



**«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана»**

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Математическое моделирование

РАСЧЁТНО - ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к квалификационной работе бакалавра на тему:

Лагранжевы формулы Фейнмана для задач Коши-Дирихле и Коши-Неймана для
параболического уравнения на полупрямой

Студент _____ Александр Владимирович Морозов
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Руководитель квалификационной работы _____ Яна Анатольевна Бутко
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой _____

(Индекс)

(И.О.Фамилия)

« ____ » _____ 20 __ г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН выполнения квалификационной работы бакалавра

Студент Морозов Александр Владимирович

Лагранжевы формулы Фейнмана для задач Коши-Дирихле и Коши-Неймана для параболического уравнения на полупрямой

(Тема квалификационной работы)

№ п/п	Наименование этапов квалификационной работы	Выполнение этапов		Примечание
		Срок	Объем, %	
1.	Обзор литературы	01.09.10	5%	
2.	Вывод лагранжевой формулы Фейнмана для параболического уравнения. Задача Коши-Дирихле.	03.10.10	45%	
3.	Вывод лагранжевой формулы Фейнмана для параболического уравнения. Задача Коши-Неймана.	03.11.10	75%	
4.	Разработка алгоритмов для решения задач Коши-Дирихле и Коши-Неймана для параболического уравнения по формулам Фейнмана.	20.11.10	85%	
5.	Проведение вычислительных экспериментов.	15.12.09	90%	
6.	Оформление диплома.	14.01.11	95%	
7.	Оформление презентации.	01.02.11	98%	
8.	Подготовка к защите.	11.02.11	100%	

Руководитель квалификационной работы _____

Яна Анатольевна Бутко

(Подпись, дата)

(И.О.Фамилия)

Студент _____

Александр Владимирович Морозов

(Подпись, дата)

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой _____
(Индекс)

(И.О.Фамилия)

« ____ » _____ 20 __ г.

ЗАДАНИЕ на выполнение квалификационной работы бакалавра

Студент _____ Морозов Александр Владимирович _____
(Фамилия, имя, отчество)

Лагранжевы формулы Фейнмана для задач Коши-Дирихле и Коши-Неймана для
параболического уравнения на полупрямой

(Тема квалификационной работы)

Источник тематики (НИР кафедры, заказ организаций и т.п.) НИР кафедры _____

Тема квалификационной работы утверждена распоряжением по факультету № _____
от « ____ » _____ 20 __ г.

1. Научно-исследовательская часть

Получение лагранжевых формул Фейнмана, представляющих решения задач Коши-Дирихле
и Коши-Неймана для параболического уравнения на полупрямой. Применение полученных
формул Фейнмана для численного решения задач Коши-Дирихле и Коши-Неймана для
параболического уравнения на полупрямой.

2. Проектно-конструкторская часть

Задача не ставилась

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ

Московский Государственный
Технический Университет им. Н.Э. Баумана

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА ФН-12

Пояснительная записка
к дипломному проекту на тему:

**ЛАГРАНЖЕВЫ ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ЗАДАЧ
КОШИ-ДИРИХЛЕ И КОШИ-НЕЙМАНА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ НА ПОЛУПРЯМОЙ**

Студент–дипломник _____ Морозов А.В.

Научный руководитель
к.ф-м.н., доцент _____ Бутко Я.А.

Москва 2011

Содержание

1	Введение	2
2	Предварительные сведения	4
2.1	Полугруппы операторов и их генераторы	4
2.2	Теорема Чернова	6
3	Лагранжева формула Фейнмана для задачи Коши-Дирихле для параболического уравнения на полупрямой	8
3.1	Задача Коши-Дирихле для параболического уравнения на полупрямой	8
3.2	Семейство операторов, эквивалентное по Чернову полугруппе, разрешающей задачу Коши-Дирихле	9
3.3	Формула Фейнмана для задачи Коши-Дирихле	15
4	Лагранжева формула Фейнмана для задачи Коши-Неймана для параболического уравнения на полупрямой	16
4.1	Задача Коши-Неймана для параболического уравнения на полупрямой	16
4.2	Семейство операторов, эквивалентное по Чернову полугруппе, разрешающей задачу Коши-Неймана	17
4.3	Формула Фейнмана для задачи Коши-Неймана	20
5	Применение формулы Фейнмана для численного решения параболического уравнения на полупрямой	21
5.1	Вычислительный алгоритм	21
5.2	Численное решение некоторых модельных задач	23
	Список литературы	24
A	Приложение	26

1 Введение

Формулами Фейнмана называются представления решений начальных и начально-краевых задач для эволюционных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений в виде пределов конечнократных интегралов от элементарных функций, зависящих от коэффициентов уравнения и начально-краевых условий. Конечнократные интегралы в формулах Фейнмана являются аппроксимациями функциональных интегралов по некоторым мерам гауссовского или фейнмановского типа на множестве траекторий в тех областях, на которых рассматриваются уравнения. Представления решений эволюционных уравнений с помощью функциональных интегралов обычно называются формулами Фейнмана-Каца. Подобные представления полезны для исследования характера решений эволюционных уравнений, в том числе и методами стохастического анализа. В то же время, собственно формулы Фейнмана можно использовать для непосредственных вычислений решений рассматриваемых уравнений. Метод получения формул Фейнмана (а, следовательно, и формул Фейнмана-Каца) для эволюционных уравнений был предложен в работах О.Г.Смолянова и его соавторов в 1999- 2003 г.г. (см. [1], [2], [3], [4], [5], [6]) Этот метод был развит Бутко Я.А. [7] для исследования уравнений диффузии и Шрёдингера на римановом многообразии. Данный метод является принципиально новым и позволяет получать формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца для обширного класса эволюционных уравнений на различных геометрических структурах. Для большинства таких уравнений функциональные интегралы ранее не рассматривались, что, по-видимому, объясняется тем, что переходные вероятности диффузионных процессов, порождаемых такими уравнениями, не выражаются через элементарные функции. В настоящем исследовании вместо этих переходных вероятностей используются их аппроксимации, выражающиеся через элементарные функции, что позволяет получать формулы Фейнмана, пригодные для непосредственных вычислений.

В настоящей работе получено представление решения задачи Коши-

Дирихле и Коши-Неймана для параболического уравнения на полупрямой с переменными коэффициентами, зависящими от координаты в виде лагранжевой формулы Фейнмана. Кроме того, в работе представлен программный алгоритм, позволяющий использовать полученные формулы для численного решения соответствующих начально-краевых задач для параболического уравнения второго порядка.

2 Предварительные сведения

2.1 Полугруппы операторов и их генераторы

Определение 2.1 [8] Пусть X — банахово пространство. Семейство ограниченных линейных операторов $(T_t)_{t \geq 0}$ в X называется сильно непрерывной операторной полугруппой, если

1. $T_0 = Id, T_{t+s} = T_t T_s, t, s \geq 0,$
2. $\lim_{t \rightarrow 0} \|T_t x - x\| = 0, x \in X,$

где Id это тождественный оператор на X .

Определение 2.2 Если норма $\|T_t\| \leq 1,$ то сильно непрерывная операторная полугруппа называется сжимающей.

Такие полугруппы естественно возникают в теории дифференциальных уравнений и в квантовой теории.

Обозначим за $\mathcal{L}(X, Y)$ пространство непрерывных линейных операторов из X в $Y,$ где X и Y — линейные топологические пространства.

Определение 2.3 Сильная операторная топология — это слабейшая топология на $\mathcal{L}(X, Y)$ в которой отображения

$$E_x : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow Y,$$

заданные равенством $E_x(T) = Tx$ непрерывны для любого $x \in X.$

База окрестностей нуля задается множествами вида

$$\{S : S \in \mathcal{L}(X, Y), \|Sx_i\|_Y \leq \varepsilon, i = (1, \dots, n)\},$$

где x_i — конечный набор элементов из $X,$ а $\varepsilon > 0.$

В этой топологии последовательность операторов T_α сходится к $T,$ тогда и только тогда, когда $\|T_\alpha x - Tx\|_Y \rightarrow 0$ для любого $x \in X.$

Предел в сильной операторной топологии обозначается $s\text{-lim}.$

Определение 2.4 Функция $F(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ называется сильно непрерывной, если для всех $x \in X$ отображения $t \rightarrow F(t)x$ являются непрерывными функциями из \mathbb{R}_+ в $X.$

Положим

$$D(L) := \left\{ x \in X : \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \right\},$$

$$Lx := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t x - x}{t}, x \in D(L).$$

Оператор L с указанной областью определения $D(L)$ называется генератором или производящим оператором полугруппы $(T_t)_{t \geq 0}$.

Лемма 2.5 [8] *Для всякой непрерывной полугруппы операторов $\{T_t\}_{t \geq 0}$ справедливы следующие утверждения:*

1) *Оператор C - генератор полугруппы - является плотно определенным и замкнутым;*

2) *Для всякого $x \in \text{Dom}(C)$ верны равенства*

$$\frac{d}{dt} T_t x = C T_t x = T_t C x,$$

3) *Для всякого $x \in X$ верно равенство*

$$T_t x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{(t \frac{T_\varepsilon - Id}{\varepsilon}) x},$$

Причем сходимость равномерна на отрезках в $[0, +\infty)$.

Лемма 2.6 [9] *Пусть C -генератор сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t \geq 0}$ в банаховом пространстве X . Пусть D - подмножество $D(C)$, где $D(C)$ - область определения C . Пусть $D(C)$ плотно в X и инвариантно относительно $(T_t)_{t \geq 0}$, т.е. $T_t x \in D$, для любого $x \in D$ и $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда D - Существенная область определения C .*

Определение 2.7 *Область D называется существенной областью определения замкнутого оператора C , если замыкание сужения на D , совпадает с C .*

Теорема 2.8 (Об ограниченном линейном отображении [10])

Пусть T -ограниченное линейное преобразование из нормированного линейного пространства $(V_1, \|\cdot\|_{V_1})$ в полное нормированное линейное пространство $(V_2, \|\cdot\|_{V_2})$. Тогда T единственным образом может быть расширено до ограниченного линейного преобразования с сохранением нормы из пополнения пространства V_1 в $(V_2, \|\cdot\|_{V_2})$.

Пример 2.9 Пусть A — самосопряженный (возможно неограниченный) оператор в гильбертовом пространстве H . Тогда унитарные операторы e^{itA} , $t \in \mathbb{R}^1$, образуют сильно непрерывную (полу)группу с генератором iA .

