(t/n)]^n.$

2.4 Семейства операторов, эквивалентные по Чернову полугруппе, разрешающей задачу Коши-Дирихле в ограниченной области

Пусть $\varepsilon(t)$ — гладкая функция монотонно убывающая к нулю при $t > 0$, $t \to 0$, такая что $\varepsilon(t) = o(t)$. Например, $\varepsilon(t) = c\,\mathrm{arctg}(t)$ для некоторого $c: \ 0 < c < \frac{1}{\pi}\mathrm{diam}(G)$. Определим множество $G_{\varepsilon(t)}$ следующим образом: $G_{\varepsilon(t)} = \{x \in G : \ \mathrm{dist}(x, \partial G) > \varepsilon(t)\}$. Пусть $\{\psi_{\varepsilon(t)}(x)\}_{t>0} : \mathbb{R} \to [0,1]$ — семейство бесконечно дифференцируемых на G функций, таких что $\psi_{\varepsilon(t)}(x) = 1$ при $x \in G_{\varepsilon(t)}$, $\psi_{\varepsilon(t)}(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus G$ и $\psi_{\varepsilon(t)}(x) \in [0,1]$ при $x \in G \setminus G_{\varepsilon(t)}$. При $t \to 0$ семейство $\psi_{\varepsilon(t)}$ апроксимирует индикатор области G в смысле поточечной сходимости.

Рассмотрим композицию операторов:
$\widetilde{F(t)}\varphi(x) = \widetilde{F}_2(t)\widetilde{F}_1(t)$, где
$[\widetilde{F}_1(t)\varphi](x) = e^{tc(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}} e^{i\xi(x+tb(x))}\hat{\varphi}(\xi)d\xi$
и $\widetilde{F}_2(t)\varphi(x) = \psi_{\varepsilon(t)}(x)\varphi(x)$.

$\widetilde{F}_1(t) : S(\mathbb{R}) \to C_\infty(\mathbb{R})$
$\widetilde{F}_2(t) : C_\infty(\mathbb{R}) \to C_0(\overline{G})$

Композиция операторов, корректно определяется для $\varphi \in \tilde{D} \subset \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$.

Таким образом, $\widetilde{F}(t)$ определяется по формуле
$[\widetilde{F}(t)\varphi](x) = \frac{\psi_{\varepsilon(t)}e^{tc(x)}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}} e^{i\xi(x+tb(x))}\hat{\hat{\varphi}}(\xi)d\xi.$

Теорема 2.10. *Пусть $(\widetilde{T}_t)_{t\geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа на пространстве $C_0(\overline{G})$, разрешающая задачу Коши-Дирихле (2.2). Тогда семейство операторов $(\widetilde{F}(t))_{t\geq 0}$ эквивалентно по Чернову этой полугруппе, то есть $\widetilde{T}_t = \text{s-}\lim\limits_{n\to\infty}[\widetilde{F}(t/n)]^n$.*

Доказательство:

В первую очередь, докажем, что сильная производная в нуле $\widetilde{F}(t)$, на существенной области определения генератора полугруппы, совпадает с генератором полугруппы $\frac{1}{2}\Delta_a f(x) + b(x)\nabla f(x) + c(x)f(x)$ равномерно по $x \in \overline{G}$.

Покажем, что $[\widetilde{F}(t)\varphi](x) = \varphi(x) + tL\varphi(x) + o(t)$ равномерно по $x \in \overline{G}$ при $t \to 0$.

Прежде всего, по лемме 2.4

$\widetilde{F(t)}\tilde{\varphi}(x) = \widetilde{F}_2(t)\widetilde{F}_1(t) = \widetilde{F}_2(t)[\tilde{\varphi}(x) + \frac{t}{2}\Delta_a\tilde{\varphi}(x) + tb(x)\nabla\tilde{\varphi}(x) + tc(x)\tilde{\varphi}(x) + o(t)] =$

$= \psi_{\varepsilon(t)}(\tilde{\varphi}(x) + \frac{t}{2}\Delta_a\tilde{\varphi}(x) + tb(x)\nabla\tilde{\varphi}(x) + tc(x)\tilde{\varphi}(x) + o(t))$

для любого $\tilde{\varphi} \in S(\mathbb{R})$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

При $x \in G_{\varepsilon(t)}$, $\psi_{\varepsilon(t)}(x) = 1$ и

$[\widetilde{F}(t)\varphi](x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\Delta_a\varphi(x) + b(x)\nabla\varphi(x) + c(x)\varphi(x) + o(t)$ равномерно по $x \in G_{\varepsilon(t)}$, при $t \to 0$.

При $x \in \mathbb{R} \setminus G$, $\psi_{\varepsilon(t)}(x) = 0$ и

$[\widetilde{F}(t)\varphi](x) = 0 = \varphi(x) + \frac{1}{2}\Delta_a\varphi(x) + b(x)\nabla\varphi(x) + c(x)\varphi(x) + o(t)$

равномерно по $x \in \mathbb{R} \setminus G$ при $t \to 0$.

Если $x \in G \setminus G_{\varepsilon(t)}$, то

$|\widetilde{F}(t)\varphi(x) - \varphi(x) - tL\varphi(x)| = |(1 - \psi_{\varepsilon(t)}(x))(\varphi(x) + tL\varphi(x)) + o(t)|$,

при $t \to 0$.

Функцию $\varphi \in D$ на множестве $G \setminus G_{\varepsilon(t)}$ можно разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x \in \overline{G}$. Разложение примет вид:

$\varphi(x) = \varphi(x^*) + \varphi^{(1)}(\theta x + (1-\theta x^*))(x - x^*)$, где $x^* \in \partial G$ такое что $||x - x^*|| \leq o(t)$.

$|\varphi(x)| = \left|\varphi^{(1)}(\theta x + (1 - \theta x^*))(x - x^*)\right| \leq |\varphi^{(1)}(\theta x + (1 - \theta x^*))|o(t) \leq o(t)$ равномерно по $x \in G \setminus G_{\varepsilon(t)}$. Так как $L\varphi \in C_0^\infty(\overline{G})$ то при $t \to 0$, $L\varphi(x) \to 0$ равномерно по $x \in G \setminus G_{\varepsilon(t)}$.

Следовательно, $|\widetilde{F}(t)\varphi(x) - \varphi(x) - tL\varphi(x)| \leq o(t)$, равномерно по $x \in G \setminus G_{\varepsilon(t)}$.

Таким образом, для $\varphi \in D$ равномерно по $x \in \overline{G}$ при $t \to 0$ выполняется равенство

$\widetilde{F}(t)\varphi(x) = \varphi(x) + tL\varphi(x) + o(t).$

Этим доказано, что сильная производная в нуле на множестве D, совпадает с генератором разрешающей полугруппы.

Очевидно, что для $\widetilde{F}(t)$ выполняются остальные условия теоремы Чернова. По теореме 1.9, существует единственное расширение $\widetilde{F}(t)$ на пространство $C_0(\overline{G})$ для которого справедливо представление полугруппы разрешающей задачу Коши-Дирихле в виде

$\widetilde{T}_t = \text{s-}\lim\limits_{n\to\infty} [\widetilde{F(t/n)}]^n.$

2.5 Представления решения с помощью формул Фейнмана

Формулы Фейнмана для задачи Коши

По Теореме 2.5 решение $f(t,x)$ задачи Коши 2.1 с начальными условиями $f(0,x) = f_0(x)$, где f-функция из $S(\mathbb{R})$, может быть получено по формуле $f(t,x) = \lim\limits_{n\to\infty}([F(t/n)]^n f_0)(x)$, где

$(F(t)\varphi)(x) = e^{tc(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}} e^{i\xi(x+tb(x))} \hat{\varphi}(\xi) d\xi.$

Таким образом,

$$f(t,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{2n} e^{\frac{t}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} c(q_{j-1})} e^{i\frac{t}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} b(q_{j-1})p_j} e^{-\frac{t}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a(q_{j-1})p_j^2}{2}} e^{i\frac{t}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(q_{j-1}-q_j)} \times$$

$f_0(q_n)dq_n dp_n dq_{n-1} dp_{n-1} \dots dq_1 dp_1,$

где $x = q_0$.

Это и есть формула Фейнмана для решения задачи Коши (2.1).

Формулы Фейнмана для задачи Коши-Дирихле

По Теореме 2.10 решение $f(t,x)$ задачи Коши 2.2 с начальными условиями $f(0,x)=f_0(x)$, где f-функция из $C_0^\infty(\overline{G})$, может быть получено по формуле $f(t,x)=\lim\limits_{n\to\infty}([\widetilde{F}(t/n)]^n f_0)(x)$, где

$[\widetilde{F}(t)\varphi](x)=\frac{\psi_{\varepsilon(t)}(x)e^{tc(x)}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{a(x)t\xi^2}{2}}e^{i\xi(x+tb(x))}\hat{\tilde{\varphi}}(\xi)d\xi$

и формула Фейнмана примет вид:

$$f(t,x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{2n}\prod_{j=1}^{n}\psi_{\varepsilon(\frac{t}{n})}(q_{j-1})e^{\frac{t}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}c(q_{j-1})}e^{i\frac{t}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}b(q_{j-1})p_j}e^{-\frac{t}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{a(q_{j-1})p_j^2}{2}}\times$$
$$e^{i\frac{t}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}p_j(q_{j-1}-q_j)}\tilde{f}_0(q_n)dq_ndp_ndq_{n-1}dp_{n-1}\dots dq_1dp_1,$$

где $x=q_0$.

