МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА
(МГТУ им. Н.Э.Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Дубинный Антон Анатольевич

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛУГРУПП НЕОДНОРОДНОГО СДВИГА НА ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
бакалавра математики

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук, доцент
Яна Анатольевна Киндеркнехт

МОСКВА – 2013

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ______________ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ________________

КАФЕДРА ___________МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ___________

РАСЧЁТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к квалификационной работе бакалавра на тему:

_______________Построение полугрупп неоднородного сдвига_________________

_______________на пространствах непрерывных отображений__________________

Студент ______________________________ __________________ __А.А. Дубинный__
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Руководитель квалификационной работы __________________ __Я.А. Киндеркнехт_
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Москва, 2013

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ________
(Индекс)

________________ ______________
(И.О.Фамилия)

« ___ » ____________ 20 __ г.

К А Л Е Н Д А Р Н Ы Й   П Л А Н

выполнения квалификационной работы бакалавра

Студент _________________Дубинный Антон Анатольевич___________________
(Фамилия, имя, отчество)

_______________________Построение полугрупп неоднородного сдвига____________________

_______________________на пространствах непрерывных отображений_____________________

(Тема квалификационной работы)

№ п/п	Наименование этапов квалификационной работы	Выполнение этапов		Примечание
		Срок	Объем %	
1	Обзор литературы	15.03.13	25%	
2	Построение полугруппы сдвига для числовых отображений определенных на вещественной оси	01.04.13	30%	
3	Обобщение понятия полугруппы сдвигов на отображения в банаховых пространствах	15.04.13	42%	
4	Доказательство теоремы о генераторе полугруппы сдвига	20.04.13	53%	
5	Нахождение необходимых и достаточных условий существования полугруппы сдвигов для ограниченных непрерывных отображений	30.04.13	59%	
6	Нахождение необходимых и достаточных условий существования полугруппы сдвигов для отображений, удовлетворяющих нулевым краевым условиям	20.05.13	67%	
7	Исследование свойства сильной непрерывности полугруппы сдвигов	30.06.13	74%	
8	Исследование области определения генератора полугруппы сдвигов	05.06.13	89%	
9	Построение примера полугруппы сдвигов, определенной на множестве отображений, не являющемся линейным пространством	10.06.13	96%	
10	Оформление диплома и презентации	20.06.13	100%	

Руководитель квалификационной работы ______________________ __Я.А. Киндеркнехт_
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Студент ______________________ __ А.А. Дубинный __
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ________
(Индекс)

_________________ _________________
(И.О.Фамилия)

« ___ » _____________ 20 __ г.

З А Д А Н И Е
на выполнение квалификационной работы бакалавра

Студент ________________________Дубинный Антон Анатольевич___________________________
(Фамилия, имя, отчество)

__________________Построение полугрупп неоднородного сдвига____________________________

__________________на пространствах непрерывных отображений____________________________

(Тема квалификационной работы)

____

____

Источник тематики (НИР кафедры, заказ организаций и т.п.)__ НИР кафедры ________________

____

____

____

Тема квалификационной работы утверждена распоряжением по факультету № ____
от « ___ » ______________ 20__ г.

1. Научно-исследовательская часть

Построение полугруппы отображений по заданному генератору полугруппы вида $(A\varphi)(x) = \varphi'(x) f(x)$. Установление необходимых и достаточных условий существования полугруппы сдвига с заданным генератором, определенной на пространстве ограниченных непрерывных отображений банаховых пространств, либо его подпространстве отображений удовлетворяющих нулевым краевым условиям. Исследование свойств полугруппы сдвига – сильной непрерывности, области определения генератора. Исследование возможности построения полугруппы сдвига на множестве отображений, не являющемся линейным пространством.

____

____

____

2. Проектно-конструкторская часть

Задача не ставилась____

____

____

____

___

3. Технологическая часть

Задача не ставилась ___

4. Оформление квалификационной работы

4.1. Расчетно-пояснительная записка на ___ листах формата А4.

4.2. Перечень графического материала (плакаты, схемы, чертежи и т.п.) ___

Дата выдачи задания « ___ » ___ 20__ г.

В соответствии с учебным планом квалификационную работу выполнить в полном объеме в срок до « ___ » ___ 20__ г.

Руководитель квалификационной работы ___ __Я. А. Киндеркнехт___
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Студент ___ ___А.А. Дубинный_____
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Примечание:

1. Задание оформляется в двух экземплярах; один выдаётся студенту, второй хранится на кафедре.

ОТЗЫВ

о квалификационной работе Дубинного А.А.

«Построение полугрупп неоднородного сдвига на пространствах непрерывных отображений»

В квалификационной работе Дубинного А.А. исследуется задача построения полугруппы, разрешающей задачу Коши для дифференциального уравнения с частными производными первого порядка и переменными коэффициентами, --- так называемой полугруппы операторов неоднородного сдвига, действующих в замкнутой области банахова пространства. В работе получен ряд результатов о взаимосвязи рассматриваемой задачи с задачей построения однопараметрической полугруппы, разрешающей задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. В некоторых случаях такая взаимосвязь позволяет построить полугруппу неоднородного сдвига явным образом. Результаты работы являются новыми, представляют научный интерес и заслуживают того, чтобы быть опубликованными. Текст работы содержит незначительные опечатки, но, в тоже время, он написан продуманно и аккуратно с математической точки зрения. В качестве квалификационной работа заслуживает оценки отлично.

Доктор физико-математических наук,

доцент Московского физико-технического

института (государственного университета) Сакбаев В.Ж.

Секретарь Ученого Совета Московского

физико-технического института

(государственного университета) Скалько Ю.И.

Оглавление

Введение

Полугруппы сдвига представляют собой классический пример однопараметрических полугрупп, определенных на множестве отображений из пространства, в котором можно определить операцию сдвига аргумента. Следуя [5], рассмотрим простой пример. Пусть $\varphi(x)$, $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ - любая числовая функция определенная на всей вещественной оси. Однопараметрической полугруппой левых сдвигов называется однопараметрическое семейство отображений T_t, которые числу $t \geq 0$ и данной функции φ сопоставляют функцию $T_t\varphi : (T_t\varphi)(x) = \varphi(x+t), x \in \mathbb{R}$. Легко видеть что семейство отображений T_t образует полугруппу, то есть выполняется $\forall t, s \geq 0 : T_tT_s = T_{t+s}$. Генератор полугруппы левых сдвигов $A_T(\varphi) = \lim\limits_{t \to +0} \frac{T_t\varphi - T_0\varphi}{t} = \varphi'$ это отображение, которое данной функции φ сопоставляет ее производную φ', если она существует на $\mathbb{R}$. Поскольку предел в определении генератора полугруппы берется в норме рассматриваемого пространства функций, то область определения $Dom(A_T)$ - множество функций φ этого пространства для которых предел существует и принадлежит этому же пространству - зависит от выбора пространства.

В определении полугруппы левых сдвигов данном выше сдвиг аргумента функции зависит только от параметра t оператора T_t семейства отображений, и не зависит от точки x в которой вычисляется значение функции φ. В данной работе рассматривается обобщение полугрупп сдвига, заключающееся в том что сдвиг аргумента зависит также и от x (поэтому предлагается название "полугруппы неоднородного сдвига"). Именно, рассматривается однопараметрическое семейство отображений T_t, которое числу $t \geq 0$ и данной функции φ сопоставляет новую функцию $T_t\varphi$, определенную по формуле

$$(T_t\varphi)(x) = \varphi(U(t,x)) \tag{1}$$

$$\text{где} \quad U : \left(\mathbb{R}_0^+ \times Dom(\varphi)\right) \mapsto Dom(\varphi) \quad \text{— некоторое отображение} \tag{2}$$

Оказывается, что если семейство отображений U_t - однопараметрическая полугруппа, то семейство отображений T_t - также однопараметрическая полугруппа. Между генераторами A_T и A_U полугрупп T_t и U_t имеется простое соотношение, вытекающее из формулы дифференцирования композиции отображений:

$$\begin{aligned} &\forall \varphi \in Dom(A_T) \cap C^1(Dom(\varphi)), \forall x \in Dom(A_U)\ : \\ &(A_T(\varphi))(x) = \varphi'(x) \cdot A_U(x) \end{aligned} \tag{3}$$

Соотношение (3) позволяет явным образом указать вид полугруппы T_t в том случае когда известно что ее генератор имеет вид $(A_T(\varphi))(x) = \varphi'(x) f(x)$, где f - заданное отображение. Следует сразу заметить, что не для всякого заданного отображения f существует полугруппа U_t такая, что ее генератор A_U равен f.

Область определения и область значений отображений A_U и f зависят от того пространства (либо множества) функций $\Phi = Dom(T_t)$ на котором определена полугруппа T_t. В данной работе рассматривается распространенный в приложениях случай когда функции φ из $\Phi = Dom(T_t)$ определены на замыкании $\overline{\Omega}$ некоторого открытого подмножества $\Omega \subseteq X$ банахова пространства. В этом случае $f\ :\ \overline{\Omega} \mapsto X$. Отображение f допускает интерпретацию как поле направлений, определяющее касательный вектор к траекториям решений следующей вспомогательной задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} U(t,x) = f(U(t,x)),\ 0 \le t \le T \\ U(0,x) = x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{4}$$

В работе установлены следующие утверждения:

1. Если решение задачи Коши (4) существует для всех начальных значений $x \in \overline{\Omega}$ в течении неограниченного времени и соответствующие траектории не выходят за пределы множества $\overline{\Omega}$, то семейство траекторий решений $U(t,x)$ определяет полугруппу U_t, отображающую множество $\overline{\Omega}$ в себя, такую что ее генератор A_U определен на всем $\overline{\Omega}$ и $\forall x \in \overline{\Omega}\ :\ \ A_U(x) = f(x)$.

2. Если кроме того для всех отображений $\varphi \in \Phi = Dom(T_t)$ и для всех $t \ge 0$ выполняется включение

$$(T_t\varphi)(\cdot) = \varphi(U(t,\cdot))\ \in\ \Phi \tag{5}$$

то тогда однопараметрическое семейство отображений T_t определяет полугруппу, отображающую множество функций $\Phi = Dom(T_t)$ в себя с генератором, определенным формулой (3).

В работе установлены необходимые и достаточные условия существования полугруппы неоднородного сдвига T_t в том случае когда областью ее определения $\Phi = Dom(T_t)$ является:

1. $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ - пространство ограниченных непрерывных отображений $\overline{\Omega} \mapsto Y$, где Y - банахово пространство

2. $C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y)$ - пространство ограниченных непрерывных отображений $\overline{\Omega} \mapsto Y$, которые обращаются в ноль на границе множества Ω. Полугруппа неоднородного сдвига определена в том случае если граница $\partial\Omega$ удовлетворяет определенным требованиям гладкости, а поле направлений f касается $\partial\Omega$ во всех точках границы.

Установлено, что вообще говоря полугруппа неоднородного сдвига T_t, определенная соотношением (1) на пространствах выше не является сильно непрерывной, за исключением того случая когда Ω - ограниченное множество в конечномерном пространстве $X = \mathbb{R}^n$.

Конструктивно построено непустое подмножество области определения $Dom(A_T)$ генератора полугруппы T_t.

Приведен пример случая, когда область определения $\Phi = Dom(T_t)$ полугруппы T_t не является линейным пространством.

Обозначения

- $M(A, B)$ - множество **всех** отображений $A \mapsto B$ из произвольного множества A в произвольное множество B.
- $C(X, Y)$ или $C^0(X, Y)$, - пространство непрерывных отображений из пространства X в Y; предполагается что в X и Y задана некоторая топология, для того чтобы имело смысл говорить о непрерывности.
- $C_b^0(M, Y)$ - банахово пространство ограниченных непрерывных отображений $\varphi\colon M \mapsto Y$, где $M \subseteq X$, а X, Y - нормированные пространства; норма в пространстве $C_b^0(M, Y)$ определена как $\|\varphi\| = \sup\limits_{x \in X} \|\varphi(x)\|_Y$.
- $\pounds(X, Y)$ - пространство ограниченных линейных операторов отображающих линейное нормированное пространство X в линейное нормированное пространство Y. Норма в $\pounds(X, Y)$ - это норма линейного оператора.
- точка $(\cdot)$ обозначает свободный аргумент функции в том случае когда мы из функции нескольких переменных делаем функцию меньшего числа переменных, фиксируя значения некоторых из них. Например, если $U(t, x)$ - функция двух переменных, то $U(t, \cdot)$ - это функция одной переменной x при фиксированном значении переменной t.
- Dom - область определения отображения
- Ran - область значений отображения
- $\mathbb{R}_0^+$ - множество $[0, +\infty)$ неотрицательных вещественных чисел

Глава 1

Используемые понятия

1.1 Непрерывность отображений на множестве

Определение 1.1.1. *Пусть X, Y - нормированные пространства, $M \subseteq X$ - произвольное подмножество X. Пусть $F\colon M \mapsto Y$ - отображение, определенное на множестве M и принимающее значения в пространстве Y. Отображение F будем называть* ***непрерывным на множестве*** *M* ***в точке*** *$x_0 \in M$ если для любого числа $\epsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$ что условия $x \in M,\ \|x - x_0\| < \delta$ влекут $\|F(x) - F(x_0)\| < \epsilon$.*

Определение 1.1.2. *Если в условиях определения 1.1.1 отображение F непрерывно на множестве M в каждой точке $x_0 \in M$, то мы будем просто говорить что отображение F непрерывно на множестве M.*

1.2 Сильная производная отображений

Определение 1.2.1. *[4, гл. X, §1, п.1] Пусть X, Y - нормированные пространства. Пусть $O \subseteq X$ - открытое подмножество X. Пусть $F\colon O \mapsto Y$ - отображение, определенное на множестве O и принимающее значения в пространстве Y. Отображение F называется* ***сильно дифференцируемым*** *в точке $x \in O$, если существует такой ограниченный линейный оператор $L_x \in \pounds(X, Y)$, что для любого $\epsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$ что для любого элемента $h \in X$ неравенство $\|h\| < \delta$ влечет*

$$\|F(x+h) - F(x) - L_x h\| \le \epsilon\|h\| \tag{1.1}$$

что также записывают как

$$\|F(x+h) - F(x) - L_x h\| = o(h) \tag{1.2}$$

Линейную часть $L_x \cdot h$ приращения отображения F, которая при фиксированном $h \in X$ представляет собой элемент пространства Y, называют ***сильным дифференциалом (дифференциалом Фреше)*** *отображения F в точке x. Линейный оператор L_x называют* ***сильной производной(производной Фреше)*** *отображения F в точке x.*

Далее для сильной производной используются обозначения $F'(x)$ или $\frac{d}{dx}F(x)$.

Ограниченность линейного оператора L_x означает что норма оператора конечна:

$$\|L_x\| = \sup_{0 \neq h \in X} \frac{\|L_x h\|}{\|h\|} < \infty \tag{1.3}$$

Доопределим понятие сильной дифференцируемости для граничных точек открытого множества:

Определение 1.2.2. *Пусть X, Y - нормированные пространства, $O \subseteq X$ - открытое подмножество X, $\overline{O}$ - замыкание O. Пусть $F\colon \overline{O} \mapsto Y$ - отображение, определенное на множестве $\overline{O}$ и принимающее значения в пространстве Y. Пусть x - граничная точка открытого подмножества O, то есть в сколь угодно малой ее окрестности найдутся точки как принадлежащие так и не принадлежащие O. Будем называть отображение F сильно дифференцируемым в точке x, если для любого числа $\epsilon > 0$ можно указать такое число δ что для всех элементов $h \in X$ таких что $\|h\| < \delta$ и $x + h \in \overline{O}$ выполняется неравенство*

$$\|F(x+h) - F(x) - L_x h\| \leq \epsilon \|h\|$$

Сильная дифференцируемость в граничной точке области определения отображения обобщает понятие односторонней производной для числовой функции числового аргумента.

Если отображение $F\colon \overline{O} \mapsto Y$ имеет сильную производную во всех точках $x \in \overline{O}$, то мы будем говорить что отображение F **сильно дифференцируемо на множестве** $\overline{O}$. Мы будем использовать следующее свойство сильной производной [4, гл. X, §1, п.1]:

Предложение 1.2.3 (Производная сложной функции)**.** *Пусть X, Y, Z - три нормированных пространства, $U(x_0)$ - окрестность точки $x_0 \in X$, F - отображение этой окрестности в Y, $y_0 = F(x_0)$, $V(y_0)$ - окрестность точки $y_0 \in Y$, G - отображение этой окрестности в Z. Тогда, если отображение F дифференцируемо в точке x_0, а G дифференцируемо в точке y_0, то отображение $H = GF$ (которое определено в некоторой окрестности точки x_0) дифференцируемо в точке x_0 и*

$$H'(x_0) = G'(y_0)F'(x_0) \tag{1.4}$$

Это утверждение выполняется также и в случае когда когда отображения F, G (и следовательно H) определены не в открытых окрестностях но в их подмножествах - доказательство бесконечной малости разности приращения сложной функции H и ее дифференциала не меняется, лишь сужается множество рассматриваемых аргументов отображений F, G и их композиции H на те, для которых значения отображений определены.

1.2.1 Формула конечных приращений

Имеет место следующее утверждение, которое является аналогом формулы конечных приращений для числовых функций.