Пример 2.10 Пусть A — самосопряженный (возможно неограниченный) оператор в гильбертовом пространстве H , причем $A \geq 0$. Тогда операторы e^{-tA} , $t \geq 0$, образуют сильно непрерывную группу с генератором $-A$.

2.2 Теорема Чернова

Обозначим за $\mathcal{L}(X)$ пространство всех линейных, непрерывных отображений $T : X \rightarrow X$, то есть таких линейных операторов T , для которых $\text{Dom}(T) = X$.

Определение 2.11 Производной в нуле функции $F : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{L}(X)$, $\varepsilon > 0$ называют линейное отображение $F'(0) : D(F'(0)) \rightarrow X$ такое, что

$$F'(0)g := \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{F(t)g - g}{t} \right),$$

где $D(F'(0))$ — векторное пространство всех элементов $g \in X$, для которых существует этот предел.

Теорема 2.12 (Теорема Чернова). Пусть X — банахово пространство, отображение

$F : [0, +\infty) \rightarrow L(X)$ непрерывно на каждом векторе, $F(0) = Id$, $\|F(t)\| \leq e^{at}$ с некоторой постоянной $a \in \mathbb{R}^1$, причем есть такое плотное линейное подпространство $D \subset X$, что для всех $x \in D$ существует $F'(0)x$. Предположим, что $F'(0)$ на D обладает замыканием S , являющимся генератором сильно непрерывной полугруппы $\{T_t\}_{t \geq 0}$. Тогда для всякого $x \in X$ имеем $F(t/n)^n x \rightarrow T_t x$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по t из всякого отрезка.

Семейство операторов $(F(t))_{t \geq 0}$ называют эквивалентным по Чернову полугруппе $(T_t)_{t \geq 0}$, если это семейство удовлетворяет всем условиям теоремы Чернова по отношению к этой полугруппе.

Определение 2.13 Если все $F(t)$ — интегральные операторы с ядрами, которые являются элементарными функциями, то формула

$$T_t x = \lim_{n \rightarrow \infty} F(t/n)^n x$$

называется лагранжевой формулой Фейнмана.

3 Лагранжева формула Фейнмана для задачи Коши-Дирихле для параболического уравнения на полу-прямой

Обозначим за $C_0^b[0, \infty)$, банахово пространство непрерывных и ограниченных функций таких, что $\forall \varphi \in C_0^b[0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$. Норма на $C_0^b[0, \infty)$ задается формулой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x)|.$$

3.1 Задача Коши-Дирихле для параболического уравнения на полупрямой

Пусть оператор D определен на области

$$\text{Dom}D = \{\varphi(x) \in C_0^b[0, \infty) : D\varphi \in C_0^b[0, \infty)\}$$

и действует следующим образом: $D\varphi(x) = \frac{1}{2}a(x)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + b(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} + V(x)\varphi(x)$, где $a(\cdot), b(\cdot), V(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ограничены и непрерывны и $\forall x \in [0, \infty), a(x) > a_0 > 0$.

Для $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, где $f(t, \cdot) \in C_0^b[0, \infty)$ и для всех $x \in [0, \infty)$ рассмотрим задачу Коши-Дирихле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) &= Df(t, x), & t > 0, x \in [0, \infty), \\ f(0, x) &= f_0(x), & x \in [0, \infty), \\ f(t, 0) &= 0, & t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Предположение 3.1 На пространстве $C_0^b[0, \infty)$ существует сильно непрерывная полугруппа операторов $(T_t^D)_{t \geq 0}$ (с генератором D), разрешающая задачу (3.1).

Предположение 3.2 Множество

$$G_D = \{\varphi(x) \in C_0^b[0, \infty) : \varphi', \varphi'', \varphi''' \in C_0^b[0, \infty)\} \cap \text{Dom}D, \quad (3.2)$$

является существенной областью определения генератора полугруппы

$(T_t^D)_{t \geq 0}$.

3.2 Семейство операторов, эквивалентное по Чернову подгруппе, разрешающей задачу Коши-Дирихле

Рассмотрим семейство операторов $(F(t))_{t \geq 0}$ такое, что $F(0) = Id$ и для любого $t > 0$ оператор $F(t)$ определен следующим образом: $F(t)\varphi(x) = e^{tV(x)}T_t^\Delta T_t^\nabla f(x)$, где $e^{tV(x)}$ — оператор умножения на функцию $e^{tV(x)}$,

$$T_t^\Delta \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{2a(x)t}} \right) \varphi(y) dy,$$

а $T_t^\nabla \varphi(x)$ определен следующим образом:

доопределим $\varphi(x)$ на $(-\infty, 0)$ нечетным образом и скажем, что $T_t\varphi(x) = \varphi(x + b(x)t)$. Подставляя эти выражения получим:

$$F(t)\varphi(x) = e^{tV(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{2a(x)t}} \right) \varphi(y + b(y)t) dy. \quad (3.3)$$

Утверждение 3.3 Семейство операторов $F(t)$ действует из пространства $C_0^b[0, \infty)$ в него же.

Доказательство: Пусть функция $\varphi(x) \in C_0^b[0, \infty)$, тогда функция $T_t^\nabla \varphi(x) \in C_0^b[0, \infty)$. Рассмотрим функцию $F(t)\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} |F(t)\varphi(x)| &= \left| e^{tV(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{2a(x)t}} \right) T_t^\nabla \varphi(y) dy \right| \leq \\ &\leq e^{tV(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_0^\infty \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{2a(x)t}} \right| dy \sup_{x \in [0, \infty)} |T_t^\nabla \varphi(x)| \leq \\ &\leq e^{tV(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \left(\int_0^\infty \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} \right| dy + \int_0^\infty \left| e^{-\frac{(x+y)^2}{2a(x)t}} \right| dy \right) \sup_{x \in [0, \infty)} |T_t^\nabla \varphi(x)| = \\ &= e^{tV(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \left(\int_0^\infty \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} \right| dy + \int_{-\infty}^0 \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} \right| dy \right) \sup_{x \in [0, \infty)} |T_t^\nabla \varphi(x)| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{tV(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} \right| dy \sup_{x \in [0, \infty)} |T_t^\nabla \varphi(x)| = e^{tV(x)} \sup_{x \in [0, \infty)} |T_t^\nabla \varphi(x)| \leq \\
&\leq e^{t\|V(x)\|_\infty} \|\varphi\|_\infty.
\end{aligned}$$

Таким образом функция $F(t)\varphi$ ограничена; $F(t)\varphi$ так же является непрерывной, как композиция непрерывных функций.

Проверим выполнение краевых условий:

$$\begin{aligned}
(F(t)\varphi)(0) &= e^{tV(0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{y^2}{2a(0)t}} - e^{-\frac{y^2}{2a(0)t}} \right) \varphi(y + b(y)t) dy = 0, \\
(I\varphi)(t, 0) &= 0 \Rightarrow (F'(0)\varphi)(t, 0) = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно $F(t)\varphi \in C_0^b$. ■

Теорема 3.4 Семейство операторов (3.3) эквивалентно по Чернову полугруппе операторов $(T_t^D)_{t \geq 0}$, разрешающей задачу (3.1), т.е. решение этого задачи может быть получено по формуле Фейнмана:

$$f(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(t/n)]^n f_0(x). \quad (3.4)$$

Доказательство: Докажем, что условия теоремы Чернова выполняются для семейства операторов $F(t)$. Утверждение $F(0) = Id$ очевидно. Дальнейшее доказательство разобьем на несколько частей.

Лемма 3.5 $\|F(t)\| \leq e^{ta}$ с некоторой постоянной $a \in \mathbb{R}^1$ для всех $t \geq 0$.

Доказательство: По свойствам композиции операторов:

$$\|F(t)\| = \|e^{tV(x)} T_t^\Delta T_t^\nabla\| \leq \|e^{tV(x)}\| \cdot \|T_t^\Delta\| \cdot \|T_t^\nabla\|,$$

Из непрерывности и ограниченности $V(x)$ следует $\|e^{tV(x)}\| \leq e^{t\|V(x)\|_\infty}$.

Рассмотрим норму $\|T_t^\Delta\|$:

$$\|T_t^\Delta\| = \sup_{\|\varphi\|_\infty \neq 0} \frac{\|T_t^\Delta \varphi\|_\infty}{\|\varphi\|_\infty} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\|\varphi\|_\infty \neq 0} \frac{\sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{2a(x)t}} \right) \varphi(y) dy \right|}{\sup_{x \in [0, \infty)} |\varphi(x)|} \leq \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|_\infty \neq 0} \frac{\sup_{x \in [0, \infty)} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \right| \cdot \int_0^\infty \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{2a(x)t}} \right| dy \cdot \sup_{x \in [0, \infty)} |\varphi(x)| \right\}}{\sup_{x \in [0, \infty)} |\varphi(x)|} \leq \\
&\leq \sup_{x \in [0, \infty)} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \right| \cdot \int_0^\infty \left(\left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} \right| + \left| e^{-\frac{(x+y)^2}{2a(x)t}} \right| \right) dy \right\} = \\
&= \sup_{x \in [0, \infty)} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \right| \left(\int_0^\infty \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} \right| dy + \int_0^\infty \left| e^{-\frac{(x+y)^2}{2a(x)t}} \right| dy \right) \right\} = \\
&= \sup_{x \in [0, \infty)} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \right| \left(\int_0^\infty \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} \right| dy + \int_{-\infty}^0 \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} \right| dy \right) \right\} = \\
&= \sup_{x \in [0, \infty)} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \right| \cdot \int_{-\infty}^\infty \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} \right| dy \right\} = 1.
\end{aligned}$$

Так как $T_t^\nabla \varphi(x) = \varphi(x + b(x)t)$, то $\|T_t^\nabla\| = 1$.

Таким образом получаем $\|F(t)\| \leq \|e^{tV(x)}\| \cdot \|T_t^\Delta\| \cdot \|T_t^\nabla\| \leq e^{t\|V(x)\|}$, что и требовалось доказать. ■

Лемма 3.6 На множестве G_D , заданном формулой (3.2), замыкание оператора $F'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - Id}{t}$ совпадает с генератором полугруппы $(T_t^D)_{t \geq 0}$.