Можно показать, что, с помощью

$(\hat{f},\varphi)=(f,\hat{\varphi})$

гамильтонова формула Фейнмана преобразуется к лагранжевой

$$f(t,x)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_G\dots\int\limits_G e^{\frac{t}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}V(x_{j-1})}e^{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{b(x_{j-1})(x_j-x_{j-1})}{a(x)}}\times$$
$$p_a(t/n,x_0,x_1)\dots p_a(t/n,x_{n-1},x_n)f_0(x_n)dx_1\dots dx_n,$$

где $x=x_0$,

$V(x)=c(x)-\frac{tb(x)^2}{2a(x)}$.

Глава 3

Применение формулы Фейнмана для численного решения параболического уравнения второго порядка

Для представления решения параболического уравнения с помощью формулы Фейнмана численными методами, удобнее использовать лагранжеву формулу Фейнмана [см.[БГС]]. Целесообразность использования такой формулы обусловлена отсутствием комплексной составляющей.

Задача о нахождении численного решения параболического уравнения по формулам Фейнмана представляется созданием алгоритма, реализующего нахождение предела конечнократных интегралов. Для решения задачи Коши-Дирихле численное решение представляется так же нахождением предела конечнократных интегралов при соответствующих задаче начальных и граничных условиях. В данной работе, соответствующий алгоритм реализован в среде MATLAB. Представление данного решения численным методом отражает динамику решений параболического уравнения, и позволяет на качественном уровне делать выводы о решениях при различных начальных и граничных условиях, а так же переменных $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$.

3.1 Вычислительный алгоритм

В настоящей работе, реализован вычислительный алгоритм, позволяющий численными методами получить в виде массива значения функции, являющейся n-м членом в последовательности интералов форулы Фейнмана.

Построен алгоритм следующим образом:

Так как решение уравнения представляется функцией двух переменных $f(x,t)$, то в теле программы создается пустой массив W предусмотренный для значений $f(x,t)$. Соответственно, размерность массива будет определяться числом точек, в которых значения $f(x,t)$ вычисляются.

Для осуществления численного интегрирования, область $G \subset \mathbb{R}$ и интервал времени $[0, t_0]$ разбиваются на $N+1$ точку, с интервалом $\frac{1}{N}$. Координаты точки разбиения, записываются в определнных для этого одномерных массивах. В данном случае, значения координат области интегрирования, записываются в массив X а значения координат интервала времени в массив T. Возможно, применение неравномерного разбиения областей, если это обусловленно спецификой задачи. Например, при решении задачи Коши.

Далее, в теле программы,(см. Приложение 1) созданы два вложеных цикла. Первый, обеспечивает кратность интегрирования. Второй, вложен в первый и обеспечивает вызов функции двух переменных, которая осуществляет численное интегрирование подинтегральной функции в формуле Фейнмана. Результат интегрирования, записывается в массив W.

В качестве глобальной переменной, объявляется массив I, которому на каждой n-й итерации верхнего цикла, присваевается значение массива W, полученного на $(n-1)$-й итерации верхнего цикла. Целью массива I, является хранение данных о значениях подинтегральной функции в формуле Фейнмана, подлежащей интегрированию на n-й итерации. В частности, на 1-й итерации, I содержит в себе данные о значениях функции $f_0(x)$.

Стоит уделить внимание аппарату численного интегрирования, использованному в программе.

Рассмотрим подробно одну итерацию внешнего цикла. Пусть задан цикл, пробегающий индексы k от 1 до $''NN''$. Где $''NN''$-кратность интеграла в формуле Фейнмана. Пусть $k = 1$. На первом шаге внутренний цикл (который фактически реализован в виде двух вложеных циклов) передает значения одномерных массивов X и T. А именно, на первой итерации внутреннего цикла, будут переданы значения ячеек $T(1), X(1)$ функции $W(i,j) = srednih(X(i), T(j))$. Эта функция представляет собой (см.Приложение 2) функцию двух аргументов $X(i), T(j)$, которой в качестве глобальных переменных передаются: кратность интеграла, массив X и число точек разбиения области G. Также, в функции $srednih$ реализовано численное интегрирование подинтегральной функции в формуле Фейнмана по области G методом средних. Таким образом, получив в качестве аргументов значения массивов $X(1), T(1)$, формула $srednih$ вычисляет интеграл

$$f(t_0, x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x_0)\frac{t_0}{NN}}} e^{\frac{t_0}{NN}c(x_0)} \int\limits_G e^{-\frac{(y-(x_0+\frac{t_0}{NN}b(x_0)))^2}{2a(x_0)\frac{t_0}{NN}}} \varphi(y)dy.$$

Значение интеграла записывается в массив $W(i,j)$, где j- индексы ячеек массива T, а i– индексы ячеек массива X.

Внутренний цикл тела программы пробегает индексы (i,j). Внешний индекс цикла- j. Таким образом, в каждой точке $T(j)$ вычисляются значения $f(t_0, x)$, где x - пробегает массив X. Значения этой функции сохраняются в столбцах массива W.

Завершается первая итерация внешнего цикла тела программы, после того как завершился внутренний цикл и сформирован массив W.

На следующей итерации внешнего цикла, массиву I, присваевается значение $W(:,j)$, и запускается внутренний цикл тела. Это означает, что при фиксированном t_0, вычисляется интеграл

$$f(t_0, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)\frac{t_0}{NN}}} e^{\frac{t_0}{NN}c(x)} \int\limits_G e^{-\frac{(y-(x+\frac{t_0}{NN}b(x)))^2}{2a(x)\frac{t_0}{NN}}} \varphi(t_0, y)(y)dy,$$

где $\varphi(y, t_0) = W(:,j)$ а $x = X$.

Таким образом, вычисление интеграла кратности $''NN''$ представляет собой, последовательное формирование массива W $''NN''$-раз. При этом, для формирования W на k-й итерации, используются значения W на $(k-1)$-й итерации внешнего цикла.

После выполнения $''NN''$- итераций внешнего цикла, в программе предусмотрено графическое представление решения $f(t,x)$. Осуществляется представление функцией $Mesh(W,T,X)$.

Точность вычисления непосредственно зависит от частоты разбиения x и t.

В данной работе, не проводятся исследования точности вычислений при интегрировании и также не вычисляется предельное значение конечнократных интегралов.

Исследования точности вычислений сводится к поиску метода интегрирования, осуществляющегося без вычисления производных и при этом обладающего высокой точностью при интегрировании функций, стремящихся к неограниченно возрастающей. Это требование обусловлено тем, что при $t \to 0$, подинтегральная функция в формуле Фейнмана стремится к δ-функции Дирака.

Вычисление предела конечнкратных интералов с заданной точностью представляется достаточно сложной задачей, требующей дополнительных исследований. Во всяком случае, можно утверждать, что, хотя создание программы, вычисляющей предел интегралов и не представляет трудности, вычислительный процесс будет весьма трудоемким.

3.2 Численное решение некоторых модельных задач

Для оценки состоятельности решения параболического уравнения по формуле Фейнмана, рассмотрим решение следующей задачи Коши-Дирихле, на отрезке $[0, \pi/2]$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\Delta f(t,x) \quad t \geq 0, \quad x \in G \\ f(0,x) = \sin(x) \quad\quad x \in G \\ f(t,x) = 0 \quad\quad\quad t \geq 0, \quad x \in \partial G \end{cases} \tag{3.1}$$

Решение уравнения с такими условиями примет вид

$$f(t,x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} p_a(t/n, x_0, x_1) \dots p_a(t/n, x_{n-1}, x_n) \sin(x_n) dx_1 \dots dx_n$$

где $x = x_0$,

$$P_a(x,y,t/n) = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2ta(x)}}}{\sqrt{2\pi ta(x)}}$$

Для сравнения, запрограммированно решение такого уравнения, полученное методом разделения переменных. Можно показать, что решение для такой задачи будет представлено в виде ряда.

$$f(t,x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2 t} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2nx dx \sin 2nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\pi} [\frac{4n}{1-4n^2}] \sin(2nx).$$

Несогласованность начальных и граничных условий выбрана не случайно, а с целью продемонстрировать вид решения для обоих методов, и наглядно оценить характер сходимости решений. Выбор значений $a(x) = 1; \quad b(x) = 0; \quad c(x) = 0;$ также сделан в целях наглядности решений.