Предложение 1.2.4. *[4, гл. X, §3, п.3] Пусть X, Y - банаховы пространства, $U \subset X$ - подмножество X. Пусть отображение $F\colon U \mapsto Y$ дифференцируемо на множестве U. Пусть точки x_0, x принадлежат U вместе с соединяющим их отрезком. Тогда*

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leq \|x - x_0\| \cdot \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|F'(x_0 + \theta(x - x_0))\| \tag{1.5}$$

В обозначениях утверждения выше рассмотрим отображение

$$G(x) = F(x) - F'(x_0)(x - x_0)$$

Его производная $G'(x) = F'(x) - F'(x_0)$, $G'(x_0) = 0, G(x_0) = F(x_0)$. Применяя к отображению G формулу (1.5), получаем

$$\|G(x) - G(x_0)\| \leq \|x - x_0\| \cdot \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|G'(x_0 + \theta(x - x_0))\|$$

то есть

$$\|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\| \leq \|x - x_0\| \cdot \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|F'(x_0 + \theta(x - x_0)) - F'(x_0)\| \tag{1.6}$$

1.2.2 Производные высших порядков

Пусть X, Y - банаховы пространства, $F\colon X \mapsto Y$ - дифференцируемое отображение X в Y. Его производная $F'(x)$ при каждом фиксированном $x \in X$ есть элемент пространства $\mathcal{L}(X, Y)$ ограниченных линейных операторов, то есть $F'\colon X \mapsto \mathcal{L}(X, Y)$ есть отображение пространства X в пространство $\mathcal{L}(X, Y)$. Если это отображение дифференцируемо, то его производная называется **второй производной** отображения F и обозначается F''. Таким образом, $F''(x)$ есть элемент пространства $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ линейных операторов, действующих из X в $\mathcal{L}(X, Y)$. Элементы пространства $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ допускают интерпретацию в виде билинейных отображений.

Определение 1.2.5. *[4, гл. X, §1, п.8] Пусть X, Y - нормированные линейные пространства. Говорят что задано* ***билинейное отображение*** *B пространства X в пространство Y, если каждой упорядоченной паре x, x' из X сопоставлен элемент $y = B(x, x') \in Y$ так что выполнены условия*

1. *Отображение $B(x,x')$ линейно по каждому из аргументов*
2. *Существует такое число $M > 0$ что*

$$\forall x, x' \in X \colon \|B(x,x')\| \le M\|x\|\|x'\| \tag{1.7}$$

*Наименьшее из чисел для которого верно (1.9) называется **нормой** билинейного отображения B и обозначается $\|B\|$.*

Второе условие равносильно непрерывности B по совокупности аргументов.

Если обычным образом можно определить линейные операции над билинейными отображениями, то билинейные отображения пространства X в пространство Y сами образуют линейное нормированное пространство, обозначаемое $B(X^2, Y)$. Оно полно если полно пространство Y.

Каждому элементу A пространства $\pounds(X, \pounds(X, Y))$ можно поставить в соответствие элемент из $B(X^2, Y)$ положив

$$B(x, x') = (Ax)x' \tag{1.8}$$

Обратно, если задано билинейное отображение B, то при фиксированном $x \in X$ отображение $x' \mapsto B(x,x')$ сопоставляет каждому $x' \in X$ элемент пространства $\pounds(X,Y)$, то есть билинейному отображению B можно поставить в соответствие некоторый элемент пространства $\pounds(X, \pounds(X,Y))$. Указанное соответствие между пространствами $\pounds(X, \pounds(X,Y))$ и $B(X^2, Y)$ линейно. Можно показать что оно также изометрично, и осуществляет взаимно однозначное соответствие.

Таким образом вторую производную отображения $F \colon X \mapsto Y$, которая является элементом пространства $\pounds(X, \pounds(X,Y))$, можно считать элементом пространства $B(X^2, Y)$.

Аналогичным образом можно определить третью, четвертую и т.д производную отображения $F \colon X \mapsto Y$, определив n-ю производную как производную от производной $(n-1)$-го порядка. n-я производная представляет собой элемент пространства $\pounds(X, ...\pounds(X,Y))$. Каждому элементу этого пространства можно сопоставить элемент пространства $N(X^n, Y)$ n-линейных отображений X в Y.

Определение 1.2.6. *[4, гл. X, §1, п.8] n-линейным отображением N пространства X в Y называется отображение, которое упорядоченному набору из n элементов $(x_1, ..., x_n)$ пространства X сопоставляет элемент $y = N(x_1, ..., x_n) \in Y$, которое линейно по каждому аргументу x_j при фиксированных остальных, и удовлетворяет для некоторого числа $M > 0$ условию*

$$\forall x_j \in X, j = 1...n \colon \|N(x_1, ..., x_n)\| \le M\|x_1\| \cdot ... \cdot \|x_n\| \tag{1.9}$$

Таким образом, n-ю производную отображения $F \colon X \mapsto Y$ можно считать элементом пространства $N(X^n, Y)$.

1.3 Интеграл

Определение 1.3.1. *[4, гл. X, §1, п.7] Пусть Y - банахово пространство, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ отрезок на вещественной оси, $F\colon [a, b] \mapsto Y$ - отображение этого отрезка в пространство Y. Интегралом Римана от отображения F по отрезку $[a, b]$ называется предел (по норме пространства Y) интегральных сумм*

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(t_{k+1} - t_k)$$

отвечающих разбиениям

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

при стремлении $\max_k(t_{k+1} - t_k) \to 0$, обозначаемый

$$\int_a^b F(t)dt$$

Интеграл определенный таким образом представляет собой элемент пространства Y. Рассуждения аналогичные проводимым для интеграла от функций с числовыми значениями позволяют установить что интеграл от функции, непрерывной на отрезке, существует. Он обладает обычными свойствами интеграла от функций принимающих числовые значения, такими как линейность, аддитивность и теорема об оценке [4, гл. X, §1, п.7]:

$$\left\| \int_a^b F(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\|dt \tag{1.10}$$

Пусть X, Y - банаховы пространства. Обозначим $BC(X, Y)$ линейное пространство всех ограниченных непрерывных отображений X в Y с топологией, в которой окрестности нуля заданы как множества

$$U_{n,\epsilon} = \{F \in BC(X, Y)\colon \sup_{\|x\| \leq n} \|F(x)\| < \epsilon\}$$

На подпространстве $\pounds(X, Y) \subset BC(X, Y)$ всех непрерывных линейных отображений X в Y эта топология совпадает с топологией задаваемой операторной нормой.

Пусть $J = [x_0, x_0 + \Delta x]$ - прямолинейный отрезок в X и задано непрерывное отображение $F\colon J \mapsto BC(X, Y)$, то есть каждой точке $x \in J$ отрезка сопоставлено некоторое отображение $F(x) \in BC(X, Y)$, непрерывно зависящее от точки x. Тогда можно определить интеграл от $F(x)$ по отрезку J полагая

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} F(x)dx = \int\limits_0^1 F(x_0 + t\Delta x)(\Delta x)dt \tag{1.11}$$

Здесь $F(x_0+t\Delta x)(\Delta x)$ при каждом $t \in [0,1]$ - это элемент пространства Y, являющийся образом элемента Δx при отображении $F(x_0+t\Delta x)$. Поскольку $F(x_0+t\Delta x)(\Delta x)$ непрерывно зависит от t, то интеграл в правой части существует и является элементом пространства Y.

Предложение 1.3.2 (Формула Ньютона-Лейбница, [4, гл. X, §1, п.7]). *Пусть отображение F действует из X в Y и имеет на отрезке $[x_0, x_0+\Delta x]$ сильную производную $F'(x)$, непрерывно зависящую от x. В силу непрерывности $F'(x)$ существует интеграл $\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)ds$. Имеет место равенство*

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)dx = F(x_0+\Delta x) - F(x_0) \tag{1.12}$$

1.4 Пространство ограниченных непрерывных отображений с супремум-нормой

Определение 1.4.1. *Пусть X, Y - банаховы пространства с нормами $\|.\|_X$ и $\|.\|_Y$ соответственно, Ω - открытое подмножество X, $\overline{\Omega}$ - замыкание Ω. Пространством $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ ограниченных непрерывных отображений на множестве $\overline{\Omega}$ с супремум-нормой мы будем называть множество непрерывных на множестве $\overline{\Omega}$ (в смысле определения 1.1.2) отображений $\varphi\colon \overline{\Omega} \mapsto Y$ имеющих конечную норму*

$$\|\varphi\|_{\overline{\Omega}^0} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|\varphi(x)\|_Y \tag{1.13}$$

Пространство $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ является линейным пространством с операциями сложения элементов и умножения элемента на число определенными как соответствующие операции над значениями отображений. Легко проверить что норма $\|\cdot\|_{\Omega^0}$ удовлетворяет аксиомам нормы. Таким образом $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ является линейным нормированным пространством.

Предложение 1.4.2. *Пространство $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ является полным относительно сходимости по метрике порожденной нормой $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}^0}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_n \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ - фундаментальная последовательность относительно нормы $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}^0}$. Это означает что для любого $\epsilon > 0$ можно указать такое $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ что $n_1, n_2 \geq n_0$ влечет

$$\|\varphi_{n_1} - \varphi_{n_2}\|_{\overline{\Omega}^0} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|\varphi_{n_1}(x) - \varphi_{n_2}(x)\|_Y < \epsilon \tag{1.14}$$

Покажем что последовательность φ_n сходится по норме $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}^0}$ к некоторому элементу $\varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$.

Пусть $x \in \overline{\Omega}$ фиксировано. Согласно (1.14) последовательность значений $\varphi_n(x) \in Y$ является фундаментальной в пространстве Y и, так как Y -

банахово, сходится к некоторому элементу $y \in Y$, который мы примем за значение предельной функции φ в точке x: $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$.

Для $n \geq n_0(\epsilon)$ запишем неравенство треугольника

$$\|\varphi(x) - \varphi_{n_0}(x)\| \leq \|\varphi(x) - \varphi_n(x)\| + \|\varphi_n(x) - \varphi_{n_0}(x)\|$$

Так как $\lim_{n\to\infty} \|\varphi(x) - \varphi_n(x)\| = 0$, $\|\varphi_n(x) - \varphi_{n_0}(x)\| < \epsilon$ а $n_0 = n_0(\epsilon)$ не зависит от x, то в пределе при стремлении $n \to \infty$ получаем неравенство

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|\varphi(x) - \varphi_{n_0}(x)\| = \|\varphi - \varphi_{n_0}\|_{\overline{\Omega}^0} \leq \epsilon \tag{1.15}$$

Неравенство треугольника позволяет показать что норма $\|\varphi\|_{\overline{\Omega}^0}$ конечна:

$$\|\varphi\|_{\overline{\Omega}^0} \leq \|\varphi - \varphi_{n_0}\|_{\overline{\Omega}^0} + \|\varphi_{n_0}\|_{\overline{\Omega}^0} \leq \epsilon + \|\varphi_{n_0}\|_{\overline{\Omega}^0} < \infty$$

Покажем что $\varphi(x)$ непрерывна: предположим что φ не является непрерывной на множестве $\overline{\Omega}$ в некоторой точке $x_0 \in \overline{\Omega}$, то есть для некоторого $\epsilon > 0$ какое бы малое $\delta > 0$ мы не взяли, найдется $x \in \overline{\Omega},\ x \neq x_0$, такое что $\|x - x_0\| < \delta$ но $\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\|_Y \geq \epsilon$. Согласно неравенству (1.15) мы можем выбрать такое $n = n(\epsilon/3)$ что $\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|_Y \leq \epsilon/3$. Неравенство треугольника

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| = \\
&= \|(\varphi(x) - \varphi_n(x)) + (\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)) + (\varphi_n(x_0) - \varphi(x_0))\| \leq \\
&\leq \|\varphi(x) - \varphi_n(x)\| + \|\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)\| + \|\varphi_n(x_0) - \varphi(x_0)\|
\end{aligned}$$

при условиях

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| \geq \epsilon \\
&\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\| \leq \epsilon/3 \\
&\|\varphi_n(x_0) - \varphi(x_0)\| \leq \epsilon/3
\end{aligned}$$

может выполняться только если $\|\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)\| \geq \epsilon/3$. Последнее неравенство выполняется для некоторых $x,\ x_0 \in \overline{\Omega}$ со сколь угодно малым расстоянием $\|x - x_0\| < \delta$, что противоречит непрерывности отображения φ_n на $\overline{\Omega}$. □

Следствие 1.4.3. *Пространство $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ с нормой $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}^0}$ является банаховым пространством.*

1.5 Однопараметрические полугруппы

Определение 1.5.1. *Пусть X - некоторое множество. Однопараметрической полугруппой T_t называется отображение $T\colon (\mathbb{R}_0^+ \times X) \mapsto X$, которое каждому числу $t \geq 0$ и каждому элементу $x \in X$ ставит* *в соответствие элемент X, обозначаемый $T_t(x)$, причем для любых $t \geq 0, s \geq 0, x \in X$ выполняется*

$$T_s(T_t(x)) = T_{s+t}(x) \tag{1.16}$$

Однопараметрическую полугруппу можно рассматривать как семейство отображений $T_t \colon X \mapsto X$, зависящих от параметра $t \geq 0$. Из равенства

$$T_t x = T_{0+t}(x) = T_0(T_t(x))$$

следует что T_0 является тождественным отображением на множестве тех элементов $y \in X$ которые представимы как $T_t(x)$ для некоторых $t \geq 0, x \in X$, то есть являются значениями отображения T.

1.5.1 Сильная непрерывность полугруппы

Определение 1.5.2. *Пусть X - банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Однопараметрическая полугруппа $T \colon (\mathbb{R}_0^+ \times X) \mapsto X$, отображающая пространство X в себя, называется* ***сильно непрерывной*** *если*

$$\forall t \geq 0, \forall x \in X \ : \ \lim_{h \to +0} \|T_{t+h}(x) - T_t(x)\| = 0 \tag{1.17}$$

Так как можно представить $T_{t+h}(x) = T_h(T_t(x)) = T_h(y)$, где $y = T_t(x)$ (и поэтому $T_0(y) = y$), то ясно что если выполняется

$$\forall y \in X \ : \ \lim_{h \to +0} \|T_h(y) - y\| = 0$$

то (1.18) выполняется также и для всех $t > 0$.

Определим понятие сильной непрерывности полугруппы, отображающей в себя не все банахово пространство X но некоторое его подмножество:

Определение 1.5.3. *Пусть X - банахово пространство, $M \subset X$ - множество в X. Однопараметрическую полугруппу $T \colon (\mathbb{R}_0^+ \times M) \mapsto M$, отображающую множество M в себя будем называть* ***сильно непрерывной*** *если*

$$\forall t \geq 0, \forall x \in M \ : \ \lim_{h \to +0} \|T_{t+h}(x) - T_t(x)\| = 0 \tag{1.18}$$

1.5.2 Генератор полугруппы

Определение 1.5.4. *Пусть X - банахово пространство, $T_t(x) \colon (\mathbb{R}_0^+ \times X) \mapsto X$ - однопараметрическая полугруппа, отображающая пространство X в себя. Отображение $A_T \colon (Dom(A_T) \subseteq X) \mapsto X$, определенное на тех элементах $x \in X$ для которых существует предел (относительно сходимости по норме пространства X)*

$$\lim_{t \to +0} \frac{T_t(x) - x}{t} = A_T(x) \tag{1.19}$$

называется ***генератором или производящим оператором*** *полугруппы T_t.*

Определим понятие генератора полугруппы, отображающей в себя не все банахово пространство X но некоторое его подмножество:

Определение 1.5.5. *Пусть X - банахово пространство, $M \subset X$ - множество в X, $T_t(x)\colon (\mathbb{R}_0^+ \times M) \mapsto M$ - однопараметрическая полугруппа, отображающая множество M в себя. Отображение $A_T\colon\ (Dom(A_T) \subseteq M) \ \mapsto\ X$, определенное на тех элементах $x \in M$ для которых существует предел (относительно сходимости по норме пространства X)*

$$\lim_{t \to +0} \frac{T_t(x) - x}{t} = A_T(x) \tag{1.20}$$

будем называть ***генератором или производящим оператором*** *полугруппы T_t.*

Глава 2

Постановка задачи и форма решения

2.1 Постановка задачи

Пусть

X, Y - банаховы пространства с нормами $\|.\|_X$ и $\|.\|_Y$ соответственно,

$\Omega \subseteq X$ - открытое подмножество X,

$\overline{\Omega}$ - замыкание Ω,

$C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ - пространство непрерывных ограниченных отображений $\varphi\colon \overline{\Omega} \mapsto Y$, с супремум-нормой $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}^0}$ относительно которой это пространство полно:

$$\|\varphi\|_{\overline{\Omega}^0} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|\varphi(x)\| \tag{2.1}$$

$\Phi \subseteq C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ - некоторое подмножество пространства $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$, возможно совпадающее с $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ (Φ может **не быть** линейным подпространством пространства $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$).

Пусть дано непрерывное отображение $f\colon \overline{\Omega} \mapsto X$. Рассмотрим следующую задачу:

Найти однопараметрическую полугруппу операторов T_t отображающую множество $\Phi = Dom(T_t)$ в себя:

$$\begin{aligned} &T_t \ : \ (\mathbb{R}_0^+ \times \Phi) \mapsto \Phi_t \subseteq \Phi \\ &\forall\varphi \in \Phi, \forall t, s \geq 0 \ : \ T_t T_s \varphi = T_{t+s}\varphi \end{aligned} \tag{2.2}$$

такую, что ее генератор $A_T\colon Dom(A_T) \mapsto C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ с областью определения

$$Dom(A_T) = \{\varphi \in \Phi\colon \exists \lim_{t\to+0} \frac{T_t(\varphi) - \varphi}{t} < \infty\} \tag{2.3}$$

(где сходимость по норме $\|.\|_{\overline{\Omega}^0}$) и значениями

$$A_T(\varphi) = \lim_{t\to+0} \frac{T_t(\varphi) - \varphi}{t} \tag{2.4}$$

принимал значения $\varphi'(x)f(x)$ для всех дифференцируемых элементов $\varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$. То есть, если $\varphi \in Dom(A_T)$ и φ дифференцируема на $\overline{\Omega}$, то должно выполняться:

$$\forall x \in \overline{\Omega} : \ (A_T(\varphi))(x) = \varphi'(x)f(x) \tag{2.5}$$

Подобная задача возникает например при построении полугруппы, описывающей броуновское движение, когда к генератору уравнения процесса броуновского движения - оператору Лапласа - добавлено возмущение, описывающее стационарный по времени снос [1, раздел 1.2]. В этом случае значение функции f в точке x описывает вектор скорости сноса в точке x.