Доказательство: Докажем, что $\forall \varphi \in G_D \Rightarrow F'(0)\varphi = D\varphi$. Для начала докажем, что $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t^\Delta \varphi - \varphi}{t}(x) = \left(\frac{1}{2} a(x) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)(x)$:

Пусть $\varphi \in G_D$, продолжим эту функцию нечетным образом на луч $(-\infty, 0)$, при этом гладкость функции не изменится. Рассмотрим функцию $(T_t^\Delta \varphi - \varphi)(x)$:

$$(T_t^\Delta \varphi - \varphi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{2a(x)t}} \right) \varphi(y) dy - \varphi(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} \varphi(y) dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} \varphi(x) dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} (\varphi(y) - \varphi(x)) dy.
\end{aligned}$$

Разложим $\varphi(y)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа с центром в точке x :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} (\varphi(y) - \varphi(x)) dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} (\varphi'(x)(y-x) + \frac{1}{2}\varphi''(x)(y-x)^2 + \\
&+ \frac{1}{3!}\varphi'''(\xi)(y-x)^3) dy.
\end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} \varphi'(x)(y-x) dy,$$

тогда $I_1 = 0$, так как интеграл по \mathbb{R} от нечетной функции равен 0.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} \frac{1}{2}\varphi''(x)(y-x)^2 dy = \frac{\varphi''(x)}{2\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} (y-x)^2 dy = \\
&= \frac{\varphi''(x)}{2\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(x)t}{x-y} (y-x)^2 d\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}}\right) = \\
&= \frac{\varphi''(x)a(x)t}{2\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-y) d\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}}\right) = \frac{\varphi''(x)a(x)t}{2\sqrt{2\pi a(x)t}} \left((x-y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \right. \\
&\left. + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} dy \right) = t \left(\frac{1}{2}a(x) \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) (x).
\end{aligned}$$

Здесь было использовано свойство гауссовой экспоненты

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} dy = 1.$$

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} \frac{1}{3!} \varphi'''(\xi) (y-x)^3 dy \right| \leq \\ &\leq \frac{\sup_{\eta \in \mathbb{R}} |\varphi'''(\eta)|}{6\sqrt{2\pi a(x)t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(x)t}} (y-x)^3 \right| dy. \end{aligned}$$

Введем замену переменных $z = x - y$, тогда:

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \frac{\sup_{\eta \in \mathbb{R}} |\varphi'''(\eta)|}{6\sqrt{2\pi a(x)t}} \left| \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2a(x)t}} z^3 dz \right| = \frac{\sup_{\eta \in \mathbb{R}} \varphi'''(\eta) a(x)t}{3\sqrt{2\pi a(x)t}} \left| \int_0^{\infty} z^2 d\left(e^{-\frac{z^2}{2a(x)t}}\right) \right| = \\ &= \frac{\sup_{\eta \in \mathbb{R}} \varphi'''(\eta) a(x)t}{3\sqrt{2\pi a(x)t}} \left| z^2 e^{-\frac{z^2}{2a(x)t}} \Big|_0^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2a(x)t}} dz \right| = \\ &= \frac{2 \sup_{\eta \in \mathbb{R}} \varphi'''(\eta) a^2(x)t^2}{3\sqrt{2\pi a(x)t}} \left| e^{-\frac{z^2}{2a(x)t}} \Big|_0^{\infty} \right| = \frac{2 \sup_{\eta \in \mathbb{R}} \varphi'''(\eta) a^2(x)t^2}{3\sqrt{2\pi a(x)t}}. \end{aligned}$$

Так как φ''' ограниченная функция на \mathbb{R} , то

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|I_3|}{t}(x) \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sup_{\eta \in \mathbb{R}} \varphi'''(\eta) a^2(x)t}{3\sqrt{2\pi a(x)t}} = 0.$$

Таким образом получаем:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t^{\Delta} \varphi - \varphi}{t}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_1 + I_2 + I_3}{t}(x) = \left(\frac{1}{2} a(x) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) (x).$$

Докажем теперь, что $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t^{\nabla} \varphi - \varphi}{t}(x) = \left(b(x) \frac{d\varphi}{dx} \right) (x)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t^{\nabla} \varphi - \varphi}{t}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + b(x)t) - \varphi(x)}{t}.$$

Разложим функцию $\varphi(x + b(x)t)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа с центром в точке x , тогда:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + b(x)t) - \varphi(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)(tb(x)) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi)(t^2b^2(x))}{t} = b(x)\frac{d\varphi}{dx}(x).$$

Используя, доказанные утверждения получаем:

$$\begin{aligned} F'(0)\varphi(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[e^{tV(x)}T_t^\Delta T_t^\nabla \varphi(x) - \varphi(x)]}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[e^{tV(x)}(T_t^\Delta T_t^\nabla \varphi(x) - \varphi(x)) + e^{tV(x)}\varphi(x) - \varphi(x)]}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[T_t^\Delta T_t^\nabla \varphi(x) - \varphi(x)]}{t} + V(x)\varphi(x) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[T_t^\Delta(T_t^\nabla \varphi(x) - \varphi(x)) + T_t^\Delta \varphi(x) - \varphi(x)]}{t} + V(x)\varphi(x) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[T_t^\nabla \varphi(x) - \varphi(x)]}{t} + \frac{1}{2}a(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + V(x)\varphi(x) = \\ &= b(x)\frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{1}{2}a(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}\varphi(x) + V(x)\varphi(x) = D\varphi(x). \end{aligned}$$

Так как $(F(t)\varphi)(0) = 0$ и $\varphi(0) = 0$, то $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)\varphi - \varphi}{t}(0) = 0$, следовательно $(F'(0)\varphi)(0) = 0$. Из вышедоказанного следует, что $F'(0)\varphi = D\varphi, \forall \varphi \in G_D$ на множестве G_D . ■

Таким образом для семейства операторов $\{F(t)\}_{t \geq 0}$ по отношению к полугруппе $(T_t^D)_{t \geq 0}$ выполняются все условия теоремы Чернова, что и требовалось доказать. ■

3.3 Формула Фейнмана для задачи Коши-Дирихле

Для численного решения задачи (3.1) запишем лагранжеву формулу Фейнмана в явном виде. Подставляя в формулу (3.4) явные выражения операторов, получим:

$$\begin{aligned}
f(t, x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} ([F(t/n)]^n f_0)(t, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{t}{n}V(x_0)}}{\sqrt{2a(x_0)\pi\frac{t}{n}}} \int_0^\infty \left(e^{\frac{-(x_0-x_1)^2}{2a(x_0)\frac{t}{n}}} - e^{\frac{-(x_0+x_1)^2}{2a(x_0)\frac{t}{n}}} \right) \times \\
&\times \frac{e^{\frac{t}{n}V(x_1+\frac{t}{n}b(x_1))}}{\sqrt{2a(x_1+\frac{t}{n}b(x_1))\pi\frac{t}{n}}} \int_0^\infty \left(e^{\frac{-(x_1+\frac{t}{n}b(x_1)-x_2)^2}{2a(x_1+\frac{t}{n}b(x_1))\frac{t}{n}}} - e^{\frac{-(x_1+\frac{t}{n}b(x_1)+x_2)^2}{2a(x_1+\frac{t}{n}b(x_1))\frac{t}{n}}} \right) \times \dots \\
&\dots \times \frac{e^{\frac{t}{n}V(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1}))}}{\sqrt{2a(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1}))\pi\frac{t}{n}}} \int_0^\infty \left(e^{\frac{-(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1})-x_n)^2}{2a(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1}))\frac{t}{n}}} - e^{\frac{-(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1})+x_n)^2}{2a(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1}))\frac{t}{n}}} \right) \times \\
&\times f_0 \left(x_n + b(x_n)\frac{t}{n} \right) dx_n \dots dx_1 = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{t}{n}V(x_0)}}{\sqrt{2a(x_0)\pi\frac{t}{n}}} \underbrace{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty}_{n \text{ раз}} \left(e^{\frac{-(x_0-x_1)^2}{2a(x_0)\frac{t}{n}}} - e^{\frac{-(x_0+x_1)^2}{2a(x_0)\frac{t}{n}}} \right) e^{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^{n-1} V(x_i+\frac{t}{n}b(x_i))} \times \\
&\times \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2a(x_i+\frac{t}{n}b(x_i))\pi\frac{t}{n}}} \left(e^{\frac{-(x_i+\frac{t}{n}b(x_i)-x_{i+1})^2}{2a(x_i+\frac{t}{n}b(x_i))\frac{t}{n}}} - e^{\frac{-(x_i+\frac{t}{n}b(x_i)+x_{i+1})^2}{2a(x_i+\frac{t}{n}b(x_i))\frac{t}{n}}} \right) \right\} \times \\
&\times f_0 \left(x_n + b(x_n)\frac{t}{n} \right) dx_n \dots dx_1.
\end{aligned}$$

4 Лагранжева формула Фейнмана для задачи Коши-Неймана для параболического уравнения на полупрямой

4.1 Задача Коши-Неймана для параболического уравнения на полупрямой

Рассмотрим банахово пространство $C^b[0, \infty)$ — банахово пространство непрерывных, ограниченных на бесконечности функций, с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x)|$.

Пусть оператор N определен на области

$$\text{Dom}N = \{\varphi(x) \in C^b[0, \infty) : \varphi'(0) = 0, N\varphi \in C^b[0, \infty)\}$$

и действует следующим образом: $N\varphi(x) = \frac{1}{2}a \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + b(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} + V(x)\varphi(x)$, где $a > 0$, $b(\cdot), V(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, — ограниченные и непрерывные функции.

Используя результаты предыдущей главы, выведем формулу Фейнмана для задачи Коши-Неймана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) &= Nf(t, x), & t > 0, x \in [0, \infty), \\ f(0, x) &= f_0(x), & x \in [0, \infty), \\ \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) &= 0, & t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Предположение 4.1 На пространстве $C^b[0, \infty)$ существует сильно непрерывная полугруппа операторов $(T_t^N)_{t \leq 0}$ (с генератором N), разрешающая задачу (4.1).

Предположение 4.2 Множество

$$\begin{aligned} G_N &= \{\varphi \in C^b[0, \infty) : \varphi', \varphi'', \\ &\varphi''' \in C^b[0, \infty), \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = 0\} \cap \text{Dom}N, \end{aligned} \quad (4.2)$$

является существенной областью определения генератора полугруппы $(T_t^N)_{t \geq 0}$.