Итог решения задачи 3.1 по формуле Фейнмана демонстрируют графики(1.1;1.2;1.3). Решение методом разделения переменных, представлено на графиках ((2.1;2.2;2.3)).

При численном представлении решения в виде ряда, характер сходимости, в зависимости от числа используемых членов ряда заметно отражается на выполнении начальных условий.

Решение, представленное формулой Фейнмана, демонстрирует характер сходимости иного рода. Так, выполнение начальных условий определяется в основном выбором метода интегрирования. О проблемме выбора метода интегрирования упоминалось выше.

Графики наглядно демонстрируют, что для некоторых начальных и граничных условий, можно сделать предположение о том, что решение, полученное по формуле Фейнмана имеет иной характер сходимости, по сравнению с другими методами решений. Такое предположение ставит вопрос о исследовании характера сходимости решения по формуле Фейнмана, для выделения задач, решение которых таким способом оказалось бы наиболее целесообразным.

Литература

[Б,С] В.И. Богачев, О.Г. Смолянов "Действительный и функциональный анализ"

[КФ] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин "Элементы теории функций и функционального анализа"

[EN] K.-J. Engel, R. Nagel, One parameter semigroups for linear evolution equations, Springer, 2000.

[Рид,Саймон 1] М. Рид, Б. Саймон "Методы современной математической физики т.1"

[Рид,Саймон 2] М. Рид, Б. Саймон "Методы современной математической физики т.2"

[ФГ1] Г.М. Фихтенгольц "Курс дифференциального и интегрального исчисления т.1"

[ФГ2] Г.М. Фихтенгольц "Курс дифференциального и интегрального исчисления т.2"

[ФГ3] Г.М. Фихтенгольц "Курс дифференциального и интегрального исчисления т.3"

[А.В.] А.Д. Вентцель "Курс теории случайных процессов"

[У. Браттели, Д. Робинсон] У. Браттели, Д. Робинсон "Операторные алгебры и квантовая статистическая механика"

[В.В.] В.С. Владимиров "Уравнения математической физики"

[БГС] Я.А. Бутко, М. Гротхаус, О.Г. Смолянов "Формула Фейнмана для параболического уравнения второго порядка в области"Доклады академии наук, 2008, том 421, №6,с.1-6

[STT] Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. "Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula". J. of Math.Phys.2002. V.43. №10. P.5161-5171.

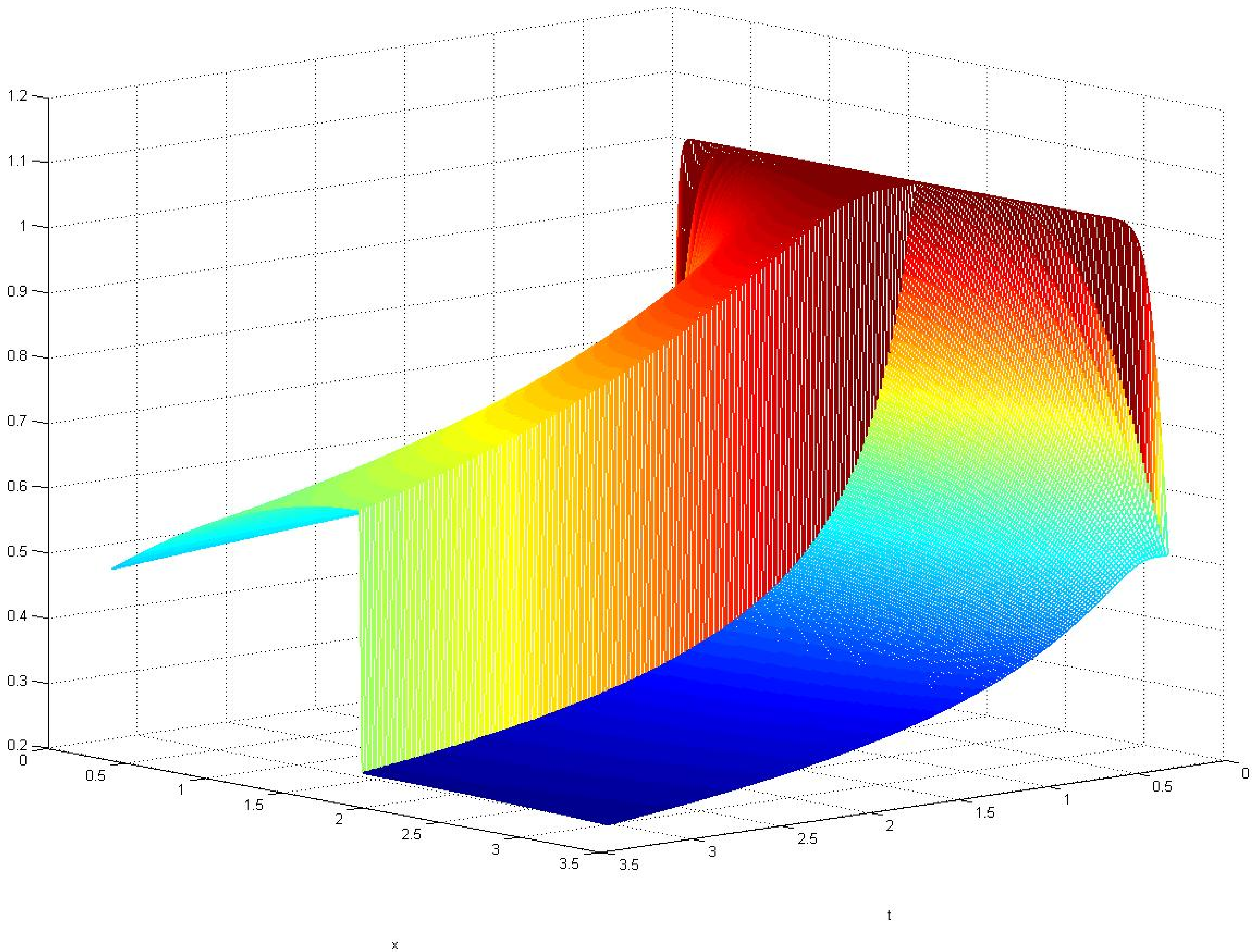
[SWW1] Smolyanov O.G., Weizsäcker H .v., Wittich O. "Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standart Brownian motions". Canadian Math. Soc. Conference Proceedings. Vol 29. 2000.

[SWW2] Smolyanov O.G., Weizsäcker H .v., Wittich O. "Chernoff's Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds"

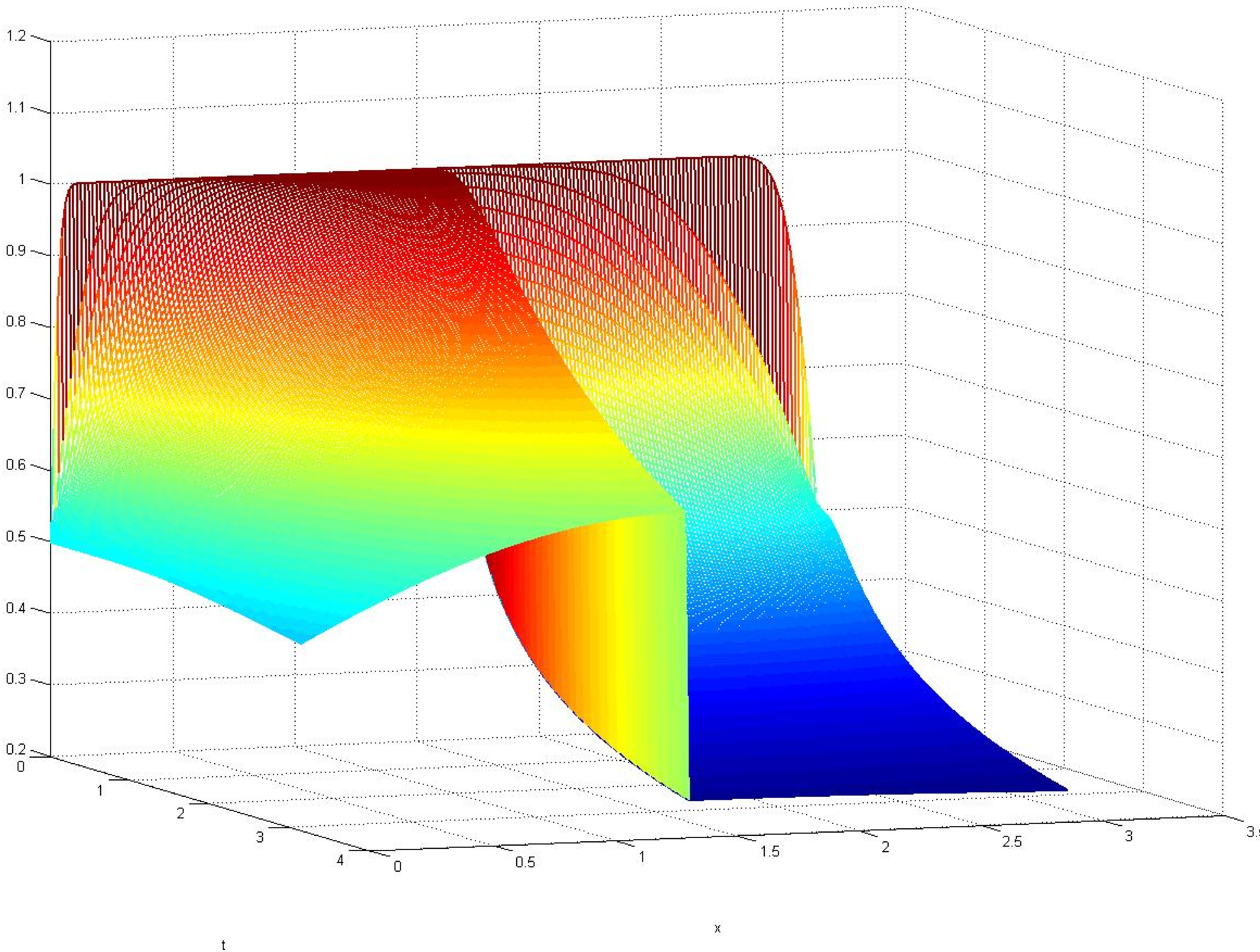
[SWW4] Смолянов О.Г., Вайцзеккер Х.ф., Виттих О. "Диффузия на компактном римановом многообразии и поверхностные меры". ДАН. 2000. Том 371. №4. С.442-447.