2.2 Форма искомого решения

В случае когда $f(x) = f_0 = const, f_0 \in X$, решение поставленной задачи известно [8, гл. 19]:

$$(T_t\varphi)(x) = \varphi(x + f_0t) \tag{2.6}$$

В самом деле, если отображение φ дифференцируемо в точке x, то

$$\varphi(x + \Delta x) = \varphi(x) + \varphi'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$
$$(T_t\varphi)(x) = \varphi(x + f_0t) = \varphi(x) + \varphi'(x)f_0t + o(f_0t)$$
$$(A_T(\varphi))(x) = \lim_{t\to+0} \frac{(T_t\varphi)(x) - \varphi(x)}{t} = \varphi'(x)f_0$$

Соответствующая полугруппа называется полугруппой сдвигов.

Форма (2.6) наводит на мысль искать полугруппу T_t в виде

$$(T_t\varphi)(x) = \varphi(U(t, x)) \tag{2.7}$$

где $U(t, x)$ некоторое отображение, существенные свойства которого определим далее.

2.3 Необходимые ограничения на область определения и область значений отображения U

Рассмотрим каковы должны быть область определения и область значений отображения U в формуле (2.7) для того чтобы семейство отображений T_t могло корректно определять полугруппу. Мы хотим чтобы семейство T_t было полугруппой, отображающей множество отображений Φ в себя. Следовательно, при любых фиксированных $t \geq 0, \varphi \in \Phi$ отображение $(T_t(\varphi))(\cdot) = \varphi(U(t, \cdot))$ должно быть элементом Φ, то есть как минимум некоторым отображением $\overline{\Omega} \mapsto Y$. Следовательно выражение $U(t,x)$ должно быть как минимум определено для произвольных $t \geq 0, x \in \overline{\Omega}$. Таким образом, область определения отображения U есть $\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega}$.

Далее элементы $\varphi \in \Phi$ - это отображения $\overline{\Omega} \mapsto Y$. Их значения $\varphi(x)$ определены лишь для $x \in \overline{\Omega}$. Поэтому, для того чтобы значение выражения $\varphi(U(t,x))$ было определено, необходимо чтобы выполнялось

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \overline{\Omega} \ : \ U(t,x) \in \overline{\Omega} \tag{2.8}$$

Таким образом, U отображает $\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega}$ в $\overline{\Omega}$:

$$U \ : \ \left(\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega}\right) \mapsto \overline{\Omega} \tag{2.9}$$

2.4 Полугруппы сдвига аргумента определенные на множестве отображений

Для того чтобы сформулировать необходимые и достаточные условия того, что семейство отображений T_t вида (2.7) определяет именно полугруппу (отображающую множество отображений Φ в себя), введем следующее определение.

Определение 2.4.1. *Пусть A, B - произвольные множества. Пусть $\Psi \subseteq M(A,B)$ - некоторое множество отображений $\psi\colon A \mapsto B$. Будем говорить что* ***элементы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}$ эквивалентны по множеству отображений*** Ψ *, обозначая $a_1 \underset{\Psi}{\sim} a_2$, если*

$$\forall \psi \in \Psi \ : \ \psi(a_1) = \psi(a_2) \tag{2.10}$$

Легко проверить что отношение $\underset{\Psi}{\sim}$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть определяет на множестве A отношение эквивалентности. Классами эквивалентности по этому отношению будут такие подмножества $A_\alpha \subseteq A$, что любая функция $\psi \in \Psi$ принимает на всех $a \in A_\alpha$ одно и то же значение (это значение может быть разным для разных функций ψ).

Теорема 2.4.2. *Пусть A, B - произвольные множества. Пусть $\Psi \subseteq M(A,B)$ - некоторое множество отображений $\psi\colon A \mapsto B$. Пусть $U(t,a)$, $U\colon \left(\mathbb{R}_0^+ \times A\right) \mapsto A$ - однопараметрическое семейство отображений множества A в себя.*

Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений $T(t,\psi)$, $T\colon \left(\mathbb{R}_0^+ \times \Psi\right) \mapsto M(A,B)$, которое каждому числу $t \geq 0$ и каждому отображению $\psi \in \Psi$ сопоставляет некоторое отображение $(T_t\psi)\colon A \mapsto B$ по формуле

$$(T_t\psi)(\cdot) = \psi(U(t,\cdot)) \tag{2.11}$$

где точка обозначает произвольный аргумент $a \in A$.

Для того чтобы семейство отображений T_t было однопараметрической полугруппой, отображающей множество отображений Ψ в себя (см. определение 1.5.1) необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

$$\forall t \geq 0, \forall \psi \in \Psi \ : \ \psi(U(t, \cdot)) \in \Psi \tag{2.12}$$

$$\forall t, s \geq 0, \forall a \in A \ :$$

$$(U(t, U(s, a)) \neq U(t + s, a)) \ \Rightarrow \ \big(U(t, U(s, a)) \ {}_{\widetilde{\Psi}} \ U(t + s, a)\big) \tag{2.13}$$

Пояснение: условие (2.12) утверждает что семейство T_t должно отображать множество Ψ в себя. Оно автоматически выполняется, если Ψ - множество ***всех*** *отображений $A \mapsto B$. Обычно в Ψ входят лишь отображения удовлетворяющие определенным условиям (непрерывность, дифференцируемость, фиксированные значения на некотором подмножестве A и т. д.), тогда условие (2.12) требует явной проверки.*

Условие (2.13) утверждает что во всех случаях когда значения $U(t, U(s, a))$ и $U(t+s, a)$ не равны (то есть нарушается основное свойство полугруппы для семейства отображений U_t), эти значения ***эквивалентны по множеству отображений*** *Ψ.*

Доказательство. **Необходимость:** пусть T_t - однопараметрическая полугруппа, которая отображает множество отображений Ψ в себя. Тогда по определению 1.5.1 выполняется $\forall t \geq 0, \forall \psi \in \Psi \colon T_t \psi \in \Psi$, то есть (2.12): $\psi(U(t, \cdot)) \in \Psi$ выполняется. Так как семейство T_t - однопараметрическая полугруппа, то по определению

$$\forall t, s \geq 0, \forall \psi \in \Psi \colon T_t(T_s \psi) = T_{t+s} \psi \tag{2.14}$$

Поскольку согласно (2.11) для любого $a \in A$

$$(T_t(T_s \psi))(a) = (T_s \psi)(U(t, a)) = \psi(U(s, U(t, a)))$$
$$(T_{t+s} \psi)(a) = \psi(U(t + s, a))$$

то (2.14) эквивалентно

$$\forall t, s \geq 0, \forall \psi \in \Psi, \forall a \in A \ : \ \psi(U(s, U(t, a))) = \psi(U(t + s, a)) \tag{2.15}$$

Пусть в последнем выражении $a_1 = U(s, U(t, a)) \neq U(t + s, a) = a_2$. Так как тем не менее значения всех отображений $\psi \in \Psi$ на элементах a_1 и a_2 совпадают, то $a_1 {}_{\widehat{\Psi}} a_2$ - a_1 эквивалентно a_2 по множеству отображений Ψ, то есть (2.13) также выполняется.

Достаточность: Пусть (2.12) и (2.13) выполнено. Покажем что семейство отображений T_t определенное формулой (2.11) является однопараметрической полугруппой согласно определению 1.5.1. Условие (2.12) явно утверждает что для любого $t \geq 0$ оператор T_t отображает Ψ в себя. Остается проверить выполнение основного свойства полугруппы (2.14). Рассмотрим его развернутую форму (2.15): для произвольных значений $s, t \geq 0, a \in A$ возможны два случая:

1. $a_1 = U(s, U(t,a)) = U(t+s,a) = a_2$: тогда любое отображение $\psi \in \Psi$ принимает на $a_1 = a_2$ равные значения, то есть равенство (2.15) не нарушается.

2. $a_1 = U(s, U(t,a)) \neq U(t+s,a) = a_2$: в этом случае, согласно предположению (2.13), $\forall \psi \in \Psi \, : \, \psi(a_1) = \psi(a_2)$, то есть равенство (2.15) также не нарушается.

Следовательно, свойство (2.14) выполнено и семейство отображений $T\colon \left(\mathbb{R}_0^+ \times \Psi\right) \mapsto \Psi$ - однопараметрическая полугруппа. $\square$

Следствие 2.4.3. *Пусть, в обозначениях теоремы (2.4.2), явно дано что отображение $U(t,a)$, $U\colon \left(\mathbb{R}_0^+ \times A\right) \mapsto A$ - однопараметрическая полугруппа. Тогда для того чтобы однопараметрическое семейство отображений T_t определенное формулой (2.11): $(T_t\psi)(\cdot) = \psi(U(t,\cdot))$ было однопараметрической полугруппой, достаточно выполнения включения (2.12): $\forall t \geq 0, \forall \psi \in \Psi \, : \, \psi(U(t,\cdot)) \in \Psi$.*

2.5 Полугруппы неоднородного сдвига на пространстве непрерывных отображений

Применяя абстрактные теорему 2.4.2 и следствие 2.4.3 к пространству непрерывных отображений, мы теперь можем сформулировать при каких условиях формула (2.7) корректно определяет однопараметрическую полугруппу, отображающую в себя пространство $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ ограниченных непрерывных отображений $\overline{\Omega} \mapsto Y$, или некоторое его подмножество $\Phi \subseteq C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$.

Теорема 2.5.1 (о полугруппе неоднородного сдвига на пространстве непрерывных ограниченных отображений)**.** *Пусть X, Y - банаховы пространства, $\Omega \subseteq X$ - открытое подмножество X, $\overline{\Omega}$ - замыкание Ω. Пусть $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ - пространство непрерывных ограниченных на $\overline{\Omega}$ отображений с супремум-нормой $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}^0}$.*

Пусть отображение $U(t,x)$, $U\colon \left(\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega}\right) \mapsto \overline{\Omega}$ - однопараметрическая полугруппа, отображающая $\overline{\Omega}$ в себя и пусть отображение $U(t,x)$ непрерывно по аргументу $x \in \overline{\Omega}$.

Тогда однопараметрическое семейство отображений $T(t,\varphi)$ определенное по формуле

$$\forall t \geq 0, \forall \varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y) \, : \, (T_t\varphi)(\cdot) = \varphi(U(t,\cdot)) \tag{2.16}$$

(где точка обозначает произвольный аргумент $x \in \overline{\Omega}$) является однопараметрической полугруппой, отображающей пространство $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ в себя.

Доказательство. В силу следствия (2.4.3) нам достаточно показать что

$$\forall t \geq 0, \forall \varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y) \, : \, \varphi(U(t,\cdot)) \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y) \tag{2.17}$$

Для этого нужно показать что $\varphi(U(t,\cdot))$ определяет отображение $\overline{\Omega}$ в Y, которое непрерывно и ограничено на $\overline{\Omega}$. Так как по условию теоремы $U\colon \left(\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega}\right) \mapsto \overline{\Omega}$, то для любых $t \geq 0, x \in \overline{\Omega}$ значение $U(t,x)$ определено и принадлежит множеству $\overline{\Omega}$, следовательно определено значение $\varphi(U(t,x)) \in Y$. Так как по условию теоремы отображение $U(t,x)$ непрерывно по переменной x на $\overline{\Omega}$, то отображение $\varphi(U(t,x))$ непрерывно по переменной x на множестве $\overline{\Omega}$ как композиция непрерывных отображений. Так как $\forall t \geq 0, \forall x \in \overline{\Omega}\colon U(t,x) \in \overline{\Omega}$, а любое отображение $\varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ ограничено на $x \in \overline{\Omega}$, то значение $\varphi(U(t,x))$ при фиксированном t также ограничено на $x \in \overline{\Omega}$. Следовательно, семейство T_t отображает пространство $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ в себя, и тогда по следствию (2.4.3) является однопараметрической полугруппой. □

Следствие 2.5.2. *Пусть X, Y - банаховы пространства, $\Omega \subseteq X$ - открытое подмножество X, $\overline{\Omega}$ - замыкание Ω. Пусть $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ - пространство непрерывных ограниченных на $\overline{\Omega}$ отображений с супремум-нормой $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}^0}$. Пусть задано некоторое подмножество $\Phi \subseteq C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ пространства непрерывных ограниченных отображений $\overline{\Omega}$ в Y.*

Пусть отображение $U(t,x)$, $U\colon \left(\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega}\right) \mapsto \overline{\Omega}$ - однопараметрическая полугруппа, отображающая $\overline{\Omega}$ в себя и пусть отображение $U(t,x)$ непрерывно по аргументу $x \in \overline{\Omega}$.

Если выполнено включение

$$\forall t \geq 0, \forall \varphi \in \Phi \ : \ \varphi(U(t,\cdot)) \in \Phi \tag{2.18}$$

то однопараметрическое семейство отображений $T(t,\varphi)$ определенное по формуле

$$\forall t \geq 0, \forall \varphi \in \Phi \ : \ (T_t\varphi)(\cdot) = \varphi(U(t,\cdot)) \tag{2.19}$$

определяет однопараметрическую полугруппу, отображающую множество отображений Φ в себя.

Теорема 2.5.3 (О линейности полугруппы неоднородного сдвига)**.** *Пусть в условиях теоремы (2.5.1) задано некоторое подмножество отображений $\Phi \subseteq C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ пространства непрерывных ограниченных отображений $\overline{\Omega}$ в Y, и пусть Φ является замкнутым относительно линейных операций над его элементами, то есть*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi \ \Rightarrow \ (\varphi_1 + \varphi_2) \in \Phi \tag{2.20}$$

$$\varphi \in \Phi, \ \alpha \in \mathbb{C} \ \Rightarrow \ (\alpha\varphi) \in \Phi \tag{2.21}$$

Тогда семейство отображений T_t определенное формулой (2.19) является семейством ограниченных линейных операторов, причем $\forall t \geq 0\colon \|T_t\| \leq 1$.

Доказательство.

Покажем что $T_t(\varphi)$ - семейство ограниченных линейных операторов по аргументу φ. Для произвольных $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi, x \in \overline{\Omega}$ имеем:

$$\begin{aligned}&(T_t(\varphi_1+\varphi_2))(x) = (\varphi_1+\varphi_2)(U_t(x)) = \varphi_1(U_t(x)) + \varphi_2(U_t(x)) = \\ &= (T_t(\varphi_1))(x) + (T_t(\varphi_2))(x) = (T_t(\varphi_1)+T_t(\varphi_2))(x) \quad \Rightarrow \\ &T_t(\varphi_1+\varphi_2) = T_t(\varphi_1)+T_t(\varphi_2)\end{aligned} \tag{2.22}$$

Аналогично для умножения функции-аргумента на число:
для произвольных $\varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y), \alpha \in \mathbb{C}, x \in \overline{\Omega}$:

$$\begin{aligned}&(T_t(\alpha\varphi))(x) = (\alpha\varphi)(U_t(x)) = \\ &= \alpha\varphi(U_t(x)) = \alpha((T_t(\varphi))(x)) = (\alpha T_t(\varphi))(x) \quad \Rightarrow \\ &T_t(\alpha\varphi) = \alpha T_t(\varphi)\end{aligned} \tag{2.23}$$

При этом

$$\|T_t\| = \sup_{0\neq\varphi\in\Phi} \frac{\|T_t\varphi\|_{\overline{\Omega}^0}}{\|\varphi\|_{\overline{\Omega}^0}} = \sup_{0\neq\varphi\in\Phi} \frac{\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \|\varphi(U(t,x))\|_Y}{\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \|\varphi(x)\|_Y} \leq 1 \tag{2.24}$$

в силу условия $U\colon (\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega}) \mapsto \overline{\Omega}$. □

2.6 Генератор полугруппы неоднородного сдвига

Получим явное выражение для полугруппы неоднородного сдвига T_t, заданной формулой (2.7). Предположим что область определения генератора A_U полугруппы U_t не пуста. Генератор A_U полугруппы U_t - это отображение $A_U(.)\colon \overline{\Omega} \mapsto X$ определенное как

$$A_U(x) = \lim_{t\to+0} \frac{U_t(x)-x}{t} \tag{2.25}$$

(где сходимость по норме пространства X), с областью определения

$$Dom(A_U) = \{x \in \overline{\Omega}\colon \exists \lim_{t\to+0} \frac{U_t(x)-x}{t} < \infty\} \tag{2.26}$$

При фиксированном $x \in Dom(A_U)$ правая часть равенства (2.25) представляет собой (правую) производную $U(t,x)$ по аргументу t, и его можно с использованием o-нотации записать как

$$U_t(x) = x + A_U(x)t + o_1(t) \tag{2.27}$$

Пусть $\varphi \in Dom(A_T)$ и φ дифференцируема на $\overline{\Omega}$. Согласно (2.4-2.3) это означает что существует отображение $(A_T(\varphi))(.)\colon \overline{\Omega} \mapsto Y$ такое что

$$\lim_{t\to+0} \left\| \frac{T_t(\varphi)-\varphi}{t} - A_T(\varphi) \right\|_{\overline{\Omega}^0} = \lim_{t\to+0} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \left\| \frac{\varphi(U_t(x)-\varphi(x))}{t} - (A_T(\varphi))(x) \right\|_Y = 0 \tag{2.28}$$

что можно также записать с использованием o-нотации как

$$\varphi(U_t(x)) = \varphi(x) + (A_T(\varphi))(x)t + o_2(t) \tag{2.29}$$

Подставляя выражение для $U_t(x)$ из (2.27) получаем

$$\begin{aligned} &\varphi(U_t(x)) = \varphi\left(x + (A_U(x)t + o_1(t))\right) = \\ &= \varphi(x) + \varphi'(x)(A_U(x)t + o_1(t)) + o_2(A_U(x)t + o_1(t)) = \\ &= \varphi(x) + \varphi'(x)A_U(x)t + o_3(t) \end{aligned} \tag{2.30}$$

в силу $\|A_U(x)\| < \infty$. Следовательно

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{\varphi(U_t(x)) - \varphi(x)}{t} - \varphi'(x)A_U(x) \right\|_Y = 0 \tag{2.31}$$

и, сопоставляя с (2.28) получаем что

$$\forall \varphi \in Dom(A_T), \forall x \in Dom(A_U)\colon (A_T(\varphi))(x) = \varphi'(x)A_U(x) \tag{2.32}$$

Мы получили явное выражение для значений генератора A_T полугруппы T_t на $\varphi \in Dom(A_T) \cap C^1(\overline{\Omega}, Y)$, $x \in Dom(A_U)$. Из (2.32) понятно что требование (2.5) $(A_T(\varphi))(x) = \varphi'(x)f(x)$ может выполняться для полугруппы T_t вида (2.7) для всех дифференцируемых $\varphi \in Dom(A_T)$ и для всех $x \in \overline{\Omega}$ только в том случае когда выполнено

$$\forall x \in Dom(A_U)\colon A_U(x) = f(x) \tag{2.33}$$

Таким образом, мы получили явное выражение для генератора полугруппы U_t, которая дает через представление (2.7) решение поставленной задачи (2.2)-(2.5), при условиях выполнения включений (2.8) $U_t(\overline{\Omega}) \subseteq \overline{\Omega}$ и (2.18) $T_t(\Phi) \subseteq \Phi$. Сформулируем и докажем следующее основное утверждение относительно взаимосвязи генераторов полугрупп T_t и U_t.