4.2 Семейство операторов, эквивалентное по Чернову полугруппе, разрешающей задачу Коши-Неймана

Аналогично предыдущей главе рассмотрим семейство операторов $(F(t))_{t \geq 0}$ такое, что $F(0) = Id$ и для любого $t > 0$ оператор $F(t)$ определен следующим образом: $F(t)\varphi(x) = T_t^\Delta e^{tV(x)} T_t^\nabla f(x)$, где $e^{tV(x)}$ определен аналогично предыдущей главе,

$$T_t^\Delta \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}} \right) \varphi(y) dy,$$

и T_t^∇ определен следующим образом:

доопределим $\varphi(x)$ на $(-\infty, 0)$ четным образом и скажем, что $T_t \varphi(x) = \varphi(x + b(x)t)$. Подставляя эти выражения получим:

$$F(t)\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}} \right) e^{tV(y)} \varphi(y + b(y)t) dy. \quad (4.3)$$

Утверждение $F(t) : C^b[0, \infty) \rightarrow C^b[0, \infty)$ доказывается аналогично случаю задачи Коши-Дирихле. Сформулируем теорему о решении задачи по формуле Фейнмана:

Теорема 4.3 Семейство операторов (4.3) эквивалентно по Чернову полугруппе операторов $(T_t^N)_{t \geq 0}$, разрешающей задачу (4.1), т.е. решение этого задачи может быть получено по формуле Фейнмана:

$$f(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(t/n)]^n f_0(x). \quad (4.4)$$

Доказательство: Так же как и для теоремы 3.4 разобьем доказательство на леммы.

Лемма 4.4 $\|F(t)\| \leq e^{ta}$ с некоторой постоянной $a \in \mathbb{R}^1$ для всех $t \geq 0$.

Доказательство: По свойствам композиции операторов:

$$\|F(t)\| = \|T_t^\Delta e^{tV(x)} T_t^\nabla\| \leq \|T_t^\Delta\| \cdot \|e^{tV(x)}\| \cdot \|T_t^\nabla\|,$$

Утверждения $\|e^{tV(x)}\| \leq e^{t\|V(x)\|_\infty}$ и $\|T_t^\nabla\| = 1$ доказываются так же, как и в лемме 3.5. Рассмотрим норму $\|T_t^\Delta\|$:

$$\begin{aligned}
\|T_t^\Delta\| &= \sup_{\|\varphi\|_\infty \neq 0} \frac{\|T_t^\Delta \varphi\|_\infty}{\|\varphi\|_\infty} = \sup_{\|\varphi\|_\infty \neq 0} \frac{\sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}} \right) \varphi(y) dy \right|}{\sup_{x \in [0, \infty)} |\varphi(x)|} \leq \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|_\infty \neq 0} \frac{\sup_{x \in [0, \infty)} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \right| \cdot \int_0^\infty \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}} \right| dy \cdot \sup_{x \in [0, \infty)} |\varphi(x)| \right\}}{\sup_{x \in [0, \infty)} |\varphi(x)|} \leq \\
&\leq \sup_{x \in [0, \infty)} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \right| \cdot \int_0^\infty \left(\left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} \right| + \left| e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}} \right| \right) dy \right\} = \\
&= \sup_{x \in [0, \infty)} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \right| \left(\int_0^\infty \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} \right| dy + \int_0^\infty \left| e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}} \right| dy \right) \right\} = \\
&= \sup_{x \in [0, \infty)} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \right| \left(\int_0^\infty \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} \right| dy + \int_{-\infty}^0 \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} \right| dy \right) \right\} = \\
&= \sup_{x \in [0, \infty)} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \right| \cdot \int_{-\infty}^\infty \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} \right| dy \right\} = 1.
\end{aligned}$$

$\|F(t)\| \leq \|T_t^\Delta\| \cdot \|e^{tV(x)}\| \cdot \|T_t^\nabla\| \leq e^{t\|V(x)\|}$, что и требовалось доказать.

■

Лемма 4.5 На множестве G_N , заданном формулой (4.2), замыкание оператора $F'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - Id}{t}$ совпадает с генератором полугруппы $(T_t^N)_{t \geq 0}$.

Доказательство: Утверждение $\forall \varphi \in G_N \Rightarrow F'(0)\varphi = N\varphi$ доказывается аналогично лемме 3.6, за исключением того, что функцию $\varphi(x)$ мы продолжаем четным образом, при этом она не теряет своей гладкости. Проверим выполнение краевых условий:

$$\frac{\partial}{\partial x}(F(t)\varphi)(t, 0) = 0,$$

Функции

$$g(x, y) = \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}} \right) e^{tV(y)} \varphi(y + b(y)t),$$

$$g_x(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{at} \left((x-y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} + (x+y)e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}} \right) e^{tV(y)} \varphi(y + b(y)t)$$

непрерывны на $[0, \infty]$. Для $g_x(x, y)$ при любом $x \in [-1, 1]$ можно взять интегрируемую на $[0, \infty)$ мажоранту

$$m(y) = \begin{cases} \frac{1}{at} 2(y+1)e^{-\frac{(y-1)^2}{2at}} C, & y \geq 0, \\ \frac{8C}{\sqrt{at}}, & y \in [0, 1), \end{cases}$$

где $C = e^{t\|V(x)\|_\infty} \|\varphi\|_\infty$. Тогда по признаку Вейерштрасса интеграл $\int_0^\infty g_x(x, y) dy$ равномерно сходится по параметру x на отрезке $[-1, 1]$. Интеграл

$$\int_0^\infty g(x, 0) dy = \int_0^\infty 2e^{-\frac{y^2}{2at}} e^{tV(y)} \varphi(y + b(y)t) dy$$

сходится на $[0, \infty)$, так как экспонента в нем быстро убывает к нулю на бесконечности. Тогда по теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру [11]

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty g(x, y) dy = \int_0^\infty g_x(x, y) dy.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (F(t)\varphi)(t, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}} \right) e^{tV(y)} \varphi(y + b(y)t) dy \Big|_{x=0} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2at}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{2at}} \right) e^{tV(y)} \varphi(y + b(y)t) dy \Big|_{x=0} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} \int_0^\infty \left(-\frac{y}{at} e^{-\frac{y^2}{2at}} + \frac{y}{at} e^{-\frac{y^2}{2at}} \right) e^{tV(y)} \varphi(y + b(y)t) dy = 0. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство леммы. ■

Таким образом, для семейства операторов $\{F(t)\}_{t \geq 0}$ по отношению к полугруппе $(T_t^N)_{t \geq 0}$ выполняются все условия теоремы Чернова, что и требовалось доказать. ■

4.3 Формула Фейнмана для задачи Коши-Неймана

Для численного решения задачи (4.1) запишем лагранжеву формулу Фейнмана в явном виде. Подставляя в формулу (4.4) явные выражения операторов, получим:

$$\begin{aligned}
f(t, x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} ([F(t/n)]^n f_0)(t, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2a\pi \frac{t}{n}}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x_0-x_1)^2}{2a\frac{t}{n}}} + e^{-\frac{(x_0+x_1)^2}{2a\frac{t}{n}}} \right) \times \\
&\times \frac{e^{\frac{t}{n}V(x_1+\frac{t}{n}b(x_1))}}{\sqrt{2a\pi \frac{t}{n}}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x_1+\frac{t}{n}b(x_1)-x_2)^2}{2a\frac{t}{n}}} + e^{-\frac{(x_1+\frac{t}{n}b(x_1)+x_2)^2}{2a\frac{t}{n}}} \right) \frac{e^{\frac{t}{n}V(x_2+\frac{t}{n}b(x_2))}}{\sqrt{2a\pi \frac{t}{n}}} \times \dots \\
&\dots \times \frac{e^{\frac{t}{n}V(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1}))}}{\sqrt{2a\pi \frac{t}{n}}} \times \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1})-x_n)^2}{2a\frac{t}{n}}} + e^{-\frac{(x_{n-1}+\frac{t}{n}b(x_{n-1})+x_n)^2}{2a\frac{t}{n}}} \right) \times \\
&\times e^{\frac{t}{n}V(x_n+\frac{t}{n}b(x_n))} f_0 \left(x_n + b(x_n) \frac{t}{n} \right) dx_n \dots dx_1 = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2a\pi \frac{t}{n}} \right)^{\frac{n}{2}} \underbrace{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty}_{n \text{ раз}} \left(e^{-\frac{(x_0-x_1)^2}{2a\frac{t}{n}}} + e^{-\frac{(x_0+x_1)^2}{2a\frac{t}{n}}} \right) \times \\
&\times \prod_{i=1}^{n-1} \left(e^{-\frac{(x_i+\frac{t}{n}b(x_i)-x_{i+1})^2}{2a\frac{t}{n}}} + e^{-\frac{(x_i+\frac{t}{n}b(x_i)+x_{i+1})^2}{2a\frac{t}{n}}} \right) e^{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n V(x_i+\frac{t}{n}b(x_i))} \times \\
&\times f_0 \left(x_n + b(x_n) \frac{t}{n} \right) dx_n \dots dx_1.
\end{aligned}$$

5 Применение формулы Фейнмана для численного решения параболического уравнения на полупрямой

Для численного решения задач по формулам Фейнмана был разработан алгоритм, реализующий нахождение предела конечнократных интегралов. В данной работе такой алгоритм написан на языке высокого уровня Python, с использованием библиотеки для научных исследований numpy и ее расширения для визуализации данных matplotlib. Алгоритм позволяет рассчитывать динамику решений параболического уравнения, и позволяет на качественном уровне делать выводы о решениях при различных начальных и граничных условиях, а так же переменными коэффициентами $a(x)$, $b(x)$ и $V(x)$.

5.1 Вычислительный алгоритм

В настоящей работе, реализован вычислительный алгоритм, позволяющий численными методами получить в виде двумерного массива значения функции, являющейся n -м членом в последовательности интегралов формулы Фейнмана.

Рассмотрим алгоритм для решения задачи Коши-Дирихле (для задачи Коши-Неймана некоторые процедуры выглядят по-другому, но основной алгоритм такой же):

Первым делом создаются массивы $tpart$ и $xpart$, соответствующие разбиениям по временной и координатной осям соответственно. Затем создается матрица $first$ для хранения первоначальных значений функции. Ее размерность $dim(xpart) \times dim(tpart)$, где $dim(xpart)$ и $dim(tpart)$ — размерности массивов $tpart$ и $xpart$. Записываем в матрицу $first$ начальное значение с учетом магнитного поля $b(x)$, то есть значения функции $f_0(x + b(x)\frac{t}{n})$ в соответствующих точках разбиения.