[SWW5] Смолянов О.Г., Вайцзеккер Х.ф., Виттих О. "Поверхностные меры на траекториях в римоновых многообразиях, порождаемые диффузиями". ДАН. 2001. Том.377. №4. С.441-446.

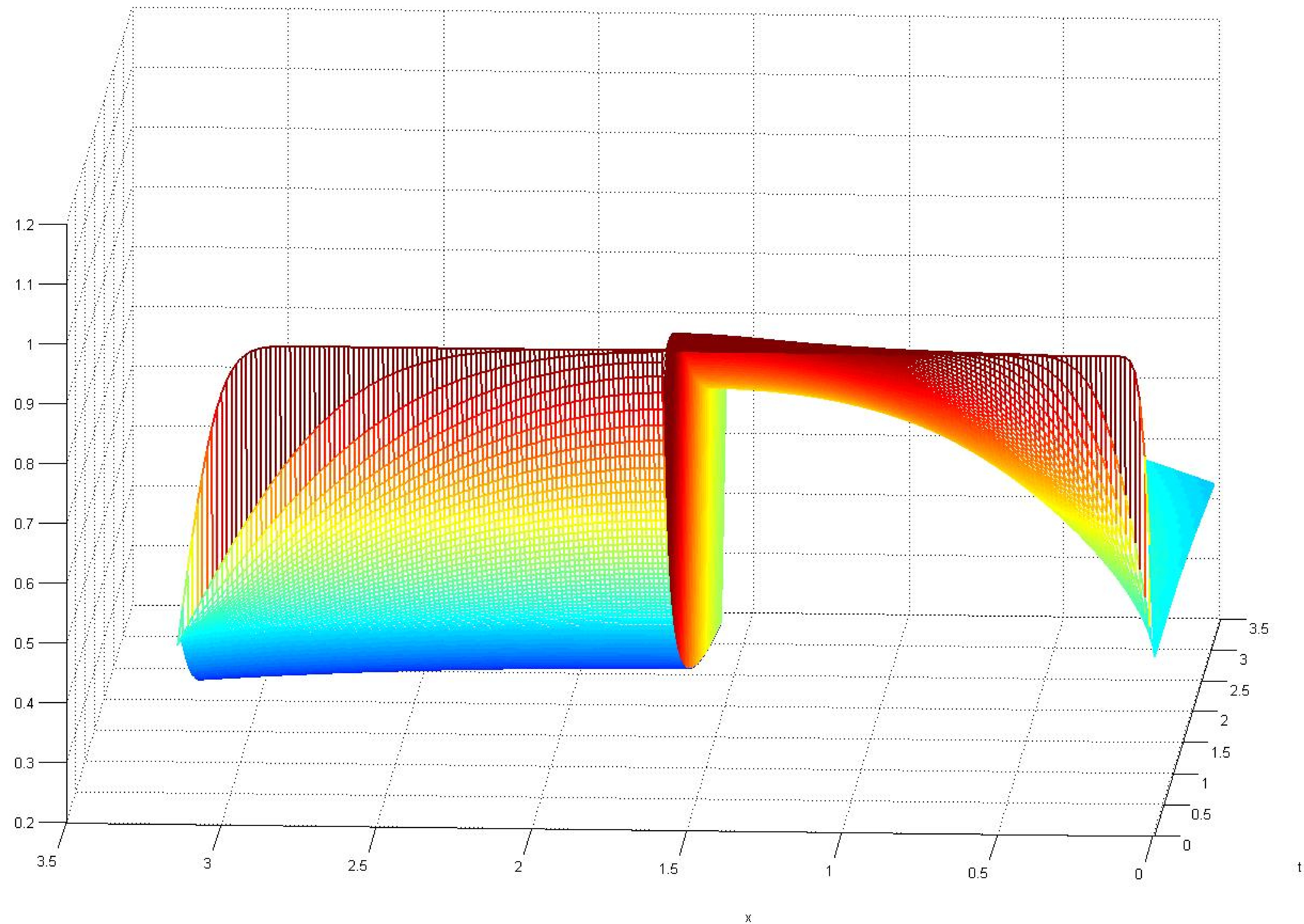
[SWW6] Смолянов О.Г., Вайцзеккер Х.ф., Виттих О. "Поверхностные меры Винера на траекториях в римановых многообразиях". ДАН. 2002. Том 383. №4. С.458-463.



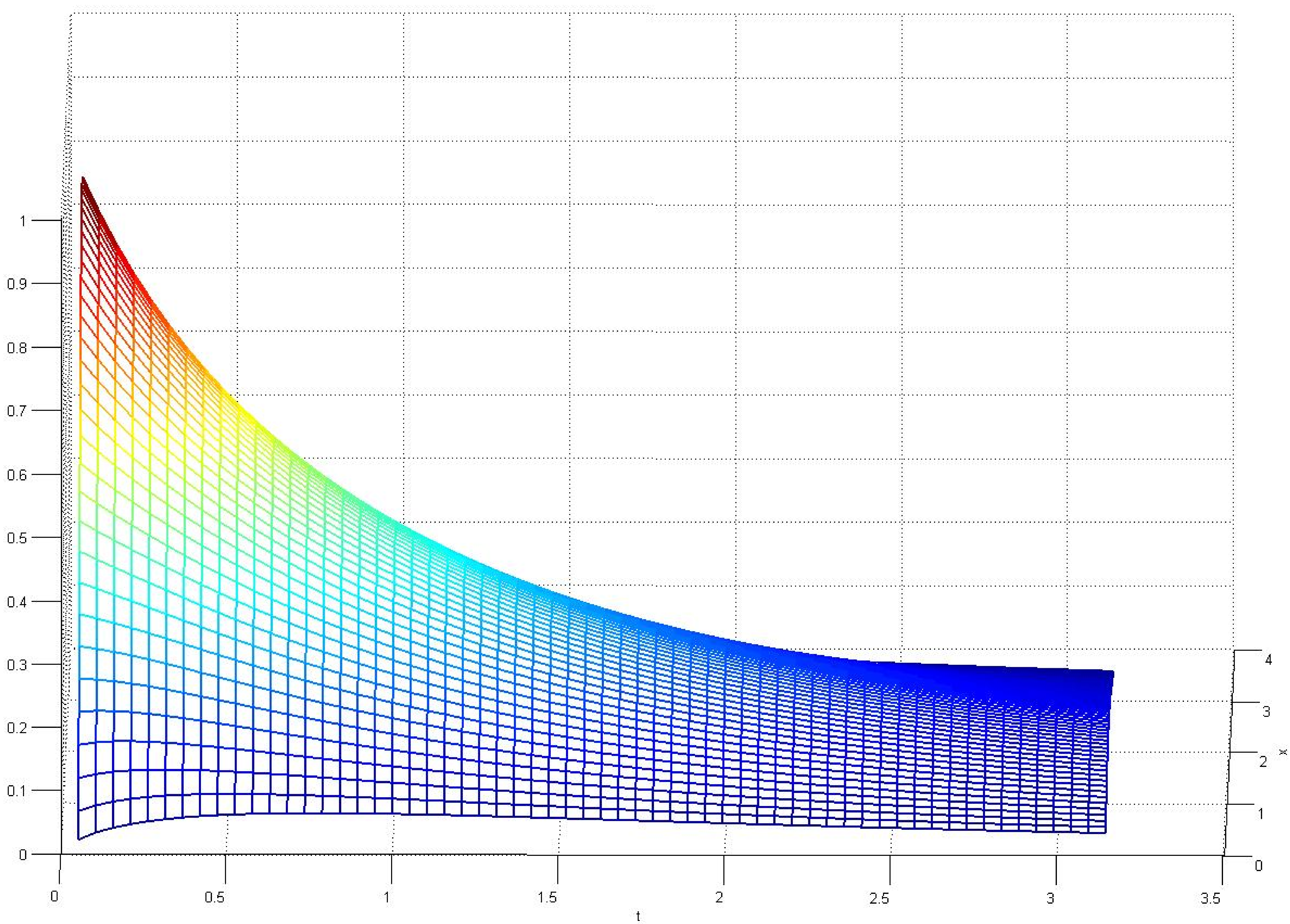
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
x
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
t