Теорема 2.6.1 (О генераторе полугруппы неоднородного сдвига)**.** *Пусть X - банахово пространство, $\Omega \subseteq X$ - открытое подмножество X, $\overline{\Omega}$ - замыкание Ω. Пусть $U(t, x)$, $U\colon (\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega}) \mapsto \overline{\Omega}$ - однопараметрическая полугруппа, отображающая множество $\overline{\Omega}$ в себя, непрерывная по переменной x на $x \in \overline{\Omega}$. Пусть $A_U\colon Dom(A_U) \mapsto X$ - генератор полугруппы U, определенный по формуле $A_U(x) = \lim\limits_{t\to+0} \frac{U(t,x)-x}{t}$ на множестве $Dom(A_U) \subseteq \overline{\Omega}$ тех значений x для которых указанный предел существует и конечен.*

Пусть Y - банахово пространство и пусть $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ - пространство непрерывных и ограниченных на $\overline{\Omega}$ отображений $\overline{\Omega}$ в Y с супремум нормой $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}^0}$:

$$\forall \varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y)\ :\ \|\varphi\|_{\overline{\Omega}^0} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|\varphi(x)\|_Y$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений $T(t, \varphi)$, определенное на $\mathbb{R}_0^+ \times C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$, которое каждому числу $t \geq 0$ и каждому отображению $\varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ сопоставляет некоторое отображение $T_t\varphi\colon \overline{\Omega} \mapsto Y$ по формуле

$$(T_t(\varphi))(\cdot) = \varphi(U(t, \cdot)) \tag{2.34}$$

(где точка обозначает произвольный аргумент $x \in \overline{\Omega}$). Согласно теоремам 2.5.1 и 2.5.3, семейство T_t является однопараметрической полугруппой линейных операторов, отображающих пространство $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ в себя.

Пусть A_T - генератор полугруппы T, определенный по формуле

$$A_T(x) = \lim_{t\to+0} \frac{T_t\varphi - \varphi}{t} \tag{2.35}$$

на множестве $Dom(A_T) \subseteq C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ тех значений x для которых указанный предел существует (при сходимости по норме $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}^0}$) и принадлежит пространству $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$. Тогда, для всех $\varphi \in Dom(A_T)$ таких что φ сильно дифференцируема на $\overline{\Omega}$, верно равенство

$$\forall x \in Dom(A_U)\ :\ (A_T(\varphi))(x) = \varphi'(x)A_U(x) \tag{2.36}$$

Доказательство. Покажем, что выполняется соотношение (2.36). Пусть $\varphi \in Dom(A_T)$. Это значит что

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to+0} \left\| \frac{T_t(\varphi) - \varphi}{t} - A_T(\varphi) \right\|_{\overline{\Omega}^0} = \\ &= \lim_{t\to+0} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \left\| \frac{(T_t(\varphi))(x) - \varphi(x)}{t} - (A_T(\varphi))(x) \right\|_Y = \\ &= \lim_{t\to+0} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \left\| \frac{\varphi(U_t(x) - \varphi(x)}{t} - (A_T(\varphi))(x) \right\|_Y \end{aligned} \tag{2.37}$$

и в частности

$$\forall x \in \overline{\Omega}\colon\ \lim_{t\to+0} \left\| \frac{\varphi(U_t(x) - \varphi(x)}{t} - (A_T(\varphi))(x) \right\|_Y = 0 \tag{2.38}$$

Пусть $x \in Dom(A_U) \subseteq \overline{\Omega}$ фиксировано. Тогда $\lim\limits_{t\to+0} \left\| \frac{U_t(x)-x}{t} - A_U(x) \right\| = 0$, то есть для любого $\epsilon_u > 0$ найдется такое $\delta_u = \delta_u(\epsilon_u, x) > 0$ что неравенство $0 < t < \delta_u$ влечет $\|\frac{U_t(x)-x}{t} - A_U(x)\| < \epsilon_u$. Используя неравенство $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ мы можем заключить

$$0 < t < \delta_u \Rightarrow \|U_t(x) - x\| < t(\|A_U(x)\| + \epsilon_u) \tag{2.39}$$

Пусть φ сильно дифференцируема на $\overline{\Omega}$, то есть $\forall x \in \overline{\Omega}$ существует и конечна сильная производная $\varphi'(x)$. Это означает что для любого $\epsilon_\varphi > 0$ найдется такое $\delta_\varphi = \delta_\varphi(\epsilon_\varphi, x)$ что
$\|\Delta x\| < \delta_\varphi, x + \Delta x \in \overline{\Omega}$ влечет $\|\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) - \varphi'(x)\Delta x\| \leq \epsilon_\varphi \|\Delta x\|$.
В частности

$$\|U_t(x) - x\| < \delta_\varphi \Rightarrow \|\varphi(U_t(x)) - \varphi(x) - \varphi'(x)(U_t(x) - x)\| \leq \epsilon_\varphi \|U_t(x) - x\| \tag{2.40}$$

Выберем $\epsilon_u > 0$ и $\delta = \delta(\epsilon_\varphi, x) > 0$ столь малые что $0 < t < \delta$ влечет $\|U_t(x) - x\| < \delta_\varphi$. В силу (2.39) этого можно достичь взяв

$$\epsilon_u < \|A_U(x)\|,\ \delta < \min\left(\delta_u(\epsilon_u, x), \frac{\delta_\varphi}{2\|A_U(x)\|}\right)$$

Тогда при $0 < t < \delta$ выполнено предусловие импликации (2.40) и верно неравенство в правой части. Разделим последнее неравенство на t

$$\left\|\frac{\varphi(U_t(x)) - \varphi(x)}{t} - \varphi'(x)\frac{U_t(x) - x}{t}\right\| \leq \epsilon_\varphi \frac{\|U_t(x) - x\|}{t} < \epsilon_\varphi(\|A_U(x)\| + \epsilon_u)$$

где последнее неравенство следует из (2.39). Снова пользуясь аксиомой нормы $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ мы можем оценить

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\varphi(U_t(x)) - \varphi(x)}{t} - \varphi'(x)A_U(x)\right\| = \\
&= \left\|\left(\frac{\varphi(U_t(x)) - \varphi(x)}{t} - \varphi'(x)\frac{U_t(x) - x}{t}\right) + \varphi'(x)\left(\frac{U_t(x) - x}{t} - A_U(x)\right)\right\| \leq \\
&\leq \left\|\frac{\varphi(U_t(x)) - \varphi(x)}{t} - \varphi'(x)\frac{U_t(x) - x}{t}\right\| + \left\|\varphi'(x)\left(\frac{U_t(x) - x}{t} - A_U(x)\right)\right\| \leq \\
&\leq \epsilon_\varphi(\|A_U(x)\| + \epsilon_u) + \|\varphi'(x)\|\left\|\frac{U_t(x) - x}{t} - A_U(x)\right\| < \\
&< \epsilon_\varphi(\|A_U(x)\| + \epsilon_u) + \|\varphi'(x)\|\epsilon_u
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Так как $\epsilon_\varphi, \epsilon_u$ произвольно малы а $\|A_U(x)\|, \|\varphi'(x)\|$ - конечны, то

$$\lim_{t \to +0} \left\|\frac{\varphi(U_t(x)) - \varphi(x)}{t} - \varphi'(x)A_U(x)\right\| = 0$$

что и означает требуемое равенство (2.36)

$$(A_T(\varphi))(x) = \lim_{t \to +0} \frac{\varphi(U_t(x)) - \varphi(x)}{t} = \varphi'(x)A_U(x)$$

□

Следствие 2.6.2. *Пусть $X, Y, \Omega, \overline{\Omega}$ - как в условиях теоремы 2.6.1. Пусть $f \in C(\overline{\Omega}, Y)$ - непрерывное отображение, заданное в постановке задачи (2.2)-(2.5).*
Если

1. *$U: (\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega}) \mapsto \overline{\Omega}$ - однопараметрическая полугруппа, отображающая $\overline{\Omega}$ в себя*
2. *для ее генератора A_U верно $Dom(A_U) = \overline{\Omega}$ и $\forall x \in \overline{\Omega}$: $A_U(x) = f(x)$*
3. *$\forall t \geq 0$ отображение $U(t, x)$ непрерывно по переменной x на $x \in \overline{\Omega}$*

тогда однопараметрическое семейство отображений T_t, определенное на множестве $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ по формуле $(T_t\varphi)(\cdot) = \varphi(U(t, \cdot))$ определяет полугруппу, которая является решением поставленной задачи (2.2)-(2.5) в том случае когда $Dom(T_t) = \Phi = C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$, то есть когда область определения искомой полугруппы T есть все пространство $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$.

Пусть в условиях теоремы 2.6.1 $Dom(A_U) = \overline{\Omega}$ и $\forall x \in \overline{\Omega}\colon A_U(x) = f(x)$ где $f \in C(\overline{\Omega}, X)$ - непрерывное отображение, заданное в постановке задачи (2.2)-(2.5). Пусть задано некоторое подмножество $\Phi \subset C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ пространства непрерывных ограниченных отображений, такое что для Φ и полугруппы U_t выполняется соотношение (2.18):

$$\forall \varphi \in \Phi \ : \ \varphi(U(t, \cdot)) \in \Phi$$

Тогда, согласно следствию 2.5.2, однопараметрическое семейство отображений $T(t, \varphi)$, определенное по формуле (2.19)

$$\forall t \geq 0, \forall \varphi \in \Phi \ : \ (T_t\varphi)(\cdot) = \varphi(U(t, \cdot))$$

является однопараметрической полугруппой, отображающей множество Φ в себя. Пусть $A_T\colon Dom(A_T) \mapsto C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ - генератор этой полугруппы. Его область определения $Dom(A_T) \subseteq \Phi$ - это те элементы $\varphi \in \Phi$ для которых существует предел в (2.35). Его значениями являются однако не элементы множества Φ, но элементы объемлющего пространства $C_b^0(\overline{\Omega}, Y) \supset \Phi$. Поскольку $\Phi \subset C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$, то все соотношения установленные в ходе доказательства теоремы 2.6.1 для элементов пространства $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$, также верны и для элементов $\varphi \in \Phi \subset C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$. В частности, равенство (2.36) выполняется для всех дифференцируемых на $\overline{\Omega}$ отображений $\varphi \in Dom(A_T) \subseteq \Phi$. Таким образом, получаем следующее:

Следствие 2.6.3. *Пусть $\Phi \subset C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$. Если*

1. *$U\colon (\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega}) \mapsto \overline{\Omega}$ - однопараметрическая полугруппа, отображающая $\overline{\Omega}$ в себя*
2. *для ее генератора A_U верно $Dom(A_U) = \overline{\Omega}$ и $\forall x \in \overline{\Omega}\colon A_U(x) = f(x)$*
3. *$\forall t \geq 0, \forall \varphi \in \Phi \ : \ \varphi(U(t, \cdot)) \in \Phi$*

тогда однопараметрическое семейство отображений T_t, определенное на множестве Φ по формуле $(T_t\varphi)(\cdot) = \varphi(U(t, \cdot))$ определяет полугруппу, которая является решением поставленной задачи (2.2)-(2.5) в том случае когда $Dom(T_t) = \Phi \subset C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$.

Замечание 2.6.4. *Случай $Dom(T_t) = \Phi \subset C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ может показаться искусственным. Однако это распространенная постановка задачи в приложениях, когда заданы краевые условия для отображений $\varphi \in \Phi$ на границе $\partial\Omega$ множества Ω. Например Φ может быть задано следующим образом:*

$$\Phi = \left\{ \varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y) \ \mid \forall x \in \partial\Omega\colon \varphi(x) = \psi(x) \right\}$$

где $\psi\colon \partial\Omega \mapsto Y$ - некоторое фиксированное непрерывное отображение. Если ψ не равно тождественно нулю, то множество Φ не является линейным подпространством $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ (что упростило бы задачу), и однако же сама постановка такой задачи вполне естественна.

2.7 Полугруппа U_t как решение задачи Коши

Таким образом, для того чтобы найти решение поставленной задачи (2.2)-(2.5), достаточно определить в каком случае существует полугруппа $U\colon \left(\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega}\right) \mapsto \overline{\Omega}$, для которой выполняются предусловия следствия 2.6.2 либо следствия 2.6.3. Предусловия этих двух следствий отличаются только третьим, последним пунктом, который отражает отличие в области определения полугруппы T_t. Следующее предложение показывает, что первые два пункта

1. $U\colon (\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega}) \mapsto \overline{\Omega}$ - однопараметрическая полугруппа, отображающая $\overline{\Omega}$ в себя

2. $Dom(A_U) = \overline{\Omega}$ и $\forall x \in \overline{\Omega}\colon A_U(x) = f(x)$

выполняются для отображения $U(t,x)$, определенного как решение задачи Коши $\frac{d}{ds}u(s) = f(u(s))$ с начальным значением $u(0) = x$ в момент $s = t$, если решение существует неограниченно во времени для всех начальных значений $x \in \overline{\Omega}$ и не выходит за пределы множества $\overline{\Omega}$.

Предложение 2.7.1 (о полугруппе U_t как решении задачи Коши)**.** *Пусть X - банахово пространство, $\Omega \subseteq X$ - открытое подмножество X, $\overline{\Omega}$ - замыкание Ω. Пусть задано непрерывное отображение $f \in C(\overline{\Omega}, X)$. Пусть известно что решение следующей задачи Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t,x) = f(U(t,x)),\ \ 0 \leq t \leq T \\ U(0,x) = x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{2.42}$$

существует и единственно для любого начального значения $x \in \overline{\Omega}$ в течении любого конечного интервала времени $[0,T], T < \infty$, и не выходит за пределы $\overline{\Omega}$, т.е. для отображения $U(t,x)$ выполняется условие (2.9):

$$U \ : \ \left(\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega}\right) \mapsto \overline{\Omega}$$

.

Тогда

1. *отображение $U(t,x)$ определяет однопараметрическую полугруппу, отображающую $\overline{\Omega}$ в себя*

2. *$Dom(A_U) = \overline{\Omega}$ и $\forall x \in \overline{\Omega}\colon A_U(x) = f(x)$*

Доказательство. Для того чтобы показать что отображение $U(t,x)$, определенное как решение задачи Коши (2.42) является полугруппой, рассмотрим значение $U(t_1 + t_2, x)$: это положение в момент времени $s = t_1 + t_2$ точки на траектории выходящей в момент времени $s = 0$ из точки x. На интервале времени $t_1 \leq s \leq t_2$ введем новую переменную времени $\tau = s - t_1$. На интервале $\tau \in [0, t_2]$ функция $u_2(\tau) = U(s, x) = U(t_1 + \tau, x)$ представляет собой решение задачи Коши с начальным значением $U(t_1, x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau} u_2(\tau) = \dfrac{d}{d\tau} U(t_1 + \tau, x) = f(U(t_1 + \tau, x)) = f(u_2(\tau)), \ 0 \le \tau \le t_2 \\ u_2(0) = U(t_1, x) \end{cases}$$

и потому ее значение при $\tau = t_2$ равно $u_2(t_2) = U(t_2, U(t_1, x))$, то есть $U(t_1 + t_2, x) = U(t_2, U(t_1, x))$ и, следовательно отображение $U(t, x)$ - полугруппа. Так как по предположению теоремы значения $U(t, x)$ не выходят за пределы $\overline{\Omega}$, то отображение $U(t, x)$ - полугруппа, отображающая множество $\overline{\Omega}$ в себя. Первое утверждение доказано.