Затем в цикле длины n выполняются процедуры умножения функции на пропагатор и интегрирования. Процедура *propagation* принимает двумерный массив, а возвращает трехмерный. Функция $g(x, y, t)$ соответ-

ствующая этому массиву интегрируется по переменной y , интегрирование выполняет процедура *IntegrateOnce*, которая возвращает двумерную матрицу, которую и передаем на следующую итерацию цикла. Результат на каждой итерации помещается в матрицу *integrant*.

Рассмотрим подробнее одну итерацию цикла:

Во-первых следует сказать, что длина цикла зависит от переменной n , которая собственно отвечает за кратность интегрирования и участвует, как параметр в формуле Фейнмана. На входе итерации мы имеем двумерную матрицу *integrant*, к ней применяется процедура *propagation*, в ней формируется трехмерная матрица путем перемножения значений пропагатора(матрица *propmatrix*) и функции *integrant* с соответствующими индексами. Матрица пропагатора *propmatrix* уже была предварительно создана с помощью процедуры *create_prop_matrix*. Затем к полученной матрице применяется процедура *IntegrateOnce*. В этой процедуре выполняются три вложенных цикла(по двум координатным и одной временной переменным), которые реализуют алгоритм численного интегрирования по второму индексу матрицы. Результат интегрирования записывается в матрицу *integrant* и передается на следующую итерацию.

Последняя итерация выполняется отдельно, так как здесь нарушается повторяемость процедуры за счет того, что оператор T_t^∇ применяется первым в композиции $F(t)$ и он уже был учтен на предыдущих итерациях. То есть на последней итерации просто обнуляется магнитное поле $b(x)$, пересоздается матрица пропагатора *prop_matrix* и применяются процедуры *propagation* и *IntegrateOnce* к матрице *integrate*. После выполнения n итераций в программе предусмотрен вывод графического представления функции $f(x, t)$. Проще говоря на каждой итерации мы численно считаем интеграл вида $\int_0^\infty p(x, y, t)f(y, t)dy$ и получаем функцию вида $g(x, t)$. В данной работе не проводятся оценки остаточных членов и исследования скорости сходимости метода. Это представляется довольно сложной задачей и требует глубоких и нетривиальных исследований. Существует несколько работ посвященных этой теме(см.

например [12], [13], [14]).

5.2 Численное решение некоторых модельных задач

Применим разработанный алгоритм к решению задачи Коши-Дирихле:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) &= \frac{1}{2}a(x)\Delta f + b(x)\nabla f + V(x)f, & t > 0, x \in [0, \infty), \\ f(0, x) &= f_0(x), & x \in [0, \infty), \\ f(t, 0) &= 0, & t \geq 0,\end{aligned}$$

где примем $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $V(x) = -exp(-x)$ и $f_0(x) = sin(x)$. Так же применим алгоритм в случае переменного $a(x) = arctg(x) + 2$.

Аналогично получим решение задачи Коши-Неймана:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) &= \frac{1}{2}a(x)\Delta f + b(x)\nabla f + V(x)f, & t > 0, x \in [0, \infty), \\ f(0, x) &= f_0(x), & x \in [0, \infty), \\ \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) &= 0, & t \geq 0,\end{aligned}$$

где примем $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $V(x) = -exp(-x)$ и $f_0(x) = cos(x)$.

Исходный код алгоритмов и результаты решения задач по формуле Фейнмана на графиках можно увидеть в приложении 1. Из графиков видно, что решения ведут себя естественным образом, краевые и начальные условия выполняются. Следовательно по крайней мере в первом приближении формулы Фейнмана подходят для численных решений параболических уравнений на полупрямой.

Список литературы

1. *Smolyanov O.G., Tokarev A.G., A. Truman.* Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // *Journal of mathematical physics.* — 2002. — Vol. 43, no. 10. — Pp. 5161–5171.
2. *Smolyanov O.G., Weizsäcker H .v., Wittich O.* Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standart Brownian motions // *Canadian Mathematic Society Conference.* — 2000. — Vol. 29.
3. *Smolyanov O.G., Weizsäcker H .v., Wittich O.* Chernoff's Theoreme and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds.
4. *Смолянов О.Г., Вайцзеккер Х.ф., Виттих О.* Диффузия на компактном римановом многообразии и поверхностные меры // *ДАН.* — 2000. — Т. 371, № 4. — С. 442–447.
5. *Смолянов О.Г., Вайцзеккер Х.ф., Виттих О.* Поверхностные меры на траекториях в римановых многообразиях, порождаемые диффузиями // *ДАН.* — 2001. — Т. 377, № 4. — С. 441–446.
6. *Смолянов О.Г., Вайцзеккер Х.ф., Виттих О.* Поверхностные меры Винера на траектория в римановых многообразиях // *ДАН.* — 2002. — Т. 383, № 4. — С. 458–463.
7. *Бутко Я.А., Гротхаус О.Г., Смолянов О.Г.* Формула Фенймана для параболического уравнения второго порядка в области // *ДАН.* — 2008. — Т. 421, № 6. — С. 1–6.
8. *Богачев В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс. — М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. — 724 с.
9. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. — М.: Мир, 1982.
10. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. — М.: Мир, 1977. — Т. 1.

11. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа: учебное пособие для вузов. — М.: Бином. Лаборатория знаний., 2008.
12. *Егоров А.Д., Жидков Е.П.* Введение в теорию и приложения функционального интегрирования. — М.: Физматлит, 2006.
13. *Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю.* Метод приближенного континуального интегрирования в задачах математической физики // ЭЧАЯ. — 1996. — Т. 27, № 1. — С. 173–242.
14. *Лобанов Ю.Ю.* Методы приближенного функционального интегрирования для численного исследования моделей в квантовой физике: Дис... канд. ф.-м. наук: 05.13.18 / Российский университет дружбы народов. — М., 2009.

A Приложение

source/feynman.py

```
from numpy import *
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib import cm
from matplotlib.ticker import LinearLocator, \
    FixedLocator, FormatStrFormatter
import matplotlib.pyplot as plt
# initial conditions
h = 0.1
tpart = arange(0.1, 2.1, 0.1)
xpart = arange(0, 2*pi, h)

# Graphical function
def GraphPlot(func):
    fig = plt.figure()
    ax = fig.gca(projection='3d')
    X, T = meshgrid(xpart[:xpart.size/2], tpart)
    plt.xlabel('Axe_X')
    plt.ylabel('Axe_T')
    ax.set_zlabel('Axe_F')
    surf = ax.plot_surface(X, T, func.transpose(), rstride=5, cstride=5,\
        cmap=cm.jet, linewidth=0, antialiased=True)
    ax.set_zlim3d(0, func.max())
    ax.w_zaxis.set_major_locator(LinearLocator(10))
    ax.w_zaxis.set_major_formatter(FormatStrFormatter('%0.03f'))

    plt.show()

# class for solving Cauchy-Dirichlet problem
class DirichletInt:

    # constructor
    def __init__(self, begin, mass, magfield, potential, n):
        self.potential = potential
        self.magfield = magfield
        self.mass = mass
        self.n = n
        self.first = empty( (xpart.size, tpart.size) )
        for xnum in xrange(xpart.size):
            for tnum in xrange(tpart.size):
                self.first[xnum, tnum] = begin(xpart[xnum])
        print("Initialize_complete")

# "propagator" function
def propagator(self, x, y, t):
    return exp(t*self.potential(x+self.magfield(x)*t))*\
```

```

        (exp((-x+self.magfield(x)*t-y)**2)\
        /(2*self.mass(x+self.magfield(x)*t)*t)) - \
        exp((-x+self.magfield(x)*t+y)**2)\
        /(2*self.mass(x+self.magfield(x)*t)*t)))\
        *(sqrt(2*self.mass(x+self.magfield(x)*t)*pi*t)**(-1))

def emptymagfield(self,x):
    return 0

# creating matrix with propagator values in partition points
def create_prop_matrix(self):
    self.propmatrix = empty( (xpart.size , xpart.size , tpart.size) )
    for xnum1 in xrange(xpart.size):
        for xnum2 in xrange(xpart.size):
            for tnum in xrange(tpart.size):
                self.propmatrix[xnum1, xnum2, tnum] \
                    = self.propagator(xpart[xnum1],\
                    xpart[xnum2], tpart[tnum]/self.n)

# product matrix function with propmatrix
def propagation(self, func):
    result = empty( (xpart.size , xpart.size , tpart.size) )
    for xnum1 in xrange(xpart.size):
        for xnum2 in xrange(xpart.size):
            for tnum in xrange(tpart.size):
                result[xnum1, xnum2, tnum] = \
                    self.propmatrix[xnum1, xnum2, tnum] \
                    * func[xnum2, tnum]

    return result

# integrate matrix function(second argument)
def IntegrateOnce(self, func):
    result = zeros( (xpart.size , tpart.size) )
    for xnum1 in xrange(xpart.size):
        for tnum in xrange(tpart.size):
            temp = func[xnum1, :, tnum]
            result[xnum1, tnum] = (temp[0]+temp[temp.size-1])/2
            for xnum2 in xrange(1,xpart.size-1):
                result[xnum1, tnum] = \
                    result[xnum1, tnum] + temp[xnum2]
            result[xnum1, tnum] = result[xnum1, tnum]*h

    return result

# running calculation process
def Calc(self):
    integrant = self.first
    self.create_prop_matrix()
    for i in xrange(1,self.n):
        integrant = self.IntegrateOnce(self.propagation(integrant))