1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0
1
2
3
4
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
x
t



1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
x
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
t



1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
t
4
3
2
1
0
x

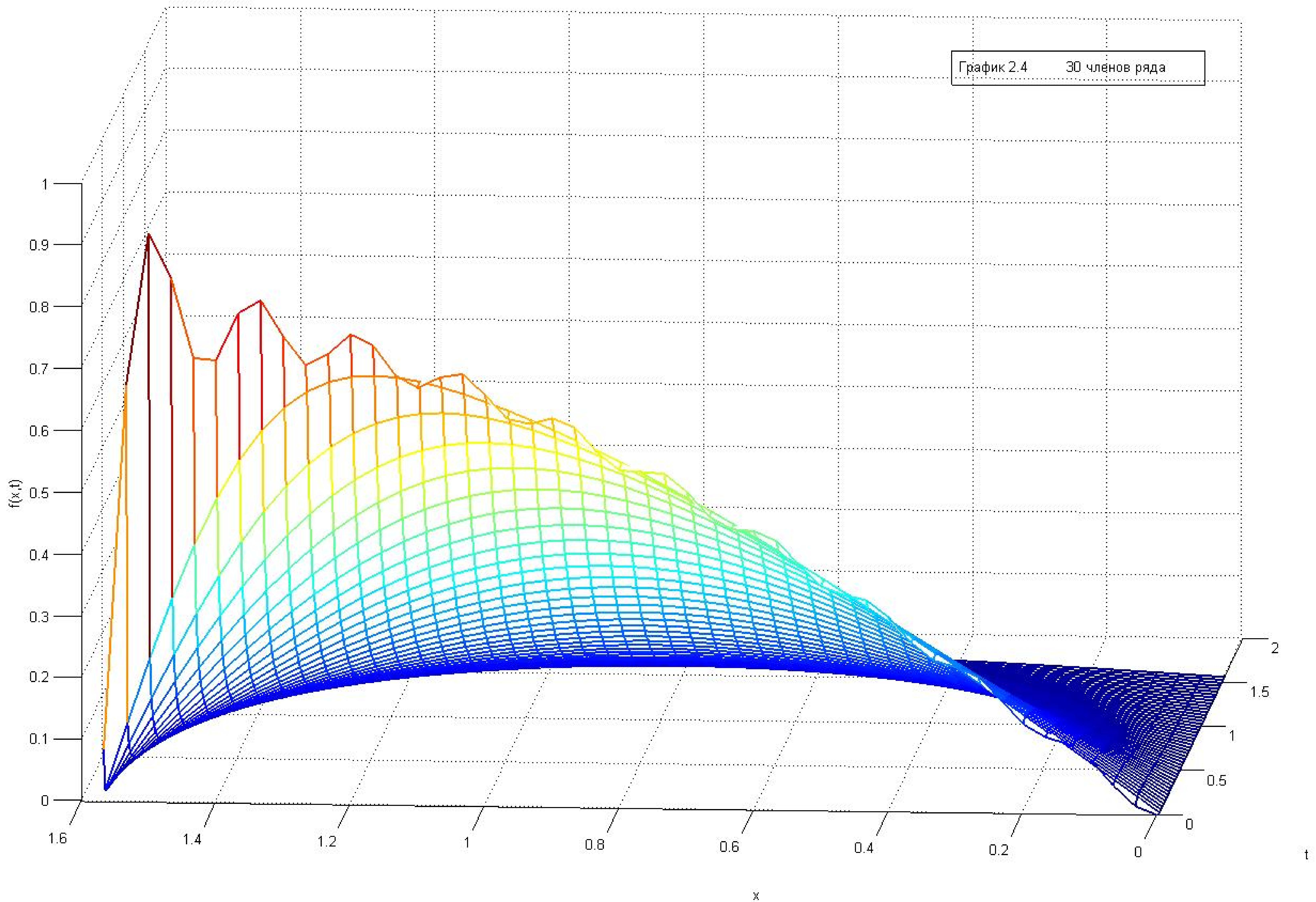


График 2.4 30 членов ряда
f(x,t)
x
t
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
2
1.5
1
0.5
0

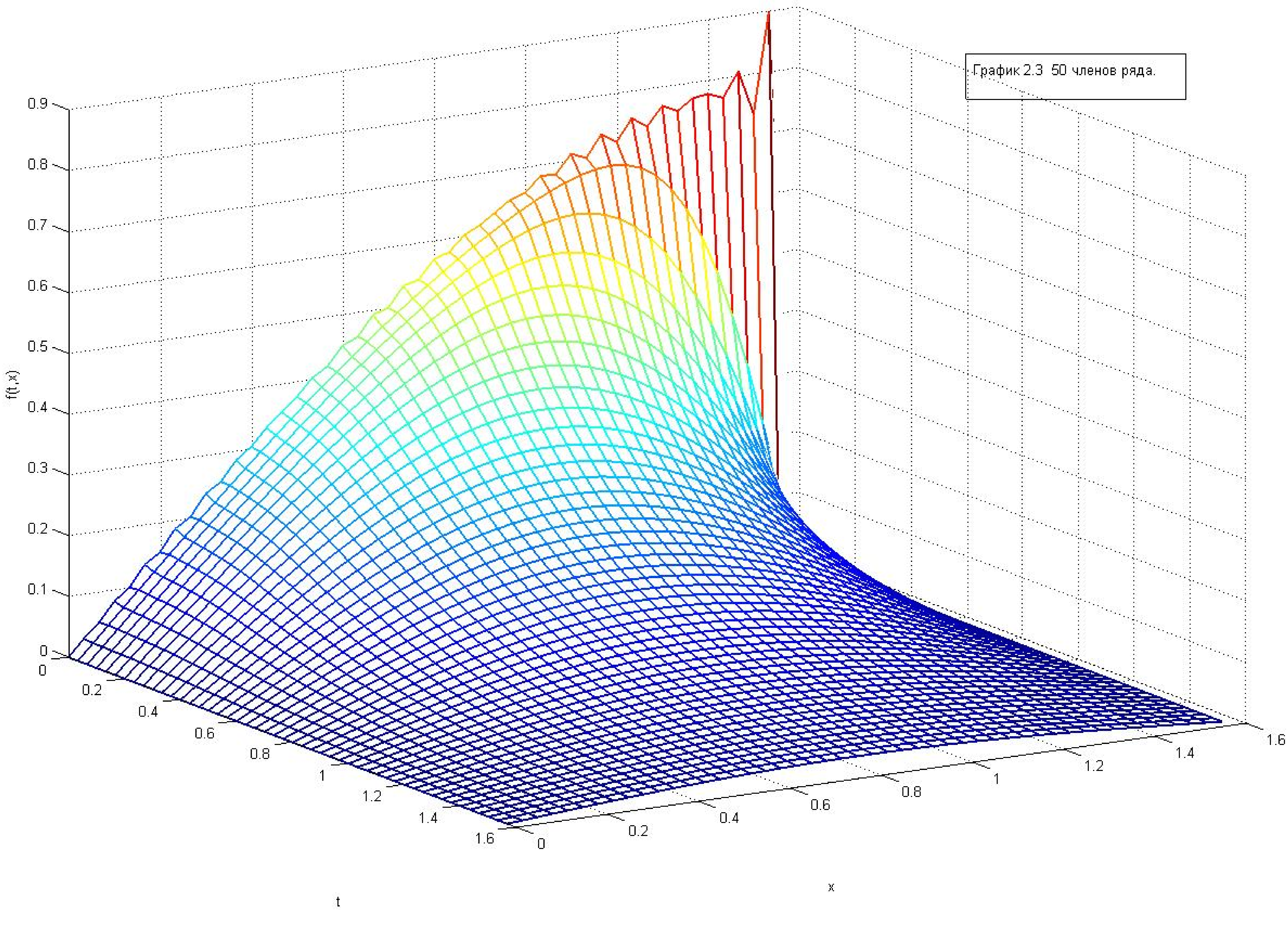


График 2.3 50 членов ряда.
f(t,x)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
t
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