Покажем что генератор полугруппы $U(t, x)$, определенной как решение задачи Коши (2.42), совпадает с $f(x)$. Для этого рассмотрим равенство $\frac{d}{dt} U(t, x) = f(U(t, x))$ в точке $t = 0$. В силу $U(0, x) = x$ имеем

$$0 = \lim_{t \to +0} \left\| \frac{U(t, x) - U(0, x)}{t} - f(U(0, x)) \right\| = \lim_{t \to +0} \left\| \frac{U(t, x) - x}{t} - f(x) \right\|$$

что по определению и означает что $A_U(x) = f(x)$. Так как по предположению теоремы решение задачи Коши (2.42) существует для всех начальных данных $x \in \overline{\Omega}$, то $Dom(A_U) = \overline{\Omega}$. □

Таким образом, для того чтобы определить в каком случае семейство T_t, определенное формулой (2.7), где $U_t(x)$ определено как решение задачи Коши (2.42), является решением задачи (2.2)-(2.5) поставленной для случая $Dom(T_t) = \Phi = C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$, нам нужно определить, при каких соотношениях между множеством Ω и отображением $f \in C(\overline{\Omega}, X)$:

- решение $U(t, x)$ задачи Коши (2.42) существует при всех $t \ge 0$ для всех начальных значений $x \in \overline{\Omega}$
- для любого начального значения $x \in \overline{\Omega}$ решение не выходит за пределы $\overline{\Omega}$ (условие (2.8))
- решение непрерывно зависит от начальной точки $x \in \overline{\Omega}$

Глава 3

Существование решения задачи Коши, определяющего полугруппу U_t с требуемыми свойствами

Рассмотрим подробнее вопросы поставленные в конце раздела 2.7. Нас интересует при каких соотношениях между открытым множеством $\Omega \subseteq X$ и непрерывно-дифференцируемым полем направлений $f \in C(\overline{\Omega}, X)$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t,u_0) = f(U(t,u_0)),\ 0 \le t \le T \\ U(0,u_0) = u_0 \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{3.1}$$

1. существует, единственно и конечно на любом конечном интервале:
$$Dom(U) = \mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega} \tag{3.2}$$

2. остается в пределах $\overline{\Omega}$:
$$Ran(U) \subseteq \overline{\Omega} \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \ge 0, \forall u_0 \in \overline{\Omega}\ :\ U(t,u_0) \in \overline{\Omega} \tag{3.3}$$

3. непрерывно по начальному значению u_0:
$$\forall t \ge 0\ :\ U(t,\cdot) \in C(\overline{\Omega}, \overline{\Omega}) \tag{3.4}$$

Мы покажем, что если для любого начального значения u_Γ, принадлежащего границе $\partial\Omega$ множества Ω, в течение определенного конечного промежутка времени существует локальное по времени решение не выходящее из $\overline{\Omega}$, то существует глобальное по времени решение, удовлетворяющее условиям (3.2)-(3.3)(теорема 3.4.2). Мы покажем также что при тех же самых условиях решение равномерно непрерывно зависит от начального значения (теорема 3.5.1).

3.1 Общие условия существования решения задачи Коши в банаховом пространстве

Условия существования локального и глобального по времени решения задачи Коши в банаховом пространстве аналогичны таковым для обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно:

- Локальное по времени решение задачи Коши существует и единственно если $f(\cdot)$ локально липшицева в некоторой окрестности начального значения
- Если $f(\cdot)$ локально липшицева лишь на ограниченном множестве, решение может уйти в бесконечность за конечное время, и тогда существует только локальное по времени решение
- Глобальное по времени решение задачи Коши существует и единственно, если $f(\cdot)$ глобально липшицева

Следуя [2], [6] изложим эти результаты более подробно.

Определение 3.1.1 ([6, гл. 2])**.** *Пусть X - банахово пространство, E - подмножество X. Говорят что отображение $f\colon E \mapsto X$ удовлетворяет на E условию Липшица с константой $K > 0$ (локально липшицева на E с константой K), если*

$$\forall x_1, x_2 \in E \ : \ \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|$$

Если это неравенство выполняется на всем X, то f называют глобально липшицевой.

Функция, которая удовлетворяет условию Липшица на неограниченном множестве, растет на этом множестве не более чем линейно.

Лемма 3.1.2 ([6, гл. 2])**.** *Если $f\colon E \mapsto X$ липшицева на множестве E, то существует константа C такая что*

$$\forall x \in E \ : \ \|f(x)\| \leq C(1 + \|x\|)$$

Если f липшицева на ограниченном множестве E, то f ограничена на E.

Доказательство. Выберем $x_0 \in E$ и с помощью неравенства $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ оценим

$$\begin{aligned} &\|f(x)\| \leq \|f(x) - f(x_0)\| + \|f(x_0)\| \leq \\ &\leq K\|x - x_0\| + \|f(x_0)\| \leq K(\|x\| + \|x_0\|) + \|f(x_0)\| \end{aligned}$$

Очевидно $\|f(x)\|$ ограничена на E если E ограничено. Взяв $= \max(K, K\|x_0\| + \|f(x_0)\|)$ получим $\|f(x)\| \leq C(1 + \|x\|)$ □

Лемма 3.1.3 ([6, гл. 2]). *Пусть $f\colon X \mapsto X$ непрерывно дифференцируема в шаре*

$$B_R(x_0) = \{x \in X : \ \|x - x_0\| < R\}$$

и f' равномерно ограничено на $B_R(x_0)$, то есть

$$\sup_{x \in B_R(x_0)} \|f'(x)\| = K < \infty$$

Тогда f удовлетворяет на $B_R(x_0)$ условию Липшица с константой K. В частности, если f' равномерно ограничена на всем X, то f глобально липшицева.

Доказательство. Используя обобщенную формулу Ньютона-Лейбница [4, гл. X, §1, п.7] мы можем записать для произвольных $x_1, x_2 \in B_R(x_0)$

$$\begin{aligned}\|f(x_1) - f(x_2)\| = \left\|\int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1 + (1-t)x_2)dt\right\| \leq \\ \leq \int_0^1 \|f'(tx_1 + (1-t)x_2) \cdot (x_1 - x_2)\|dt \leq K\|x_1 - x_2\|\end{aligned} \tag{3.5}$$

□

Теорема 3.1.4 (Пикара, о локальном существовании решения, [6, гл. 2, теорема 2.2]). *Пусть X - банахово пространство, $f\colon X \mapsto X$ - липшицева в замкнутом шаре $\overline{B}_R(u_0) \subset X$ где $R > 0$, $u_0 \in X$ и*

$$M = \sup_{x \in \overline{B}_R(u_0)} \|f(x)\| < \infty$$

Тогда задача Коши

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

имеет единственное, непрерывно дифференцируемое, локальное по времени решение $u(t)$. Это решение определено во временном интервале $-\delta < t < \delta$, где

$$\delta = \frac{R}{M}$$

Доказательство. Запишем задачу Коши в виде эквивалентного интегрального уравнения

$$u = F_0(u)$$

где

$$(F_0(u))(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s))ds$$

Для $0 < \eta_0 < R/M$ определим множество Y_0 непрерывных функций $y(t)\colon [-\eta_0, \eta_0] \mapsto \overline{B}_R(u_0)$. Определим на элементах из Y_0 норму

$\|y\|_{Y_0} = \sup\limits_{|t|\le\eta_0} \|y(t)\|$. Так как область значений $\overline{B}_R(u_0)$ функций из Y_0 замкнута, любая функция, являющаяся пределом последовательности функций из Y_0 в смысле сходимости по норме $\|\cdot\|_{Y_0}$, принимает значения из $\overline{B}_R(u_0)$. С помощью 3ϵ аргумента можно показать что любой предел последовательности функций из Y_0 по норме $\|\cdot\|_{Y_0}$ является непрерывной функцией. Таким образом, множество функций Y_0 замкнуто относительно сходимости по норме $\|\cdot\|_{Y_0}$.

Мы покажем что F_0 отображает Y_0 в Y_0 и является сжимающим по норме $\|\cdot\|_{Y_0}$ для достаточно малого η_0.

Пусть $u \in Y_0$. Тогда

$$\|(F_0(u))(t) - u_0\| = \left\|\int_0^t f(u(s))ds\right\| \le M\eta_0 < R$$

и поэтому $F_0(u) \in Y_0$, то есть действительно выполняется $F_0(Y_0) \subseteq Y_0$.

Далее для $u, v \in Y_0$ можно оценить

$$\begin{aligned} \|F_0(u) - F_0(v)\|_{Y_0} &= \sup_{|t|\le\eta_0} \left\|\int_0^t (f(u(s)) - f(v(s)))ds\right\| \le \\ &\le \sup_{|t|\le\eta_0} \int_0^t \|(f(u(s)) - f(v(s)))\|\, ds \le \sup_{|t|\le\eta_0} \int_0^t K\|u(s) - v(s)\|ds \le \\ &\le \sup_{|t|\le\eta_0} \int_0^t K \sup_{|t|\le\eta_0} \|u(s) - v(s)\|ds \le K\eta_0\|u - v\|_{Y_0} \end{aligned} \tag{3.6}$$

где K - константа Липшица для f на $\overline{B}_R(u_0)$. При $\eta_0 < 1/K$ отображение F_0 сжимающее. Так как оно отображает замкнутое множество Y_0 в себя, то оно имеет единственную неподвижную точку $u_0^*(t) \in Y_0$, которая является решением интегрального уравнения и задачи Коши на интервале $|t| \le \eta_0$.

Пусть $u_1 = u_0^*(\eta_0)$ (либо $u_1 = u_0^*(-\eta_0)$). Покажем что расстояние d_1 от u_1 до границы $\partial B_R(u_0) = \{x \in X : \|x - u_0\| = R\}$ равно

$$d_1 = \inf_{\|x-u_0\|=R} \|x - u_1\| = R - \|u_1 - u_0\|$$

В самом деле, для точки $u_1' = \frac{u_1-u_0}{\|u_1-u_0\|}R + u_0$ выполнено $\|u_1' - u_0\| = R$, то есть $u_1' \in \partial B_R(u_0)$, при этом $\|u_1' - u_1\| = \|\frac{u_1-u_0}{\|u_1-u_0\|}R - (u_1 - u_0)\| = R - \|u_1 - u_0\|$, то есть указанное расстояние достижимо. Покажем что оно минимально. Если предположить что существует $u_1'' \in \partial B_R(u_0) : \|u_1'' - u_1\| < R - \|u_1 - u_0\|$ то $\|u_1'' - u_0\| \le \|u_1'' - u_1\| + \|u_1 - u_0\| < R$ что противоречит предположению $u_1'' \in \partial B_R(u_0)$.

Положим $0 < \eta_1 < d_1/M$ и определим множество Y_1 непрерывных функций $y(t) : [\eta_0 - \eta_1, \eta_0 + \eta_1] \mapsto \overline{B}_R(u_0)$. Определим отображение

$$(F_1(u))(t) = u_1 + \int_{\eta_0}^t f(u(s))ds$$

F_1 отображает Y_1 в себя, так как для $u \in Y_1$ и $|t - \eta_0| \le \eta_1$

$$\|F_1 u(t) - u_0\| = \left\| u_1 - u_0 + \int_{\eta_0}^{t} f(u(s))ds \right\| \le \|u_1 - u_0\| + \eta_1 M < |u_1 - u_0\| + d_1 = R$$

то есть $F_1(Y_1) \subseteq Y_1$. При $\eta_1 < 1/K$ отображение F_1 также является сжимающим и следовательно имеет неподвижную точку $u_1^*(t) \in Y_1$, которая является единственным решением задачи Коши на интервале $|t - \eta_0| \le \eta_1$ удовлетворяющим начальному условию $u_1^*(\eta_0) = u_1 = u_0^*(\eta_0)$ и позволяет продолжить решение на расширенный интервал $|t| \le \eta_0 + \eta_1$.

Поскольку время существования локального решения η_i зависит только от константы Липшица функции f на $\overline{B}_R(u_0)$ и от расстояния d_i от начальной точки u_i до границы $\overline{B}_R(u_0)$, то многократное повторное применение результата о существовании решения на $|t| < \sum_i \eta_i$ дает существование единственного локального решения на $|t| < R/M$. □

Теорема 3.1.5 (о существовании глобального решения)**.** *Пусть X - банахово пространство, $f\colon X \mapsto X$ - отображение, удовлетворяющее на всем X условию Липшица с константой K. Тогда существует единственное решение $u\colon \mathbb{R} \mapsto X$ задачи Коши*

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u), \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases}$$

определенное и непрерывно дифференцируемое для всех $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Запишем задачу Коши в виде эквивалентного интегрального уравнения

$$u = F_0(u)$$

где

$$(F_0(u))(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s))ds$$

Для $0 < \eta_0 < 1/K$ определим множество Y_0 непрерывных функций $y(t)\colon [-\eta_0, \eta_0] \mapsto X$. F_0 отображает Y_0 в Y_0 и является сжимающим для нормы $\|y\|_{Y_0} = \sup\limits_{|t| \le \eta_0} \|y(t)\|$, поэтому оно имеет единственную неподвижную точку $u_0^*(t)$ которая является решением задачи Коши на интервале $|t| \le \eta_0$. В данном случае время существования η_0 локального решения зависит только от константы Липшица K, поэтому способом аналогичным использованному при доказательстве предыдущей теоремы решение может быть продолжено во времени неограниченно. □

3.2 Поведение непрерывной траектории в окрестности границы открытого множества

Лемма 3.2.1 (о прохождении непрерывной траектории через граничную точку открытого множества)**.** *Пусть X - банахово пространство, $\Omega \subset X$ - открытое подмножество X, $\overline{\Omega}$ - замыкание Ω, $u\colon [t_1, t_2] \mapsto X$ - непрерывное отображение отрезка $[t_1, t_2]$ в X, причем $u(t_1) \in \Omega,\ u(t_2) \notin \overline{\Omega}$. Тогда в некоторый момент $t^*,\ t_1 < t^* < t_2$ траектория $u(t)$ пересекает границу $\partial\Omega$ множества Ω, то есть $u(t^*) \in \partial\Omega$.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$I_{\overline{\Omega}} = \{t \in [t_1, t_2] \mid u(t) \in \overline{\Omega}\}$$

$I_{\overline{\Omega}}$ очевидно ограничено сверху, поэтому существует его точная верхняя грань. Положим $t^* = \sup I_{\overline{\Omega}}$.

Покажем сначала что $t^* \neq t_1$ и $t^* \neq t_2$. Так как Ω открытое множество, то точка $u(t_1)$ входит в Ω вместе с некоторой своей ϵ-окрестностью $O_\epsilon(u(t_1))$. Так как $u(t)$ непрерывна, то найдется такое $\delta > 0$ что $t_1 \leq t < t_1 + \delta$ влечет $u(t) \in O_\epsilon(u(t_1)) \subset \Omega$, то есть существуют $t > t_1$ такие что $u(t_1) \in \overline{\Omega}$ и поэтому $t^* = \sup I_{\overline{\Omega}} > t_1$. Далее, множество $X \backslash \overline{\Omega}$ - открыто, как дополнение замкнутого множества$\overline{\Omega}$. Поэтому точка $u(t_2)$ входит в $X \backslash \overline{\Omega}$ вместе с некоторой своей ϵ-окрестностью $O_\epsilon(u(t_2))$. В силу непрерывности $u(t)$ найдется такое $\delta > 0$ что $t_2 - \delta < t \leq t_2$ влечет $u(t) \in O_\epsilon(u(t_2)) \subset X \backslash \overline{\Omega}$. Предположение $t^* = t_2$ тогда противоречит тому что t^* - наименьшая верхняя грань множества $I_{\overline{\Omega}}$.

Покажем теперь что $u(t^*) \in \partial\Omega$. Граница $\partial\Omega$ множества Ω - это множество точек $x \in X$ таких что в сколь угодно малой их окрестности найдутся как точки принадлежащие множеству Ω так и не принадлежащие ему. Пусть $O_\epsilon(u(t^*))$ - произвольная ϵ-окрестность точки $u(t^*)$.В силу непрерывности $u(t)$ найдется такое $\delta > 0$ что $t \in I_\delta = (t^* - \delta, t^* + \delta) \subset [t_1, t_2]$ влечет $u(t) \in O_\epsilon(u(t^*))$.

Покажем что найдется $v \in O_\epsilon(u(t^*))$ такое что $v \in \Omega$. Так как t^* - точная верхняя грань, то для сколь угодно малого $\mu > 0$ в интервале $(t^* - \mu, t^*) \subset I_\delta$ найдется такое t что $u(t) \in \overline{\Omega}$. Так как окрестность $O_\epsilon(u(t^*))$ - открытое множество, то $u(t)$ входит в $O_\epsilon(u(t^*))$ вместе с некоторой своей открытой окрестностью $O_\nu(u(t)) \subset O_\epsilon(u(t^*))$. Так как множество $\overline{\Omega}$ состоит из предельных точек множества Ω то в любой окрестности точки $u(t) \in \overline{\Omega}$, в том числе в $O_\nu(u(t))$, найдется точка $v \in \Omega$.

Покажем что найдется $v \in O_\epsilon(u(t^*))$ такое что $v \notin \Omega$. Если предположить что $O_\epsilon(u(t^*)) \subset \Omega$ то тогда в силу включения $u(I_\delta) \subseteq O_\epsilon(u(t^*))$ для всех $t \in I_\delta = (t^* - \delta, t^* + \delta)$ верно $u(t) \in \Omega$, что противоречит тому что t^* - верхняя грань $I_{\overline{\Omega}}$. □

Покажем, что если для любой начальной точки $u_0 \in \overline{\Omega}$ локальное по времени решение задачи Коши остается в $\overline{\Omega}$ в течении ненулевого промежутка времени, то на любом конечном интервале $t \in [0, T]$ существует единственное непрерывно дифференцируемое решение удовлетворяющее включению $U_t(\overline{\Omega}) \subseteq \overline{\Omega}$.