```

```

        print "Step_%d_complete" % i
    self.magfield = self.emptymagfield
    self.create_prop_matrix()
    integrant = self.IntegrateOnce(self.propagation(integrant))
    return integrant [:xpart.size/2, :]

# class for solving Cauchy-Neumann problem (derived from DirichletInt)
class NeumannInt(DirichletInt):

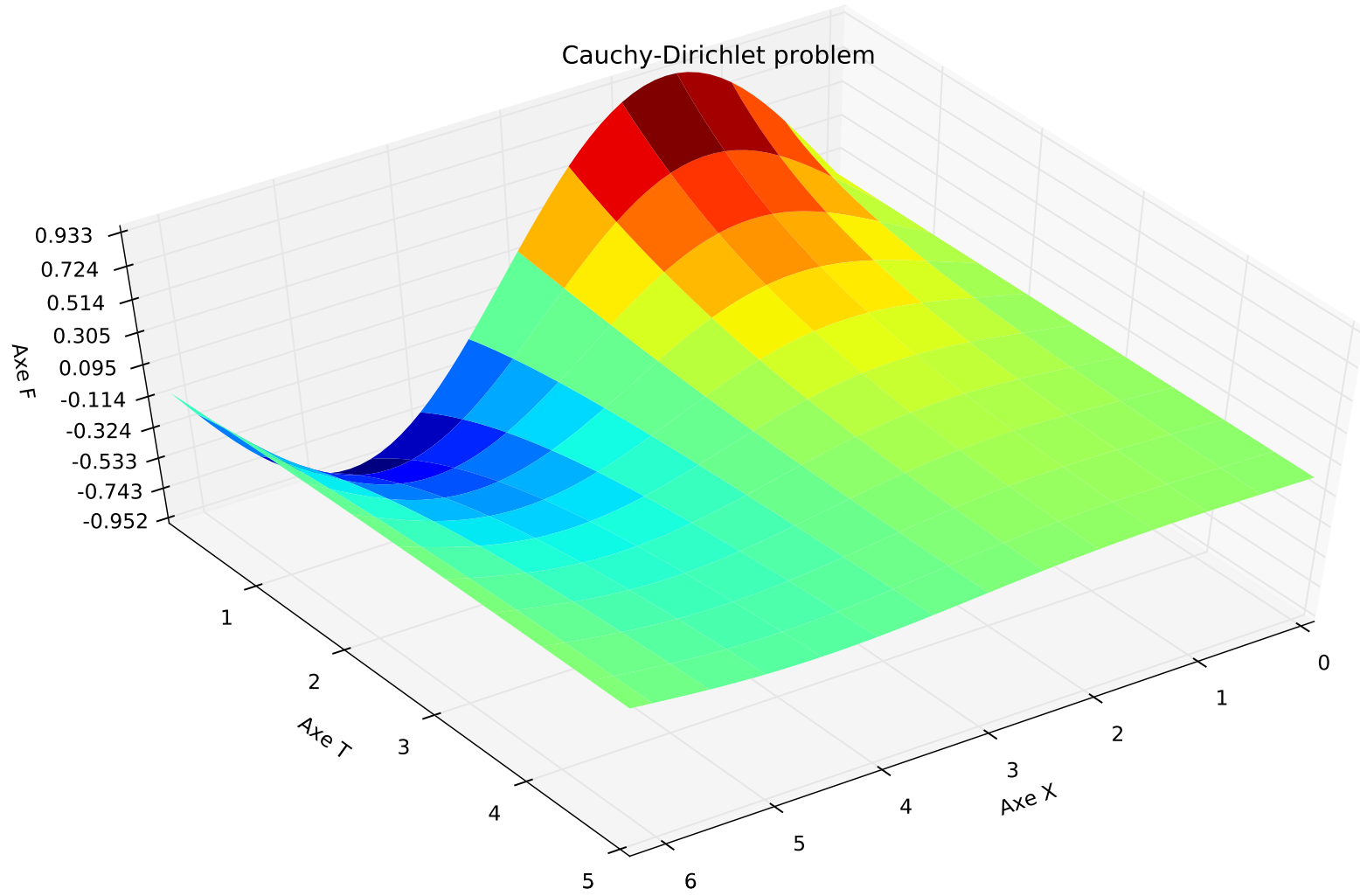
    def emptypotential(self, x):
        return 0

    # propagator redefinition
    def propagator(self, x, y, t):
        return exp(t*self.potential(x+self.magfield(x)*t))*\
            (exp((-x+self.magfield(x)*t-y)**2)\
            /(2*self.mass(x+self.magfield(x)*t)*t)) + \
            exp((-x+self.magfield(x)*t+y)**2)\
            /(2*self.mass(x+self.magfield(x)*t)*t))\
            *(sqrt(2*self.mass(x+self.magfield(x)*t)*pi*t)**(-1))

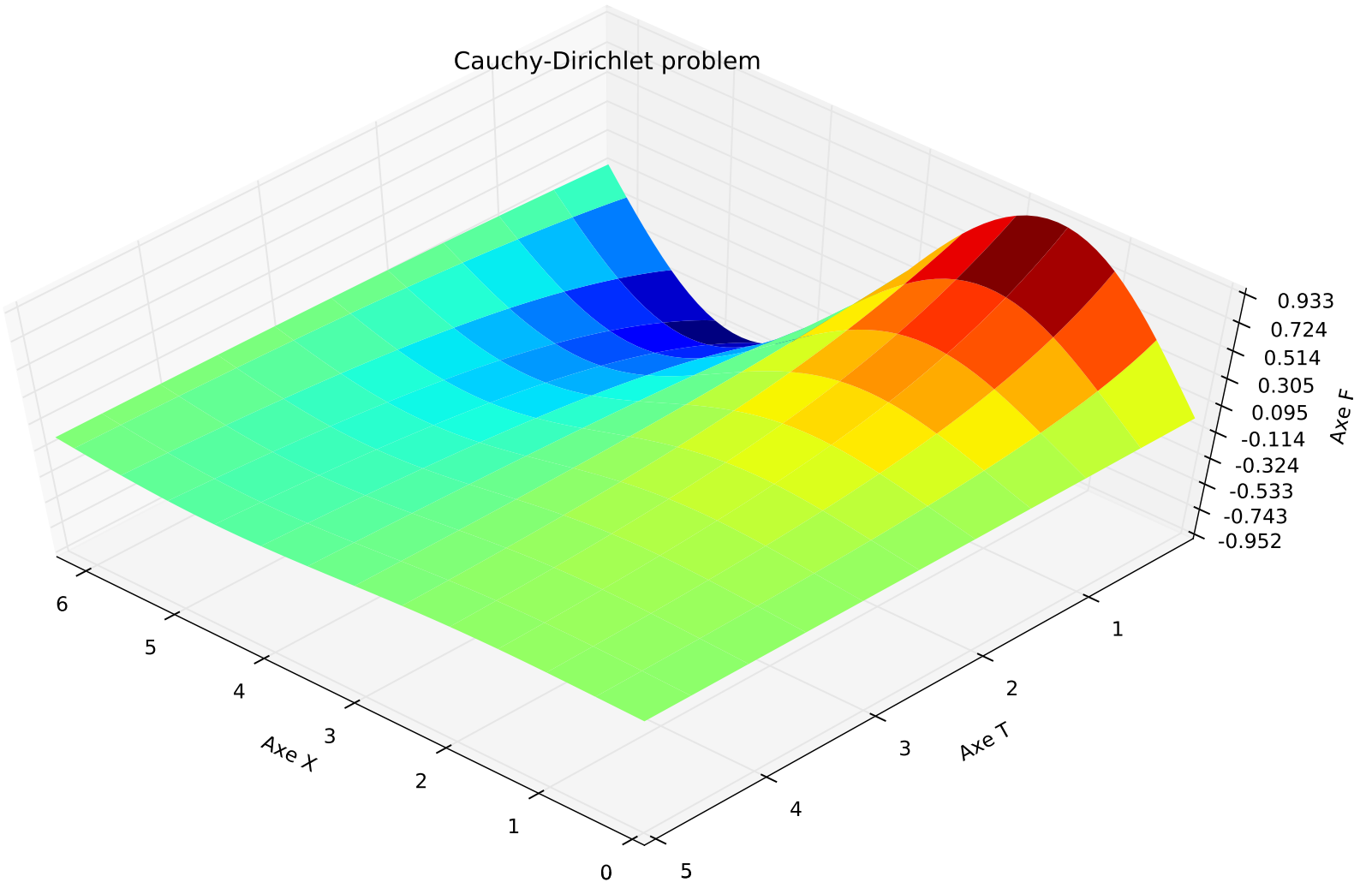
    # run function redefiniton
    def Calc(self):
        integrant = self.first
        self.create_prop_matrix()
        for i in xrange(1, self.n):
            integrant = self.IntegrateOnce(self.propagation(integrant))
            print "Step_%d_complete" % i
        self.magfield = self.emptymagfield
        self.potential = self.emptypotential
        self.create_prop_matrix()
        integrant = self.IntegrateOnce(self.propagation(integrant))
        return integrant [:xpart.size/2, :]