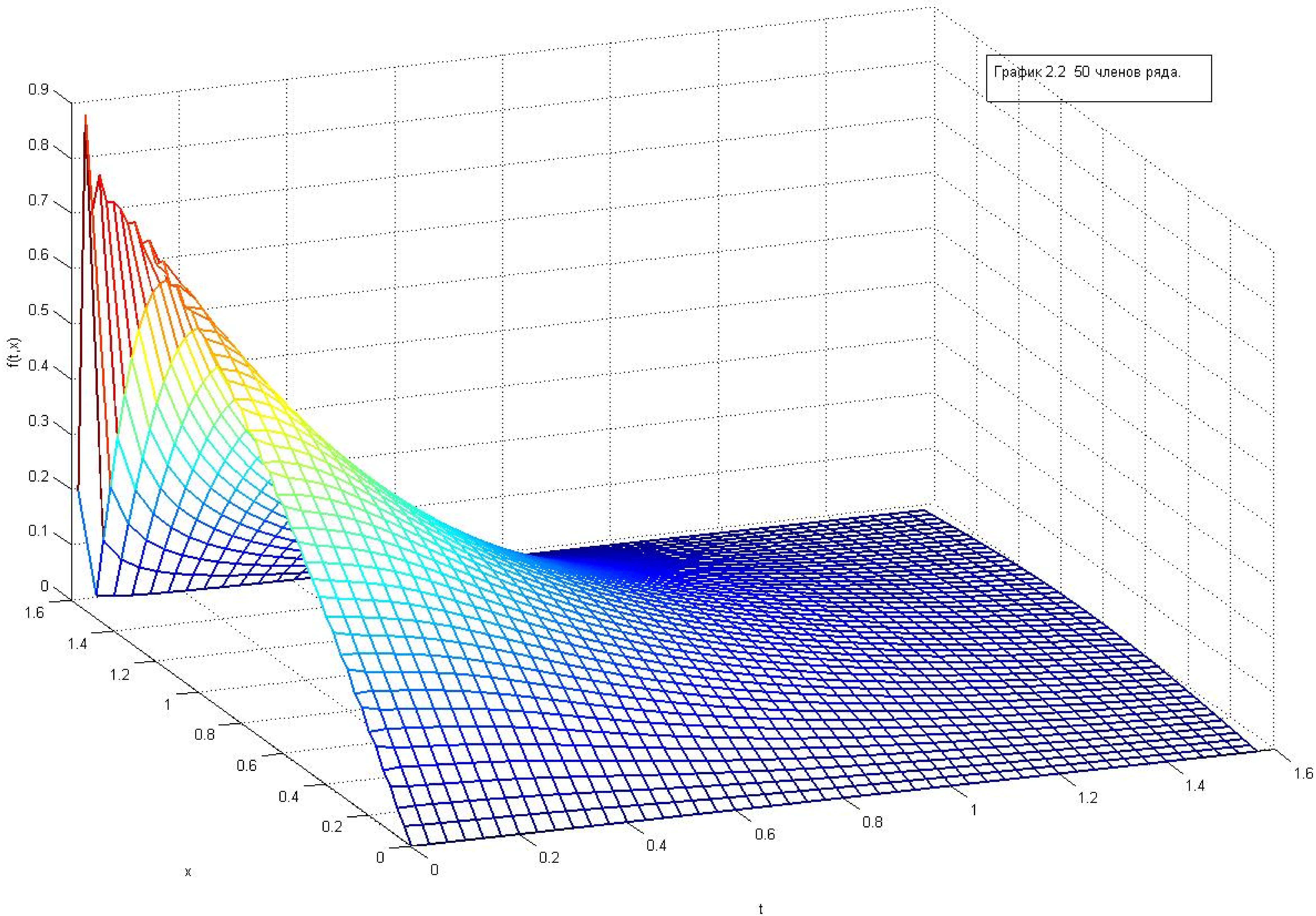


График 2.2 50 членов ряда.
f(t,x)
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
t

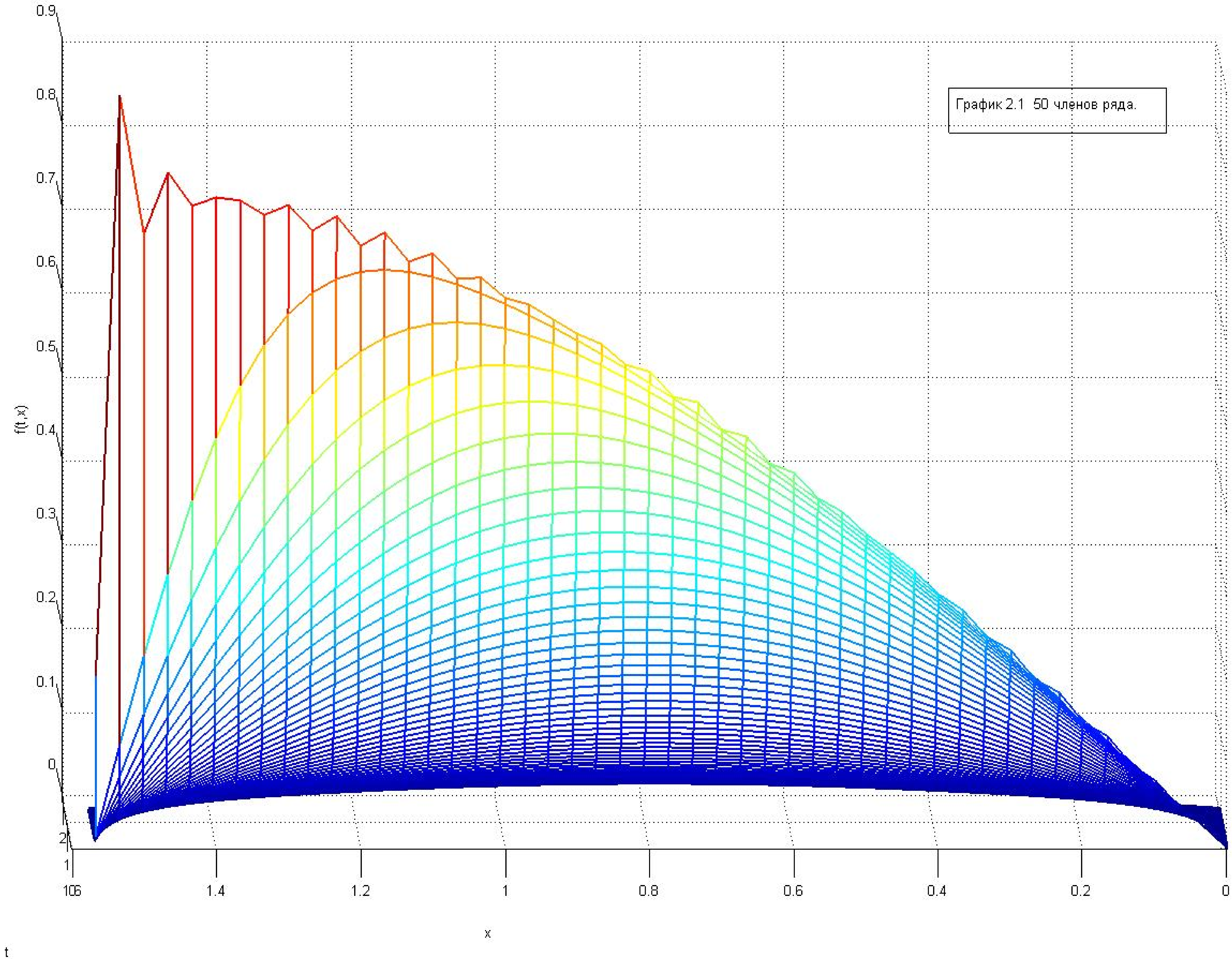


График 2.1 50 членов ряда.
f(t,x)
x
t
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0