Предложение 3.2.2. *Пусть существует решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}u(s) = f(u(s)),\ 0 \le s \le t \\ u(0) = u_0 \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{3.7}$$

$u(s)\colon [0, t] \mapsto X$ *такое что* $u(0) \in \Omega$, $u(t) \notin \overline{\Omega}$. *Тогда для некоторого* $t_0 \in (0, t)$ *выполняется* $u(t_0) = u_\Gamma \in \partial\Omega$. *При этом траектория решения* $u_\Gamma(s)\colon [0, t-t_0] \mapsto X$ *задачи Коши с начальным значением* $u_\Gamma(0) = u_\Gamma$ *отображает значения* $s \in (0, t - t_0]$ *в множество* $X \backslash \overline{\Omega}$, *то есть траектория начинающаяся в* $u_\Gamma \in \partial\Omega$ *немедленно покидает множество* $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Решение задачи Коши дифференцируемо, следовательно непрерывно, а значит применима лемма 3.2.1 и $\exists t_0 \in (0, t)\colon u(t_0) = u_\Gamma \in \partial\Omega$. По полугрупповому свойству решений задачи Коши $\forall s \in [0, t - t_0]\colon u_\Gamma(s) = u(t_0 + s)$, поэтому $t^* = \sup\{t \in [0, t - t_0] \mid u_\Gamma(t) \in \overline{\Omega}\} = 0$ и, следовательно, по определению sup для всех $s \in (0, t - t_0]\colon u_\Gamma(s) \notin \overline{\Omega}$. □

Теорема 3.2.3. *Для того чтобы любое локальное по времени решение задачи Коши* (3.7) *с начальным значением* $u_0 \in \overline{\Omega}$ *в течение промежутка времени* $s \in [0, t]$ *своего существования оставалось в* $\overline{\Omega}$, *необходимо и достаточно чтобы любое локальное решение задачи Коши с начальным значением* $u_\Gamma \in \partial\Omega$ *оставалось в* $\overline{\Omega}$ *в течение некоторого ненулевого промежутка времени* $s \in [0, \tau]$.

Доказательство. Необходимость следует из того факта что $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$: если все локальные решения начинающиеся в $\overline{\Omega}$ остаются в $\overline{\Omega}$, то это верное в частности для начальных значений $u_0 \in \partial\Omega \subset \Omega$.

Достаточность : в следствии 3.2.2 мы для утверждений

A. Существует локальное по времени решение задачи Коши выходящее из $\overline{\Omega}$

B. Существует локальное по времени решение задачи Коши $u_\Gamma\colon [0, \tau] \mapsto X$ начинающееся на $u_\Gamma \in \partial\Omega$ такое что $\forall s \in (0, \tau]\colon u_\Gamma(s) \notin \overline{\Omega}$

доказали импликацию $A \Rightarrow B$, которая равносильна $\neg B \Rightarrow \neg A$. Утверждение $\neg B$ означает что для всех локальных решений $u_\Gamma(s)\colon [0, \tau] \mapsto X$ начинающихся на $u_\Gamma \in \partial\Omega$ не выполняется $\forall s \in (0, \tau]\colon u_\Gamma(s) \notin \overline{\Omega}$, что означает $\forall s \in [0, \tau]\colon u_\Gamma(s) \in \overline{\Omega}$. Утверждение $\neg A$ как раз означает что все локальные решения задачи Коши с начальным значением $u_0 \in \overline{\Omega}$ остаются в $\overline{\Omega}$ в течение промежутка времени на котором они определены. □

3.3 Условия существования локального решения задачи Коши в окрестности $\partial\Omega$

В случае когда поле направлений $f(\cdot)$ не определено вне $\overline{\Omega}$, мы не можем напрямую применить теорему о локальном существовании решения задачи Коши для начального значения $u_0 \in \partial\Omega$. Проблема заключается в том если мы попытаемся построить решение с помощью интегрального отображения F

$$(F(y))(t) = u_0 + \int_0^t f(y(s))ds$$

определенного на множестве $Y_{\eta,\epsilon}$ непрерывных функций $y(t)\colon [-\eta,\eta] \mapsto (\overline{B}_\epsilon(u_0) \cap \overline{\Omega})$ для некоторых $\eta,\ \epsilon > 0$, то F необязательно отображает $Y_{\eta,\epsilon}$ в себя, так как для некоторых $y \in Y_{\eta,\epsilon}$ преобразованная функция $(F(y))(t)$ может на интервале $t \in [-\eta,\eta]$ принимать значения вне множества $\overline{\Omega}$. Следовательно, неприменима теорема о неподвижной точке сжимающего оператора, отображающего замкнутое множество в себя. Эту проблему можно частично решить следующим образом:

1. Сузить область определения функций $y(t)$ с $[-\eta,\eta]$ до $[0,\eta]$: в противном случае мы исключим траектории входящие в $\overline{\Omega}$ через $\partial\Omega$ снаружи - для них при $t < 0 : u(t) \notin \overline{\Omega}$, и значение $f(u(t))$ не определено.

2. Сузить область значений функций в $y(t)$ до некоторой окрестности $S(u_0,\epsilon) \subset \overline{\Omega}$ потенциальной траектории решения с началом в u_0.

Если нам удастся показать что для определенное таким образом множество функций $y(t)$ замкнуто и отображается оператором F в себя, то применив теорему о неподвижной точке мы докажем существование и единственность локального по времени решения.

3.3.1 Конус потенциальных траекторий локального решения задачи Коши для полугруппы U_t

Мы построим окрестность $S(u_0,\epsilon)$ в виде конуса с вершиной в $u_0 \in \partial\Omega$, ось которого идет в направлении $f(u_0)$, а радиус образующей окружности непрерывно возрастает (или по крайней мере не убывает) с ростом расстояния до вершины.

Пусть $u_0 \in \partial\Omega$, $\epsilon > 0$. Обозначим $f_0 = f(u_0)$. Случай $f_0 = 0$ не представляет большого интереса - в этом случае очевидно существует решение $u(t) = u_0 = const$, далее мы считаем что $f_0 \neq 0$. Обозначим пересечение замкнутой ϵ-окрестности u_0 с $\overline{\Omega}$ через

$$\overline{B}_{\epsilon,\overline{\Omega}}(u_0) = \overline{B}_\epsilon(u_0) \cap \overline{\Omega} \tag{3.8}$$

Предположим что поле направлений $f(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой K на $\overline{B}_{\epsilon,\overline{\Omega}}(u_0)$, т. е.

$$\forall u_1,u_2 \in \overline{B}_{\epsilon,\overline{\Omega}}(u_0)\colon \|f(u_1) - f(u_2)\| \le K\|u_1 - u_2\| \tag{3.9}$$

Пусть $\alpha(t)\colon [0,T] \mapsto [0,+\infty)$ - непрерывная неубывающая функция определенная на отрезке $[0,T], T > 0$. Введем

$$\eta = \eta(u_0, \epsilon, \alpha) = \inf\{t \geq 0 \ \mid \ t\|f_0\| + \alpha(t) = \epsilon\} \tag{3.10}$$

Для $t \in [0,\eta]$ определим семейство множеств - замкнутых шаров с центром в $u_0 + f_0 \cdot t$ радиусом $\alpha(t)$

$$\overline{B}_{\alpha(t)}(u_0 + f_0 t) = \{u \in X \mid \|u - (u_0 + f_0 t)\| \leq \alpha(t)\} \tag{3.11}$$

Пусть функция $\alpha(\cdot)$ такова что

$$\forall t \in [0,\eta]\colon \overline{B}_{\alpha(t)}(u_0 + f_0 t) \subseteq \overline{\Omega} \tag{3.12}$$

Определим множество $Y_{\eta,\alpha}$ непрерывных функций $y(t)$, определенных на отрезке $t \in [0,\eta]$, так что все возможные значения $y(t)$ лежат в шаре $\overline{B}_{\alpha(t)}(u_0 + f_0 t)$:

$$\forall t \in [0,\eta]\colon y(t) \in \overline{B}_{\alpha(t)}(u_0 + f_0 t) \tag{3.13}$$

Введем на множестве элементов $Y_{\eta,\alpha}$ супремум-норму $\|y\|_Y = \sup_{0\leq t\leq \eta} \|y(t)\|$. Поскольку область значений функций $y \in Y_{\eta,\alpha}$ при любом фиксированном $t \in [0,\eta]$ - замкнутое множество $\overline{B}_{\alpha(t)}(u_0 + f_0 t)$, то предел последовательности функций $y_k \in Y_{\eta,\alpha}$ со сходимостью по норме $\|\cdot\|_Y$ - это функция со значениями удовлетворяющими условию (3.13), которая непрерывна как равномерный предел последовательности непрерывных функций. Таким образом множество функций $Y_{\eta,\alpha}$ замкнуто относительно сходимости по норме $\|\cdot\|_Y$.

Найдем наименее быстро растущую функцию $\alpha(t)$ (чтобы условие (3.12) было наименее ограничивающим) для которой отображение

$$(F(y))(t) = u_0 + \int_0^t f(y(s))ds \tag{3.14}$$

отображает множество $Y_{\eta,\alpha}$ в себя. В силу ограниченности $f(\cdot)$ на $\overline{B}_\epsilon(u_0)$, $(F(y))(t)$ - непрерывная функция. Поэтому нам достаточно установить при каких условиях для всех $y \in Y_{\eta,\alpha}, t \in [0,\eta]$ выполняется включение

$$(F(y))(t) \in \overline{B}_{\alpha(t)}(u_0 + f_0 t) \tag{3.15}$$

эквивалентное неравенству

$$\|(F(y))(t) - (u_0 + f_0 t)\| \leq \alpha(t) \tag{3.16}$$

Из $y \in Y_{\eta,\alpha}$ следует $\forall s \in [0,\eta]\colon y(s) \in \overline{B}_{\alpha(s)}(u_0+f_0 s) \Leftrightarrow \|y(s)-(u_0+f_0 s)\| \leq \alpha(s)$. Тогда можно оценить

$$\begin{aligned}&\|y(s) - u_0\| = \|(y(s) - u_0 - f_0 \cdot s) + f_0 \cdot s\| \leq \\ &\leq \|y(s) - u_0 - f_0 \cdot s\| + \|f_0 \cdot s\| \leq \alpha(s) + \|f_0\| \cdot s\end{aligned}$$

Для значений $(F(y))(t)$ тогда можно оценить

$$\|(F(y))(t)-(u_0+f_0t)\| = \left\|\left(u_0+\int_0^t f(y(s))ds\right)-(u_0+f_0t)\right\| =$$
$$\left\|\int_0^t (f(y(s))-f_0)ds\right\| \le \int_0^t \|f(y(s))-f(u_0)\|ds \le$$
$$\int_0^t K\|y(s)-u_0\|ds \le K\int_0^t (\|\alpha(s)+f_0\|\cdot s)\,ds \le$$
$$\le K\|f_0\|\frac{t^2}{2}+K\int_0^t \alpha(s)ds$$

Неравенство (3.16) будет выполняться если потребовать

$$K\|f_0\|\frac{t^2}{2}+K\int_0^t \alpha(s) \le \alpha(t) \tag{3.17}$$

Наименее быстро растущая функция α (принимающая на $t \ge 0$ неотрицательные значения), для которой выполняется неравенство (3.17) удовлетворяет интегральному уравнению

$$K\|f_0\|\frac{t^2}{2}+K\int_0^t \alpha(s)ds = \alpha(t) \tag{3.18}$$

которое эквивалентно линейному неоднородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\alpha'(t) = K\|f_0\|t + K\alpha(t) \tag{3.19}$$

Соответствующее однородное уравнение $\alpha'(t) = K\alpha(t)$ имеет общее решение $\alpha(t) = Ce^{Kt}$. Решение неоднородного уравнения (3.19) находим методом вариации постоянных коэффициентов: полагаем $\alpha(t) = C(t)e^{Kt}$, тогда

$$\alpha'(t) = C'(t)e^{Kt}+C(t)Ke^{Kt} = K\|f_0\|t+K\alpha(t) = K\|f_0\|t + C(t)Ke^{Kt}$$

откуда $C'(t) = K\|f_0\|te^{-Kt}$, $C(t)-C(0) = \frac{\|f_0\|}{K}\left(1-e^{-Kt}(1+Kt)\right)$. Так как $K>0$ то для всех $t>0$ в силу неравенства $e^{Kt} > 1+Kt$ получаем $1-e^{-Kt}(1+Kt) > 0$ и $C(t) > C(0)$. Так как функция $\alpha(t) = C(t)e^{Kt}$ должна быть неотрицательной, то должно выполняться $C(0) \ge 0$ (иначе в силу непрерывности $C(t)$ при малых $t>0$ получиться $\alpha(t)<0$). Для того чтобы функция $\alpha(t)$ росла наименее быстро, необходимо взять $C(0) = 0$. Мы получаем окончательное выражение для функции $\alpha(t)$:

$$\alpha(t) = \|f_0\|\left(\frac{e^{Kt}-1}{K}-t\right) \tag{3.20}$$

Оно определяет минимально возможный рост радиуса конуса потенциальных траекторий решения задачи Коши, при котором интегральное отображение F (3.14) гарантированно отображает замкнутое множество функций

$Y_{\eta,\alpha}$ в себя. Длина временного отрезка η на котором определены функции из множества Y тогда равна

$$\begin{aligned} \eta = \eta(u_0, \epsilon, \alpha) = \inf\{t \geq 0 \ \mid \ t\|f_0\| + \alpha(t) = \epsilon\} = \\ = \inf\{t \ \left| \ \frac{\|f_0\|}{K}(e^{Kt} - 1) = \epsilon\right.\} = \frac{1}{K}\ln\left(1 + K\frac{\epsilon}{\|f_0\|}\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Если мы ограничим область определения функций из $Y_{\eta,\alpha}$ отрезком $[0,\eta_0] \subseteq [0,\eta]$ где $\eta_0 < 1/K$, то получим замкнутое множество функций $Y_{\eta_0,\alpha}$:

$$Y_{\eta_0,\alpha} = \left\{y \in C\left([0,\eta_0], \overline{B}_\epsilon(u_0)\right) \ \mid \|y(t) - (u_0 + f_0 t)\| \leq \alpha(t)\right\} \tag{3.22}$$

Множество функций $Y_{\eta_0,\alpha}$ также отображается отображением F в себя, так как мы выбрали такое $\alpha(t)$ что неравенство (3.16) выполняется для всех $t \in [0,\eta]$. Кроме того отображение F является сжимающим на $Y_{\eta_0,\alpha}$ (доказательство полностью повторяет таковое в теореме 3.1.4). Следовательно, F имеет на $Y_{\eta_0,\alpha}$ единственную неподвижную точку, которая определяет локальное решение задачи Коши на интервале $t \in [0,\eta_0]$. Таким образом мы доказали следующую теорему:

Теорема 3.3.1. *Пусть X - банахово пространство, $\Omega \subset X$ - открытое подмножество X, $\overline{\Omega}$ - замыкание Ω, $\partial\Omega$ - граница Ω. Пусть для некоторых $u_0 \in \partial\Omega$, $\epsilon > 0$ на множестве*

$$\overline{B}_{\epsilon,\overline{\Omega}}(u_0) = \overline{B}_\epsilon(u_0) \cap \overline{\Omega}$$

задано непрерывное отображение $f\colon \overline{B}_{\epsilon,\overline{\Omega}}(u_0) \mapsto X$, удовлетворяющее условию Липшица с константой $0 < K < \infty$ и $f_0 = f(u_0)$. Пусть существует такое η, $0 < \eta \leq \frac{1}{K}\ln\left(1 + K\frac{\epsilon}{\|f_0\|}\right)$ что для элементов $x \in X$ верна импликация

$$\forall t \in [0,\eta]\colon \ \|x - (u_0 + f_0 t)\| \leq \|f_0\|\left(\frac{e^{Kt} - 1}{K} - t\right) \ \Rightarrow \ x \in \overline{\Omega}. \tag{3.23}$$

Тогда задача Коши

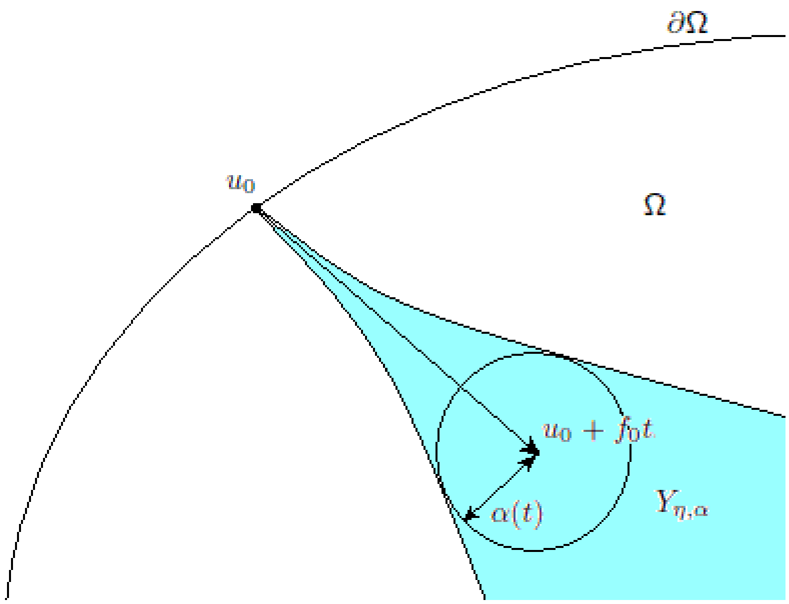
$$\begin{cases} \dot{u} = f(u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

имеет на интервале времени $t \in [0,\eta_0]$, где $\eta_0 \leq \eta$, $\eta_0 < 1/K$ единственное непрерывно дифференцируемое решение $u(t)\colon [0,\eta] \mapsto \overline{B}_\epsilon(u_0) \cap \overline{\Omega}$ не выходящее из $\overline{\Omega}$.