```

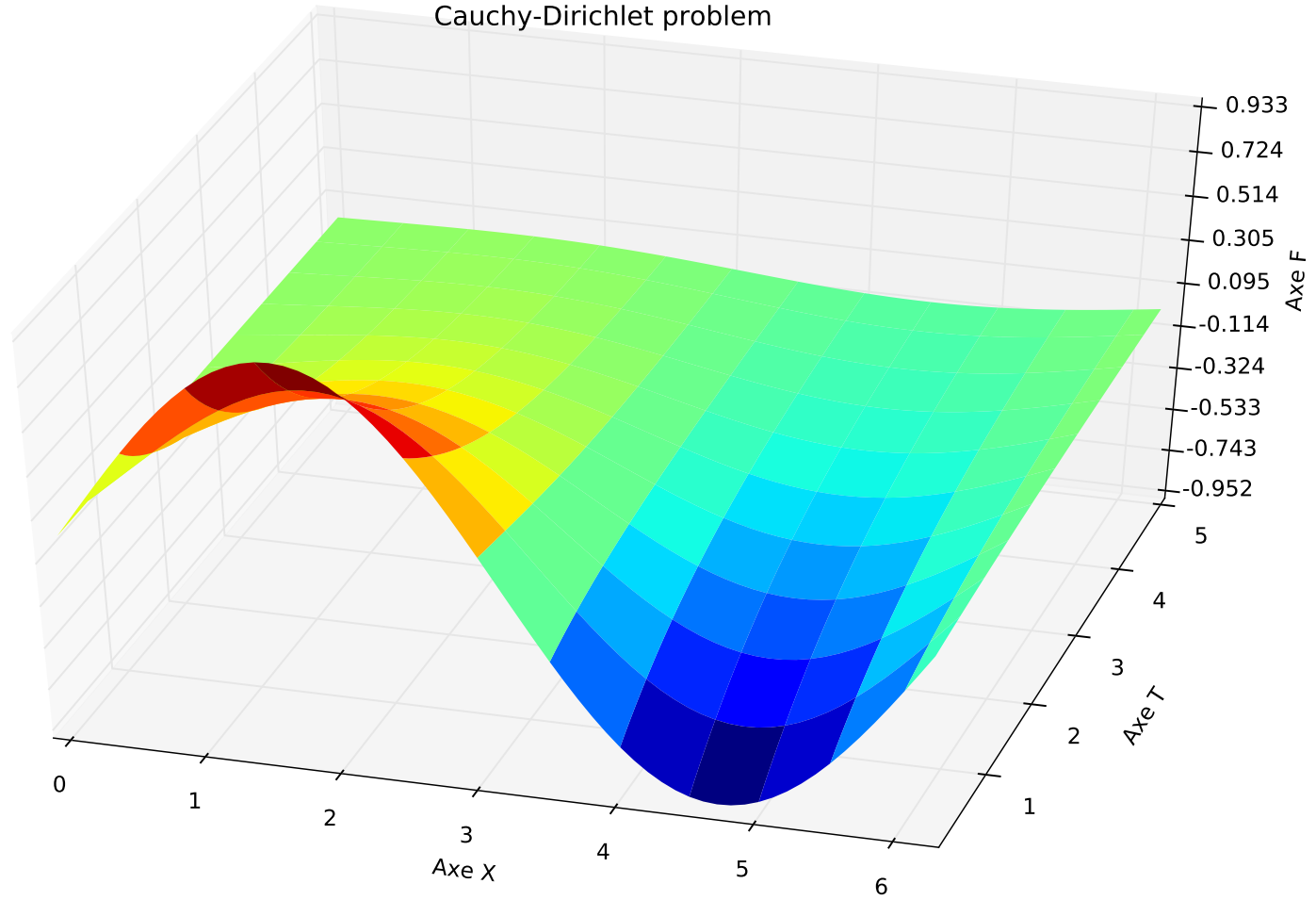
Cauchy-Dirichlet problem



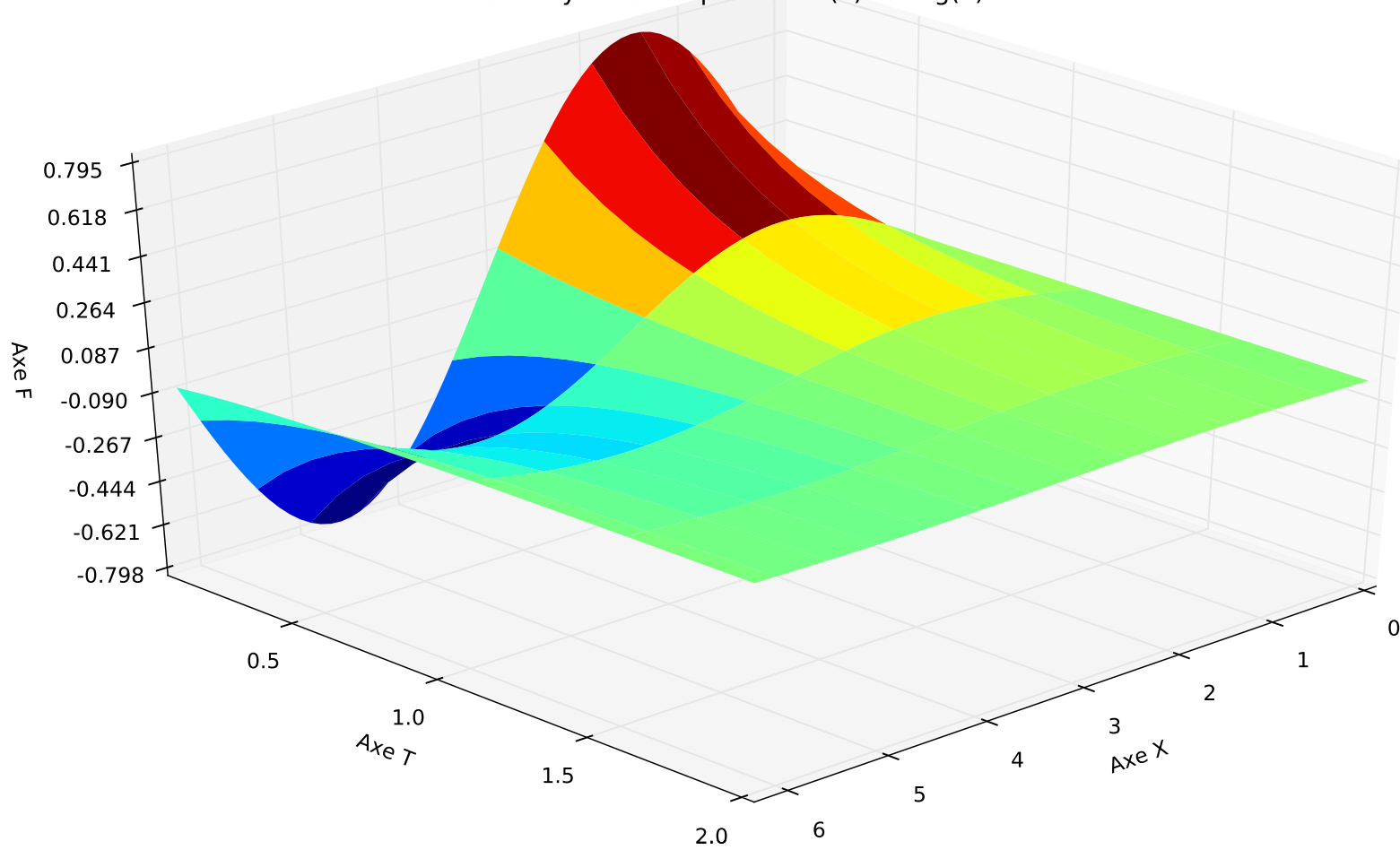
Cauchy-Dirichlet problem



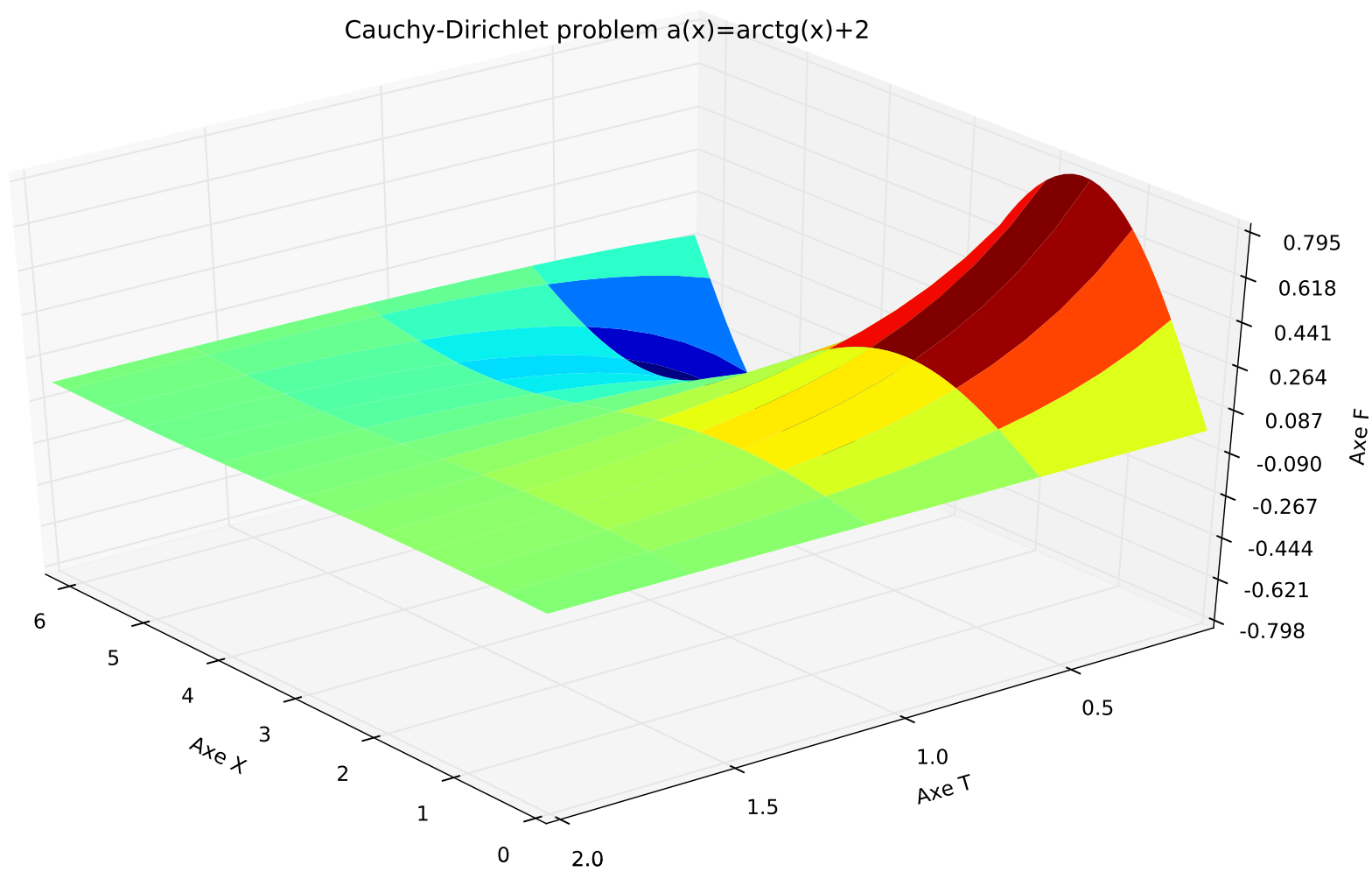
Cauchy-Dirichlet problem



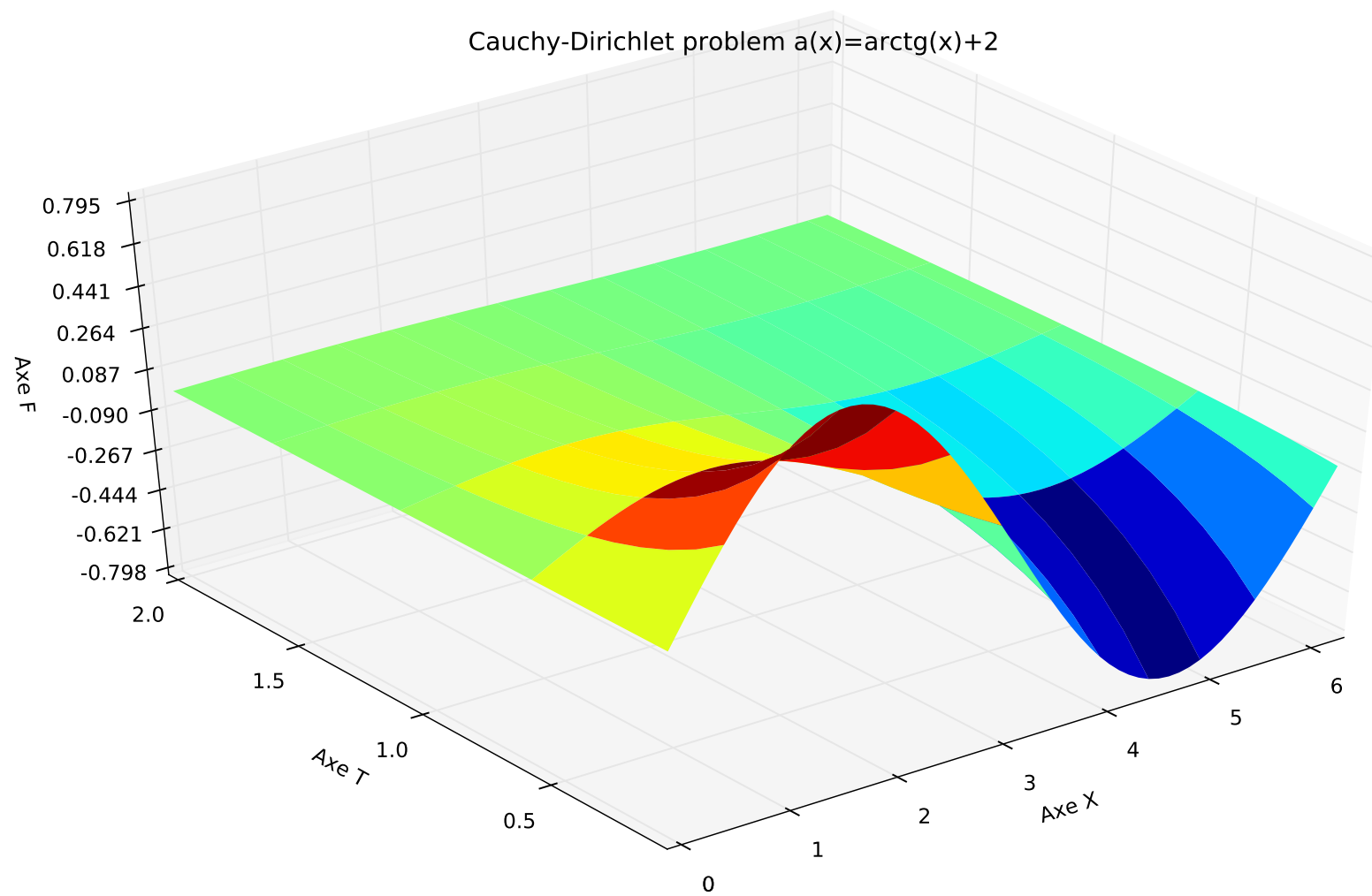
Cauchy-Dirichlet problem $a(x)=\arctg(x)+2$