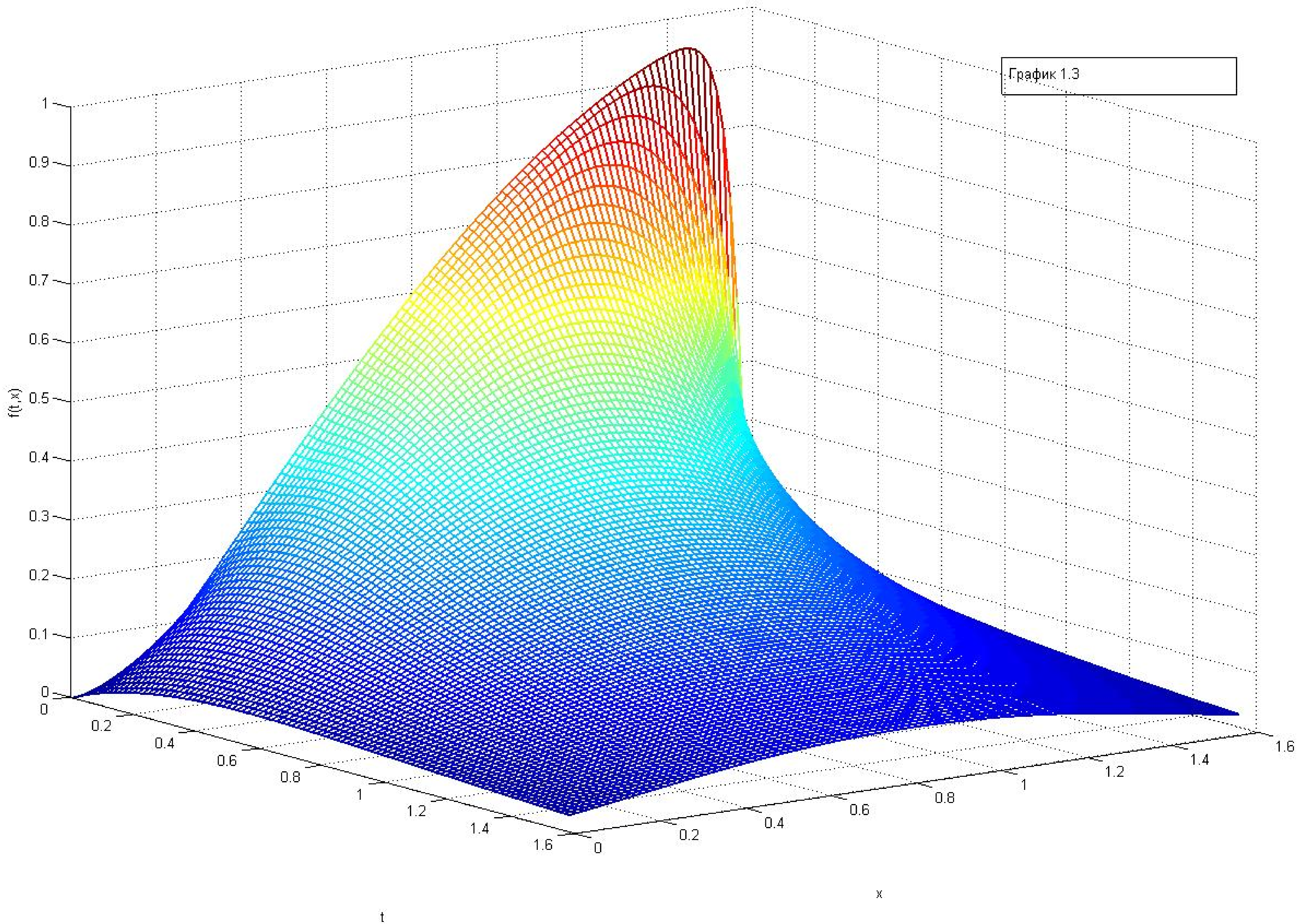


График 1.3
f(t,x)
t
x
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

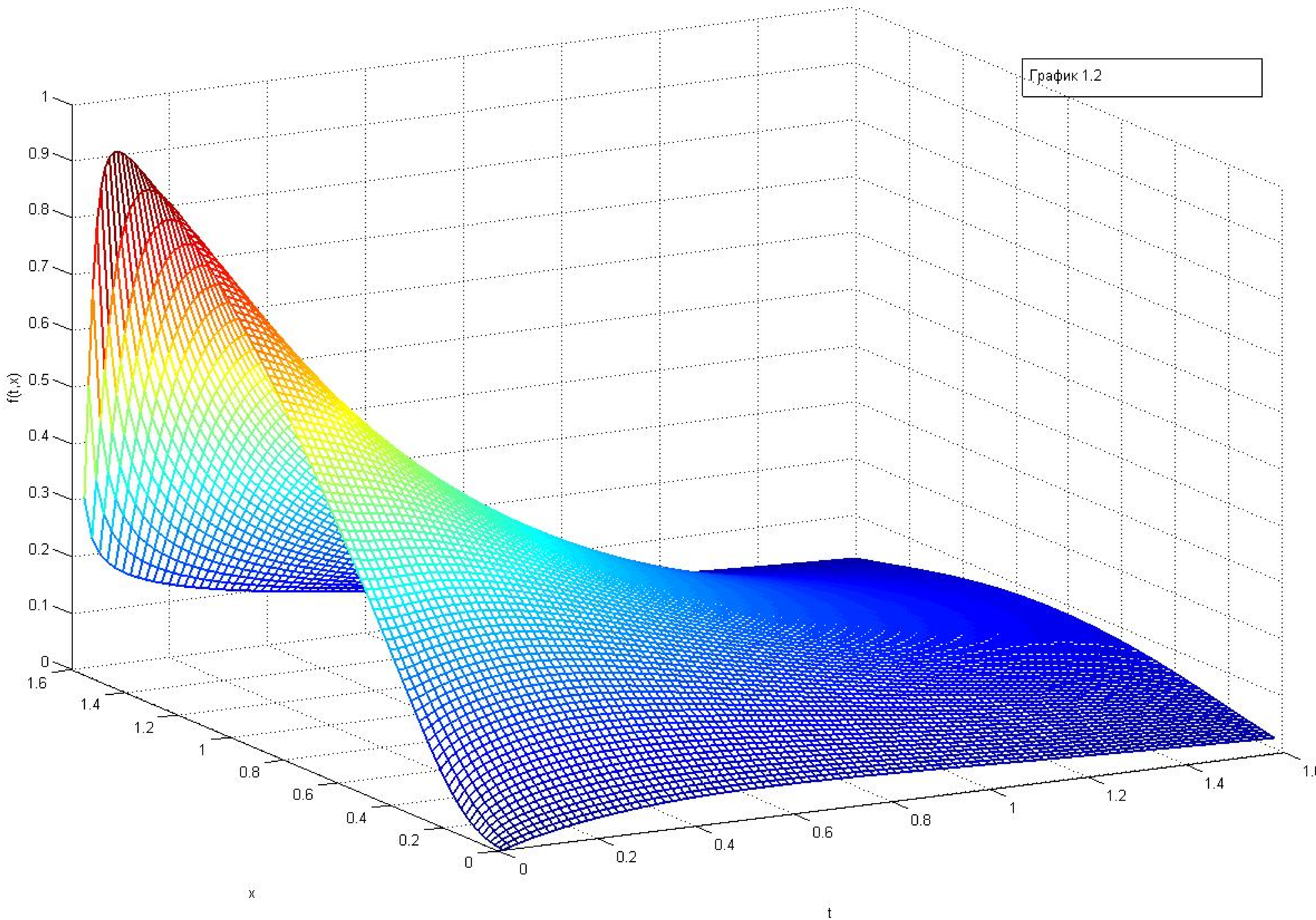


График 1.2
f(t,x)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
t

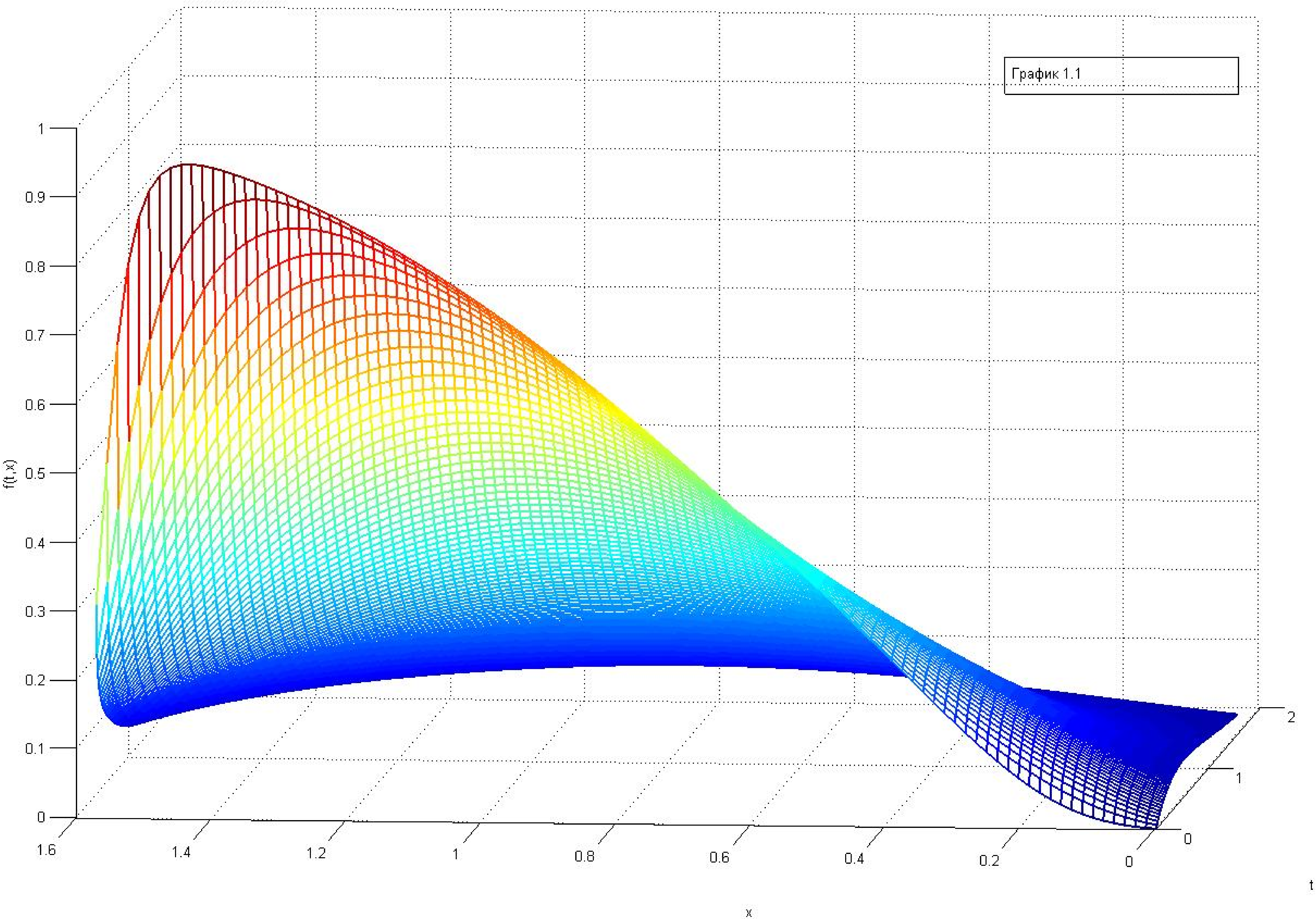
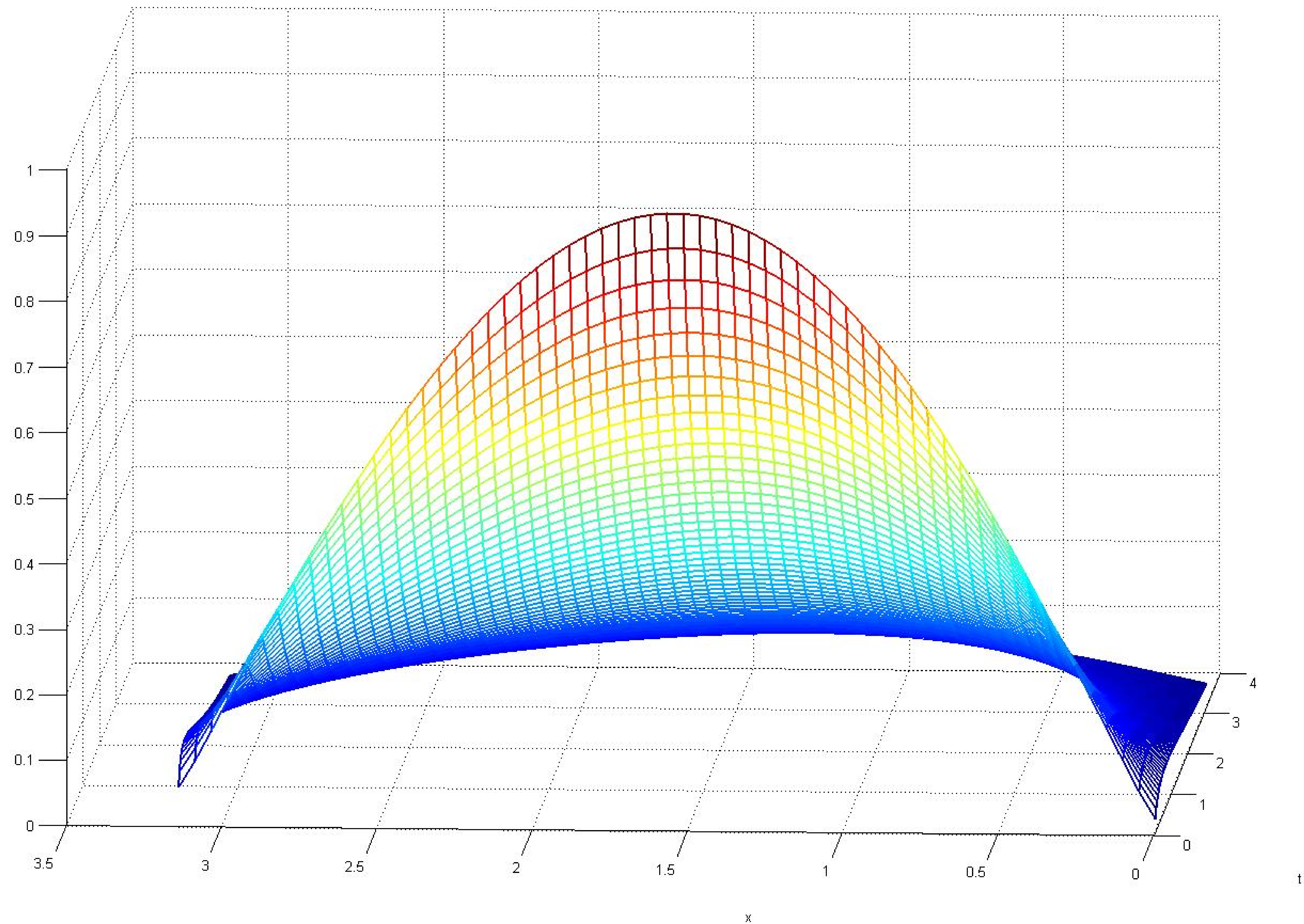