Заметим что эта теорема дает достаточные условия, которые однако не являются необходимыми - могут существовать например решения задачи Коши, траектории которых идут по множеству $\partial\Omega$, в этом случае условие (3.23) не выполняется.

3.3.2 Геометрический смысл значений функции $\alpha(t)$

Значение функции $\alpha(t) = \|f_0\| \left(\frac{e^{Kt}-1}{K} - t\right)$ в фиксированный момент времени t определяет радиус шара с центром в точке u_0+f_0t, в котором находится точка траектории $u(t)$ решения задачи Коши $\dot{u} = f(u),\ u(0) = u_0$ в момент t. Таким образом $\alpha(t)$ определяет максимальное отклонение траектории решения от ее линейного приближения формулой $\tilde{u}(t) = u_0 + f_0t$.



Для того чтобы оценить насколько точно этот шар определяет траекторию решения найдем разложение $\alpha(t)$ при малых t:

$$\alpha(0) = 0$$
$$\alpha'(t) = \|f_0\| \left(e^{Kt} - 1\right),\ \alpha'(0) = 0$$
$$\alpha''(t) = \|f_0\|Ke^{Kt},\ \alpha''(0) = \|f_0\|K$$
$$\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha'(0)t + \alpha''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2) = \|f_0\|K\frac{t^2}{2} + o(t^2) \tag{3.24}$$

то есть $\alpha(t)$ при $t \to +0$ имеет второй порядок малости по сравнению с t и, следовательно с расстоянием $\|u(t) - u_0\|$.

В случае реализации наиболее пессимистичной оценки отклонение от линейного приближения равно $\alpha(t)$:

$$\|u(t) - (u_0 + f_0t)\| = \alpha(t)$$

Найдем кривизну траектории решения в этом случае в точке $t = 0$. Пусть

$$\overline{B}_{\alpha(t)}(u_0 + f_0t) = \{u \in X \mid \|u - (u_0 + f_0t)\| \leq \alpha(t)\}$$

определенная согласно (3.11) область, содержащая все возможные траектории локальных решений задачи Коши. Запишем параметрическое уравнение верхней ветви плоской кривой $r(t) = (x(t), y(t))$, которая определяет границу плоского сечения этой области:

$$\begin{cases} x(t) = u_0 + \|f_0\|t \\ y(t) = \alpha(t) = \|f_0\| \left(\dfrac{e^{Kt} - 1}{K} - t \right) \end{cases} \tag{3.25}$$

Тогда

$$x'(0) = \|f_0\|, \ x''(0) = 0$$
$$y'(0) = 0, \ y''(0) = \|f_0\|K$$
$$\text{кривизна при } t = 0\text{: } k(u_0) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\|f_0\|^2 K}{\|f_0\|^3} = \frac{K}{\|f_0\|} \tag{3.26}$$

Таким образом максимальная кривизна возможной траектории решения, наиболее уклоняющейся от линейного приближения, растет вместе константой Липшица поля направлений f, и убывает с ростом модуля значения вектора поля в точке u_0. Если в точке u_0 существует и непрерывна производная $f'(u_0)$ то в малой окрестности точки u_0 константа Липшица для f стремится к $\|f'(u_0)\|$ (см. оценку (3.5)) при стремлении к нулю радиуса окрестности. Тогда для максимальной кривизны траектории решения в точке u_0 получаем оценку сверху

$$|k(u_0)| \leq \frac{\|f'(u_0)\|}{\|f_0\|} \tag{3.27}$$

3.4 Достаточные условия существования глобального решения задачи Коши, не выходящего из $\overline{\Omega}$

Если условия теоремы 3.3.1 выполнены для всех граничных точек $u_0 \in \partial\Omega$ (с различными значениями ϵ, η) то, согласно теореме 3.2.3, все локальные по времени решения задачи Коши с начальными значениями из $\overline{\Omega}$ остаются в $\overline{\Omega}$ в течении промежутка времени на котором они определены. Если кроме того поле направлений f удовлетворяет условию Липшица с константой $0 < K < \infty$ на всем множестве $\overline{\Omega}$, то ограниченное решение задачи Коши существует на любом конечном отрезке $t \in [0, T]$. Чтобы показать это нам понадобиться дополнительная лемма, которая ограничивает скорость роста решений.

Лемма 3.4.1. *Пусть X - банахово пространство, $\Omega \subset X$ - открытое подмножество X, $\overline{\Omega}$ - замыкание Ω. Пусть отображение $f(\cdot)\colon \overline{\Omega} \mapsto X$*

непрерывно и удовлетворяет условию Липшица с константой $0 < K < \infty$ *на* $\overline{\Omega}$. *Тогда, если* $u(t)\colon [0,T] \mapsto \overline{\Omega}$ *- локальное решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u(t)) \\ u(0) = u_0 \in \overline{\Omega} \end{cases}$$

не выходящее за пределы $\overline{\Omega}$, *то для всех* $t \in [0,T]$ *верно неравенство*

$$\|u(t) - u_0\| \le \frac{\|f_0\|}{K}\left(e^{Kt} - 1\right) \tag{3.28}$$

где $f_0 = f(u_0)$.

Доказательство. Поскольку f удовлетворяет на $\overline{\Omega}$ условию Липшица с константой K, то

$$\forall u \in \overline{\Omega}\colon \|f(u) - f(u_0)\| \le K\|u - u_0\|$$

и можно оценить

$$\begin{aligned} &\|f(u)\| = \|(f(u) - f(u_0)) + f(u_0)\| \le \\ &\le \|f(u) - f(u_0)\| + \|f(u_0)\| \le K\|u - u_0\| + \|f_0\| \end{aligned} \tag{3.29}$$

Так как решение задачи Коши $u(t)$ с начальным значением $u(0) = u_0$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(t) - u_0 = \int_0^t f(u(s))ds \tag{3.30}$$

то можно оценить норму элемента в левой части следующим образом

$$\begin{aligned} &\|u(t) - u_0\| = \left\|\int_0^t f(u(s))ds\right\| \le \\ &\le \int_0^t \|f(u(s))\|ds \le \int_0^t \left(K\|u(t) - u_0\| + \|f_0\|\right) ds \end{aligned}$$

Таким образом, для числовой функции с неотрицательными значениями

$$v(t) = \|u(t) - u_0\|$$

мы имеем неравенство

$$v(t) \le \|f_0\|t + K\int_0^t v(s)ds \tag{3.31}$$

Наиболее точной оценкой сверху для величины $\|u(t) - u_0\|$ тогда будет числовая функция $v(t)$, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$v(t) = \|f_0\|t + K\int_0^t v(s)ds \tag{3.32}$$

которое эквивалентно дифференциальному уравнению

$$v'(t) = \|f_0\| + Kv(t) \tag{3.33}$$

Решая это уравнение

$$\frac{dv}{\|f_0\| + Kv} = dt, \ \frac{dv}{v + \|f_0\|/K} = Kdt$$
$$\ln\left(v(t) + \frac{\|f_0\|}{K}\right) - \ln\left(v(0) + \frac{\|f_0\|}{K}\right) = Kt$$

мы берем наименьшее возможное по смыслу начальное значение $v(0) = \|u(0) - u_0\| = 0$ и получаем

$$\ln\left(1 + \frac{K}{\|f_0\|}v(t)\right) = Kt$$
$$v(t) = \frac{\|f_0\|}{K}\left(e^{Kt} - 1\right)$$

то есть требуемую оценку (3.28). □

Теперь мы можем сформулировать достаточные условия существования глобального решения задачи Коши, не выходящего из $\overline{\Omega}$.

Теорема 3.4.2. *Пусть X - банахово пространство, $\Omega \subset X$ - открытое подмножество X, $\overline{\Omega}$ - замыкание Ω, $\partial\Omega$ - граница Ω. Пусть отображение $f(\cdot)\colon \overline{\Omega} \mapsto X$ определено, непрерывно и удовлетворяет условию Липшица с константой $0 < K < \infty$ на $\overline{\Omega}$. Пусть известно что для любого начального значения $u_\Gamma \in \partial\Omega$ в течение некоторого ненулевого отрезка времени $[0, \eta(u_\Gamma)]$ существует и остается в $\overline{\Omega}$ локальное по времени решение задачи Коши $\dot{u} = f(u), u(0) = u_\Gamma$. Тогда для любого начального значения $u_0 \in \overline{\Omega}$ в течении любого конечного отрезка времени $[0, T]$ существует непрерывно дифференцируемое решение задачи Коши $\dot{u} = f(u), u(0) = u_0$, не выходящее из $\overline{\Omega}$.*

Доказательство. Пусть дано начальное значение $u_0 \in \overline{\Omega}$. Если $u_0 \in \Omega$ то, так как Ω - открытое множество, u_0 входит в Ω вместе с некоторой своей ϵ-окрестностью, и тогда по теореме 3.1.4 в существует локальное по времени решение не выходящее из $B_\epsilon(u_0)$ и, следовательно, из $\overline{\Omega}$. Если $u_0 \in \partial\Omega$, то локальное по времени решение не выходящее из $\overline{\Omega}$ существует по условиям теоремы. Таким образом, локальное по времени решение не выходящее из $\overline{\Omega}$ существует для любого начального значения $u_0 \in \overline{\Omega}$.

Покажем, что это решение может быть продолжено на любой конечный отрезок времени $[0, T]$. Предположим, что это не так. Тогда решение $u(t), u(0) = u_0$, не выходящее из $\overline{\Omega}$ существует только на некотором отрезке $[0, \tau]$ или полуотрезке $[0, \tau)$.

Если решение не выходящее из $\overline{\Omega}$ существует на отрезке $[0, \tau]$, то $u(\tau) \in \overline{\Omega}$. Тогда, беря $u(\tau)$ в качестве начального значения для задачи Коши и рассуждая так же как для начального значения u_0 выше, мы можем продолжить решение на некоторый ненулевой отрезок времени $\eta(u(\tau))$, что противоречит предположению об ограничении времени существовании локального решения не выходящего из $\overline{\Omega}$ лишь отрезком $[0, \tau]$.

Если решение не выходящее из $\overline{\Omega}$ существует на полуотрезке $[0, \tau)$, мы покажем что оно может быть продолжено на отрезок $[0, \tau]$, причем $u(\tau) \in \overline{\Omega}$, сведя случай к предыдущему.

Пусть $\{t_k\}$ - последовательность моментов времени $t_k \in [0, \tau)$, сходящаяся к τ. Так как по предположению локальное решение $u(t)$ не выходящее из $\overline{\Omega}$ определено на $[0, \tau)$, то для всех t_k определено значение $u_k = u(t_k) \in \overline{\Omega}$. Так как $u(t)$ - решение задачи Коши, то оно удовлетворяет интегральному уравнению (3.30). С помощью неравенств (3.29), (3.28) мы можем оценить

$$
\begin{aligned}
&\|u_k - u_j\| = \left\| \int_{t_j}^{t_k} f(u(s))ds \right\| \leq \int_{t_j}^{t_k} \|f(u(s))\| ds \leq \\
&\leq \int_{t_j}^{t_k} \left(K(u(s) - u_0) + \|f_0\|\right) ds \leq \int_{t_j}^{t_k} \left(K\frac{\|f_0\|}{K}(e^{K\tau} - 1) + \|f_0\| \right) ds = \\
&= \int_{t_j}^{t_k} \|f_0\| e^{K\tau} ds = |t_k - t_j| \|f_0\| e^{K\tau}
\end{aligned}
$$

Так как последовательность $\{t_k\}$ сходится, то она фундаментальна и, следовательно, последовательность $\{u_k\}$ также фундаментальна. Так как пространство X - банахово, то $\{u_k\}$ сходится к некоторому единственному элементу X, который мы обозначим $u(\tau)$, доопределив таким образом функцию u в точке $t = \tau$. Так как $\forall k\colon u_k \in \overline{\Omega}$ и множество $\overline{\Omega}$ - замкнутое, то $u(\tau) \in \overline{\Omega}$.

Покажем, что функция $u(t)$ является в точке $t = \tau$ непрерывной слева. Так как $t_k \uparrow \tau$ то $\forall t \in [0, \tau)$ найдется такое k что $t < t_k < \tau$. Тогда

$$
\|u(t) - u(\tau)\| \leq \|u(t) - u(t_k)\| + \|u(t_k) - u(\tau)\| \leq |t - t_k| \|f_0\| e^{K\tau} + \|u(t_k) - u(\tau)\|
$$

Так как $t_k \uparrow \tau$ и $u(t_k) \to u(\tau)$, то $\forall \epsilon > 0$ мы можем выбрать такое k что $|t_k - \tau| \|f_0\| e^{K\tau} < \epsilon/2$ и $\|u(t_k) - u(\tau)\| < \epsilon/2$. Тогда $\forall t \in (t_k, \tau)\colon \|u(t) - u(\tau)\| < \epsilon$ и, следовательно, $u(t)$ непрерывна слева в точке $t = \tau$.

Для того чтобы показать что доопределенная таким образом в точке $t = \tau$ функция $u(t)$ является решением задачи Коши на отрезке $t \in [0, \tau]$, нам достаточно показать что в точке $t = \tau$ функция $u(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (3.30), т.е. выполняется

$$
u(\tau) - u_0 = \int_0^\tau f(u(s))ds \tag{3.34}
$$

Так как на $t \in [0, \tau]\colon u(t) \in \overline{\Omega}$ и $u(t)$ непрерывна, то подынтегральное выражение в правой части определено и непрерывно, следовательно, интеграл существует. Для всех k справедливо

$$u(t_k) - u_0 = \int_0^{t_k} f(u(s))ds$$

Так как $\lim_{k\to\infty} u(t_k) = u(\tau)$ то (3.34) равносильно

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{t_k} f(u(s))ds = \int_0^{\tau} f(u(s))ds$$

Последнее равенство выполняется в силу непрерывности и, следовательно, ограниченности функции $u(t)$ на $t \in [0, \tau]$, и, следовательно, ограниченности подынтегральной функции $f(u(s))$.

Таким образом мы построили непрерывно-дифференцируемое решение задачи Коши $u(t)\colon [0, \tau] \mapsto \overline{\Omega}$, которое может быть продолжено далее на ненулевой отрезок времени. Теорема доказана. □

3.5 Непрерывность решения задачи Коши по начальному значению

Как показывает следующая теорема, при тех же условиях при которых можно гарантировать существование глобального по времени решения задачи Коши, не выходящего из множества $\overline{\Omega}$, указанное решение равномерно непрерывно зависит от начального значения.

Теорема 3.5.1. *Пусть X - банахово пространство, $M \subseteq X$, $f \in C(M, X)$ - непрерывное отображение M в X, удовлетворяющее на множестве M условию Липшица с константой $K < \infty$. Пусть известно что задача Коши*

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u), \\ u(0) = x \in M \end{cases} \tag{3.35}$$

имеет для любого начального значения $x \in M$ и на любом конечном интервале $t \in [0, T], T < \infty$ ограниченное непрерывно дифференцируемое решение, не выходящее из M. Обозначим точку траектории в момент t для решения с начальным значением x через $U(t, x)$. Тогда при любом фиксированном t отображение $U(t, x)$ равномерно непрерывно по переменной x на множестве M.