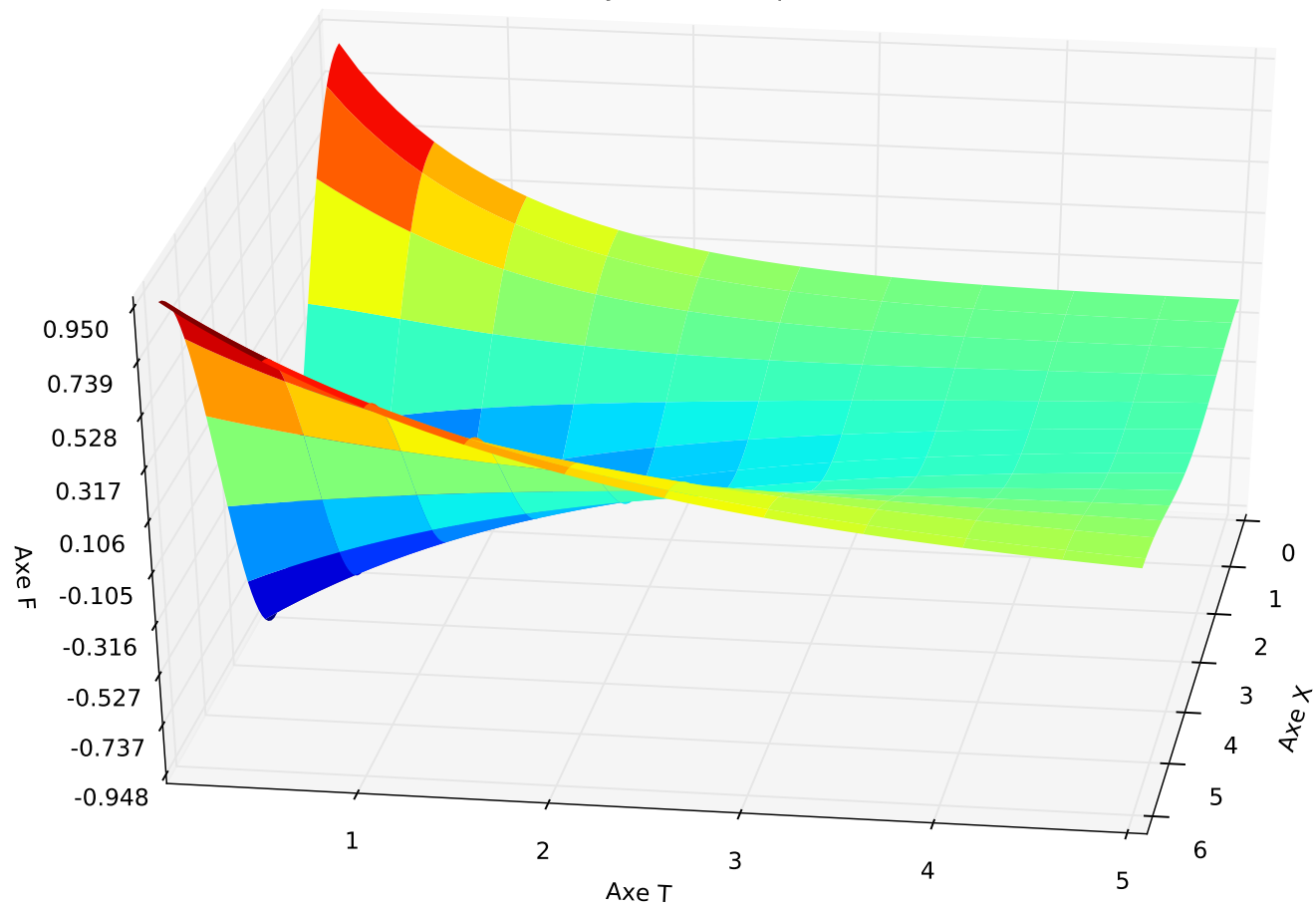
Cauchy-Dirichlet problem $a(x)=\arctg(x)+2$



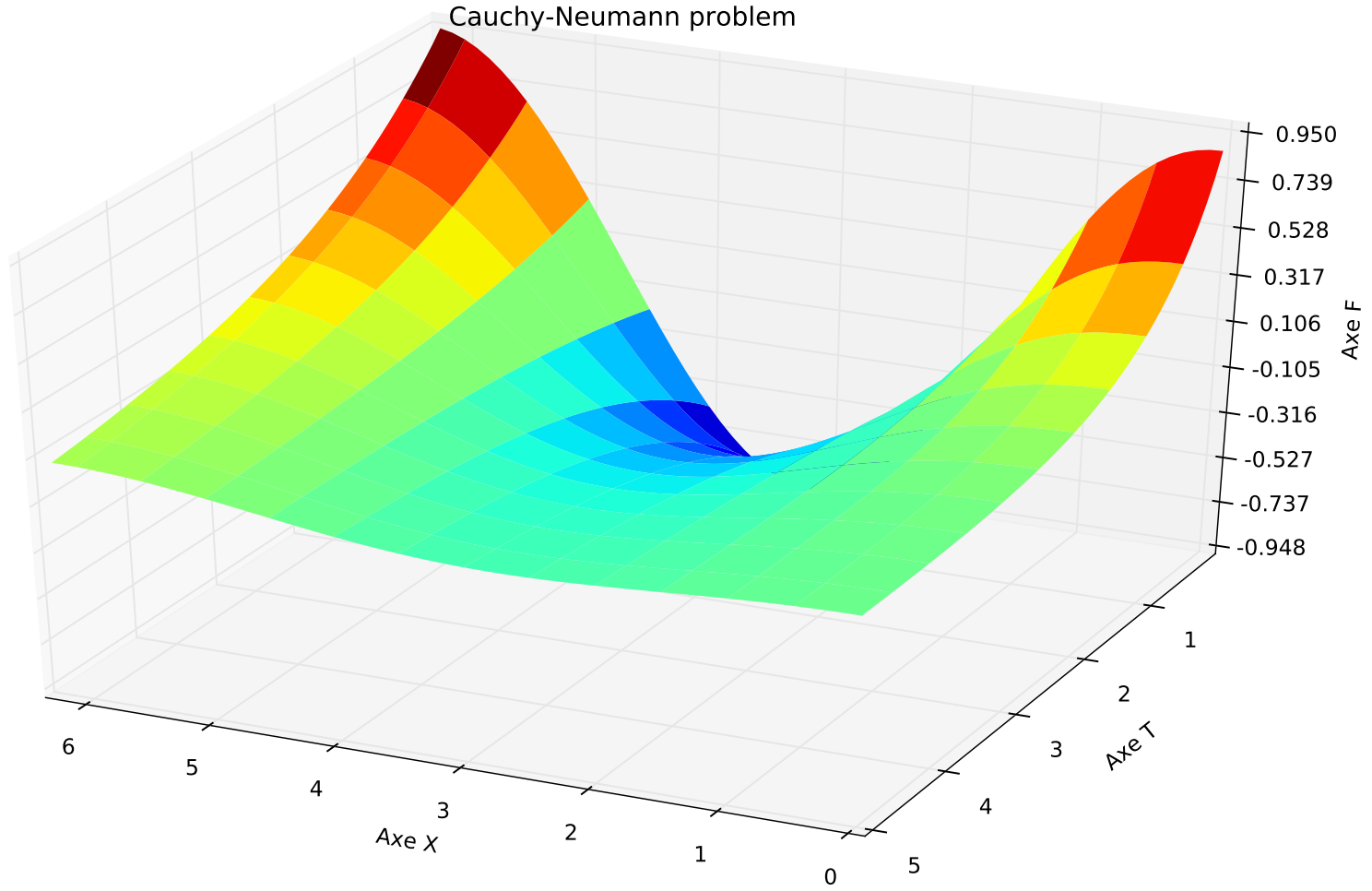
Cauchy-Dirichlet problem $a(x)=\text{arctg}(x)+2$



Cauchy-Neumann problem



Cauchy-Neumann problem



Cauchy-Neumann problem