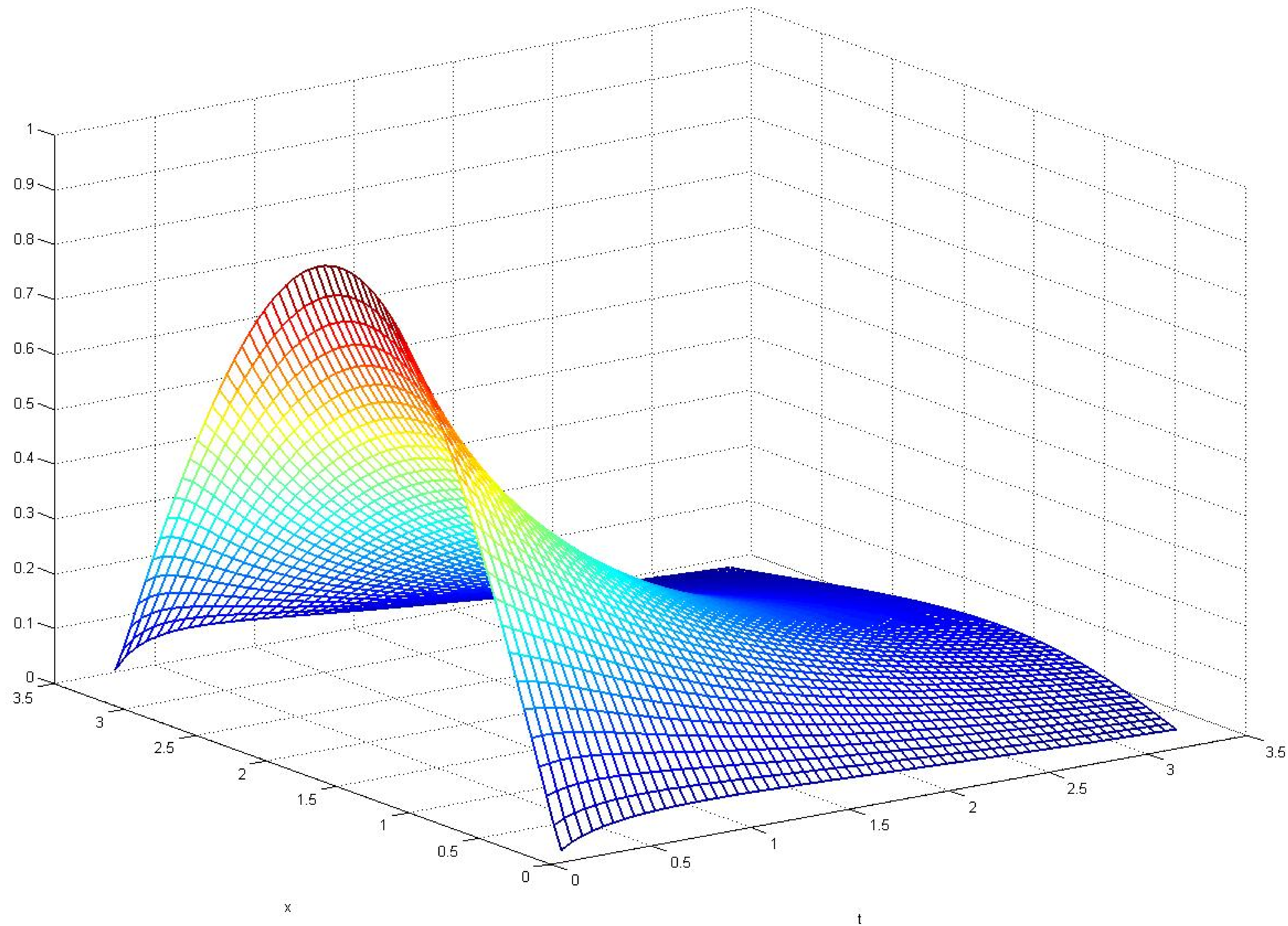


График 1.1
f(t,x)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
x
2
1
0
t


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
x
4
3
2
1
0
t



1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
x
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
t