Доказательство. Пусть даны два начальных значения $x_1, x_2 \in M$ и пусть $u_1(t), u_2(t), u_i \in C^1([0, T], M)$ - соответствующие им траектории решений задачи Коши (3.35) на некотором интервале $t \in [0, T]$, то есть $u_i(0) = x_i$ и $u_i'(t) = f(u_i(t))$. Тогда отображения u_i удовлетворяют интегральным уравнениям

$$u_1(t) - x_1 = \int_0^t f(u_1(s))ds, \quad u_2(t) - x_2 = \int_0^t f(u_2(s))ds \tag{3.36}$$

Вычитая эти уравнения получим соотношение

$$u_1(t) - u_2(t) = (x_1 - x_2) + \left(\int_0^t (f(u_1(s)) - f(u_2(s)))\,ds\right) \quad \Rightarrow \tag{3.37}$$

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \le \|x_1 - x_2\| + \left\|\int_0^t (f(u_1(s)) - f(u_2(s)))\,ds\right\| \le$$

$$\le \|x_1 - x_2\| + K\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|ds \tag{3.38}$$

Рассмотрим функцию $v(t) = \|u_1(t) - u_2(t)\|$. В силу начальных условий $u_i(0) = x_i$ и неравенства (3.38) для $v(t)$ верно

$$\begin{cases} v(0) = \|x_1 - x_2\| = v_0 \\ v(t) \le v_0 + K\displaystyle\int_0^t v(s)ds \end{cases} \tag{3.39}$$

Значения функции $v(t)$ ограничены сверху значениями функции $v_{max}(t)$ для которой последнее неравенство заменено на равенство. Для v_{max} мы имеем интегральное уравнение $v_{max}(t) = v_0 + K\int_0^t v_{max}(s)ds$ с начальным условием $v_{max}(0) = v_0$, которое эквивалентное $v'_{max}(t) = Kv_{max}(t)$, $v_{max}(0) = v_0$. Решение последнего $v_{max}(t) = v_0 e^{Kt}$. Таким образом

$$\|U(t, x_1) - U(t, x_2)\| = \|u_1(t) - u_2(t)\| = v(t) \le v_{max}(t) = \|x_1 - x_2\|e^{Kt} \tag{3.40}$$

Оценка (3.40) показывает что $U(t, x)$ равномерно непрерывна по x на множестве M. □

3.6 Существование глобального решения задачи Коши, корректно определяющего полугруппу сдвигов на пространстве $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$

Теорема 3.4.2 дает достаточные условия существования решения задачи Коши, определяющего полугруппу $U_t(\cdot)$ с требуемыми свойствами (3.2)-(3.4). Именно, справедливо следующее утверждение:

Теорема 3.6.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.4.2. Пусть $U(t, x)$, $U\colon \left(\mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega}\right) \mapsto \overline{\Omega}$ - семейство решений соответствующей задачи Коши (3.1), определенное на любом конечном интервале времени $t \in [0, T]$ для всех начальных значений $x \in \overline{\Omega}$. Тогда однопараметрическое семейство отображений $T(t, \varphi)$ определенное по формуле*

$$\forall t \ge 0, \forall \varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y) \;:\; (T_t\varphi)(\cdot) = \varphi(U(t, \cdot))$$

(где точка обозначает произвольный аргумент $x \in \overline{\Omega}$) определяет однопараметрическую полугруппу, отображающую пространство $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ в

себя. При этом для дифференцируемых $\varphi \in Dom(A_T)$ *выполняется требуемое равенство* (2.5)*:*

$$\forall x \in \overline{\Omega} \ : \ (A_T(\varphi))(x) = \varphi'(x)f(x)$$

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 3.4.2, то решение задачи Коши (3.1) существует на любом конечном интервале времени $t \in [0, T]$ для всех начальных значений $x \in \overline{\Omega}$ и не выходит за пределы $\overline{\Omega}$. Согласно предложению 2.7.1:

1. отображение $U(t, x)$ определяет однопараметрическую полугруппу, отображающую $\overline{\Omega}$ в себя
2. $Dom(A_U) = \overline{\Omega}$ и $\forall x \in \overline{\Omega}$: $A_U(x) = f(x)$

Кроме того, так как утверждение теоремы 3.5.1 имеет место при тех же условиях что и теоремы 3.4.2, то отображение $U(t, x)$ является непрерывным по переменной x на $x \in \overline{\Omega}$. Таким образом, выполнены все три предусловия следствия 2.6.2 и, следовательно, семейство отображений T_t определяет решение задачи (2.2)-(2.5) для случая $Dom(T_t) = \Phi = C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$, то есть полугруппу, отображающую пространство $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ в себя, такую что значения ее генератора на дифференцируемых $\varphi \in Dom(A_T)$ равны $(A_T(\varphi))(x) = \varphi'(x)f(x)$. □

Глава 4

Свойства полугруппы неоднородного сдвига

Итак, мы построили семейство отображений $T_t\colon C_b^0(\overline{\Omega}, Y) \mapsto C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$, которое каждой непрерывной и ограниченной на $\overline{\Omega}$ функции $\varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ сопоставляет непрерывную ограниченную функцию $T_t(\varphi) \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ по формуле (2.7):

$$(T_t\varphi)(x) = \varphi(U(t,x))$$

Как было установлено в теореме 2.5.3, T_t является семейством линейных операторов. Определим некоторые из обычно исследуемых свойств этого объекта. В частности, представляет интерес - является ли полугруппа T_t сильно непрерывной: в случае положительного ответа можно применить разработанный аппарат аналитической теории полугрупп, таких как теорема Хилле-Иосиды, для анализа свойств самой полугруппы и ее генератора.

В этом разделе мы всюду предполагаем выполненным условие (2.8)

$$U(t,\overline{\Omega}) \subseteq \overline{\Omega}$$

которое обеспечивает корректность определения полугруппы T_t формулой (2.7).

4.1 Порядок роста полугруппы T_t

Оценим норму линейного оператора T_t. В теореме 2.5.3 мы установили что $\|T_t\varphi\|_{\overline{\Omega}^0} \leq \|\varphi\|_{\overline{\Omega}^0}$, поэтому

$$\|T_t\| = \sup_{\|\varphi\|_{\overline{\Omega}^0}=1} \frac{\|T_t\varphi\|_{\overline{\Omega}^0}}{\|\varphi\|_{\overline{\Omega}^0}} \leq 1$$

Значение точной верхней грани равное 1 очевидно достигается если $\varphi(x) \equiv const$ на всех $x \in \overline{\Omega}$. Поэтому норма оператора $\|T_t\| = 1$ для всех $t \geq 0$.

4.2 Условия сильной непрерывности полугруппы T_t

Проверим, является ли T_t сильно непрерывной полугруппой на всей области $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ своего определения. Как было замечено в разделе 1.5.1, достаточно проверить непрерывность при стремлении $t \to +0$. В пространстве $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ сильная непрерывность означает что

$$0 = \lim_{t \to +0} \|T_t\varphi - \varphi\|_{\overline{\Omega}^0} = \lim_{t \to +0} \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|\varphi(U(t,x)) - \varphi(x)\|_Y \tag{4.1}$$

Поскольку $U(t,x)$ - это полугруппа решений задачи Коши $\dot{u} = f(u), u(0) = x$, то мы можем записать $x = U(0,x)$ и $\varphi(x) = \varphi(U(0,x))$. Если φ дифференцируема на $\overline{\Omega}$, то по теореме о производной сложной функции (1.4) существует производная

$$\frac{d}{ds}\varphi(U(s,x)) = \varphi'(U(s,x))\frac{d}{ds}U(s,x) = \varphi'(U(s,x))f(U(s,x)) \tag{4.2}$$

(равенство $\frac{d}{ds}U(s,x) = f(U(s,x))$ следует из того что $U(s,x)$ разрешает задачу Коши $\dot{u} = f(u)$). Если производная $\varphi'(x)$ кроме того непрерывна по x на $\overline{\Omega}$ то, поскольку $U(s,x)$ непрерывна по переменной s, производная $\frac{d}{ds}\varphi(U(s,x))$ непрерывна по переменной s как композиция отображений $\varphi'(U(s,x))$ и $f(U(s,x))$, каждое из которых непрерывно по переменной s.

По формуле конечных приращений (1.5) мы можем оценить

$$\begin{aligned} &\varphi(U(t,x)) - \varphi(U(0,x)) \le \\ &\le t \cdot \sup_{0 \le s \le t} \left\| \frac{d}{ds}\varphi(U(s,x)) \right\| = t \cdot \sup_{0 \le s \le t} \|\varphi'(U(s,x))f(U(s,x))\| \end{aligned} \tag{4.3}$$

Мы предполагаем что выполняется условие (2.8), то есть $U(s,x) \in \overline{\Omega}$. Поэтому можно оценить

$$\|\varphi'(U(s,x))f(U(s,x)\| \le \sup_{\xi \in \overline{\Omega}} \|\varphi'(\xi)f(\xi)\| \tag{4.4}$$

Если

$$\sup_{\xi \in \overline{\Omega}} \|\varphi'(\xi)f(\xi)\| = C_1(\varphi) < \infty \tag{4.5}$$

то можно оценить

$$\|(T_t(\varphi))(x) - \varphi(x)\| = \|\varphi(U(t,x)) - \varphi(U(0,x))\| \le t \cdot C_1(\varphi) \tag{4.6}$$

Тогда

$$\lim_{t \to +0} \|T_t\varphi - \varphi\|_{\overline{\Omega}^0} = \lim_{t \to +0} \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|(T_t(\varphi))(x) - \varphi(x)\| \le \lim_{t \to +0} (tC_1(\varphi)) = 0 \tag{4.7}$$

Таким образом мы можем утверждать, что оператор T_t сильно непрерывен при стремлении $t \to +0$ на тех элементах $\varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$, которые непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$ и для которых выполняется условие (4.5).

С другой стороны, всегда найдутся элементы $\varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ для которых $\lim\limits_{t\to+0} \|T_t\varphi - \varphi\|_{\overline{\Omega}^0} \neq 0$. Если φ непрерывно дифференцируема на $\overline{\Omega}$ то в силу непрерывности $\varphi'(U(s,x))f(U(s,x))$ по переменной s, можно для сколь угодно малого $\epsilon > 0$ выбрать такое $\delta > 0$ что $0 < t < \delta$ влечет

$$\|\varphi'(U(t,x))f(U(t,x)) - \varphi'(U(0,x))f(U(0,x))\| =$$
$$= \|\varphi'(U(t,x))f(U(t,x)) - \varphi'(x)f(x)\| < \epsilon$$

Запишем формулу конечных приращений (1.6) для приращения функции $\varphi(U(s,x))$ при приращении переменной s от 0 до t:

$$\begin{aligned} &\|\varphi(U(t,x)) - \varphi(x) - \varphi'(x)f(x)\cdot t\| = \\ &= \left\|\varphi(U(t,x)) - \varphi(U(0,x)) - \frac{d}{ds}\varphi(U(s,x))\Big|_{s=0}\cdot t\right\| \le \\ &\le t\cdot \sup_{0\le s\le t}\left\|\frac{d}{ds}\varphi(U(s,x)) - \frac{d}{ds}\varphi(U(s,x))\Big|_{s=0}\right\| = \\ &= t\cdot \sup_{0\le s\le t}\|\varphi'(U(s,x))f(U(s,x)) - \varphi'(x)f(x)\| < t\cdot\epsilon \end{aligned} \tag{4.8}$$

откуда поделив на t получаем

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(U(t,x)) - \varphi(x)}{t} = \varphi'(x)f(x) \tag{4.9}$$

Если при этом $C_1(\varphi) = \infty$, то есть если $\|\varphi'(x)f(x)\|$ растет неограниченно на $x \in \overline{\Omega}$, то какое малое $t > 0$ мы бы не взяли, найдется элемент $x \in \overline{\Omega}$ такой что $\|\varphi'(x)f(x)\| > 1/t$, что делает невозможным равенство

$$\lim_{t\to+0}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\|(T_t(\varphi))(x) - \varphi(x)\| = 0$$

Таким образом, полугруппа T_t не является сильно непрерывной на банаховом пространстве отображений $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$. Попытка сделать ее сильно непрерывной ограничив область определения полугруппы T_t подмножеством таких элементов φ, для которых выполнено условие (4.5) к сожалению ничего не дает. Предположим для простоты что $f(x) = f_0 = const$. Тогда множество элементов φ для которых выполняется условие (4.5) - это линейное пространство непрерывно дифференцируемых отображений, производная который ограничена на $\overline{\Omega}$. Это пространство не является полным относительно сходимости по норме $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}^0}$ пространства $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ - равномерный предел последовательности дифференцируемых функций не обязательно является дифференцируемой функцией. Поэтому указанное линейное пространство не является банаховым (и, следовательно, мы не можем тогда применить аппарат аналитической теории полугрупп для анализа полугруппы T_t и ее генератора на этом пространстве). Его можно сделать банаховым, взяв более сильную норму

$$\|\varphi\|_{\overline{\Omega}^1} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|\varphi(x)\| + \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|\varphi'(x)\| \tag{4.10}$$

которая обеспечивает равномерную сходимость не только значений функции но и значений ее производной. Проблема заключается в том, что в этом случае и сильную непрерывность полугруппы T_t нужно рассматривать относительно новой, более сильной нормы $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}^1}$. Можно показать, что в этом случае выполнения условия (4.5) уже недостаточно для сильной непрерывности полугруппы T_t - это понятно из того что нам в предельном соотношении $T_t\varphi \to \varphi$ теперь требуется равномерная сходимость не только значений функций но и значений их производных. Мы снова будем иметь некоторые элементы банахова пространства области определения полугруппы T_t на которых она не является сильно непрерывной.

Итак, в общем случае произвольного отображения $\varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$, *равномерная* сходимость $(T_t(\varphi))(x) \to \varphi(x)$ при $t \to +0$ на множестве $\overline{\Omega}$ не имеет места. *Поточечная* же сходимость имеет место для всех непрерывных φ (и не только для ограниченных из пространства $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$): отображение $\varphi(U(t,x))$ непрерывно по переменной t как композиция непрерывных отображений, поэтому

$$\forall x \in \overline{\Omega}\colon \lim_{t\to+0} \varphi(U(t,x)) = \varphi(U(0,x)) = \varphi(x)$$

Если в пространстве Φ (то есть в области определения полугруппы T_t), сходимость его элементов $\varphi \in \Phi$ определена как равномерная сходимость значений, то условие сильной непрерывности (4.1) означает что отображение $\varphi(U(t,x))$ должно быть непрерывным по переменной t в точке $t = 0$ справа *равномерно по переменной x на множестве $x \in \overline{\Omega}$*.

Если поле направлений $f(x)$ непрерывно дифференцируемо то [4, гл. X, §2, п.1] решение дифференциального уравнения $\dot{u} = f(u)$ непрерывно-дифференцируемым образом зависит от начального значения u_0, следовательно, отображение $U(t,x)$ непрерывно по переменной x. Рассмотрим $U(t,x)$ как функцию объединенного аргумента $y = (t,x)\colon U(y) = U(t,x)$. Записав приращение

$$\begin{aligned} U(y_2) - U(y_1) &= U(t_2,x_2) - U(t_1,x_1) = \\ &= (U(t_2,x_2) - U(t_1,x_2)) + (U(t_1,x_2) - U(t_1,x_1)) \end{aligned}$$

мы можем в силу неравенства треугольника и непрерывности $U(t,x)$ по t заключить что $U(t,x)$ непрерывна по совокупности аргументов $y = (t,x)$.

Пусть множество $\overline{\Omega}$ компактно. Тогда по теореме Гейне-Кантора, на компактном множестве $[0,t_0] \times \overline{\Omega}$ непрерывное отображение $\psi(y)\colon ([0,t_0] \times \overline{\Omega}) \mapsto Y$, $\psi(y) = \psi(t,x) = \varphi(U(t,x))$ является равномерно непрерывным по аргументу $y = (t,x)$. Следовательно, для любого $\epsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$ что $|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\| < \delta$ влечет $\|\psi(y_1) - \psi(y_2)\| = \|\varphi(U(t_1, x_1)) - \varphi(U(t_2, x_2))\| < \epsilon$. Для данного произвольного $\epsilon > 0$ возьмем соответствующее $\delta > 0$ и положим $t_1 = t < \delta, t_2 = 0, x_1 = x_2 = x$. Тогда $\|\varphi(U(t, x)) - \varphi(U(0, x))\| < \epsilon$ выполняется для всех $x \in \overline{\Omega}$ и, следовательно $\lim\limits_{t \to +0} \sup\limits_{x \in \overline{\Omega}} \|\varphi(U(t, x)) - \varphi(U(0, x))\| = 0$, то есть выполнено условие (4.1) сильной непрерывности полугруппы T_t. Итак, полугруппа неоднородных сдвигов T_t является сильно непрерывной на всем пространстве $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ в том числе в том частном случае когда f - непрерывно дифференцируемо а $\overline{\Omega}$ - компактно, в частности если Ω - ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$.

4.3 Область определения генератора A_T полугруппы T_t

Покажем что область определения $Dom(A_T)$ генератора полугруппы T_t - непустое множество. По определению, $Dom(A_T)$ это множество таких элементов $\varphi \in Dom(T_t) = C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ для которых существует некоторый элемент $(A_T(\varphi)) \in Dom(T_t) = C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ такой что

$$\lim_{t \to +0} \frac{T_t\varphi - \varphi}{t} = A_T(\varphi) \tag{4.11}$$

что означает

$$0 = \lim_{t \to 0} \left\| \frac{T_t\varphi - \varphi}{t} - A_T(\varphi) \right\|_{\overline{\Omega}^0} = \lim_{t \to 0} \sup_{x \in \overline{\Omega}} \left\| \frac{(T_t\varphi)(x) - \varphi(x)}{t} - (A_T(\varphi))(x) \right\|_Y \tag{4.12}$$

Рассмотрим те отображения φ которые имеют непрерывную на $\overline{\Omega}$ производную. Для таких φ положим

$$(A_T(\varphi))(x) = \varphi'(x) f(x)$$

Воспользуемся еще раз формулой конечных приращений (4.8):

$$\|\varphi(U(t,x)) - \varphi(x) - \varphi'(x) f(x) \cdot t\| \le t \cdot \sup_{0 \le s \le t} \left\| \frac{d}{ds}\varphi(U(s,x)) - \left. \frac{d}{ds}\varphi(U(s,x)) \right|_{s=0} \right\|$$

Если существует вторая производная $\frac{d^2}{ds^2}\varphi(U(s,x))$ то по формуле конечных приращений (1.5) мы можем оценить

$$\left\| \frac{d}{ds}\varphi(U(s,x)) - \left. \frac{d}{ds}\varphi(U(s,x)) \right|_{s=0} \right\| \le s \cdot \sup_{0 \le \tau \le s} \left\| \frac{d^2}{d\tau^2}\varphi(U(\tau,x)) \right\|$$

$$\|\varphi(U(t,x)) - \varphi(x) - \varphi'(x) f(x) \cdot t\| \le t^2 \cdot \sup_{0 \le s \le t} \left\| \frac{d^2}{ds^2}\varphi(U(s,x)) \right\|$$

$$\left\| \frac{\varphi(U(t,x)) - \varphi(x)}{t} - \varphi'(x) f(x) \right\| \le t \cdot \sup_{0 \le s \le t} \left\| \frac{d^2}{ds^2}\varphi(U(s,x)) \right\|$$

Если кроме того вторая производная $\frac{d^2}{ds^2}\varphi(U(s,x))$ непрерывна по переменной s, то

$$\lim_{t\to+0}\sup_{0\le s\le t}\left\|\frac{d^2}{ds^2}\varphi(U(s,x))\right\| = \left\|\frac{d^2}{ds^2}\varphi(U(s,x))\Big|_{s=0}\right\|$$

В случае если выполняется условие

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left\|\frac{d^2}{ds^2}\varphi(U(s,x))\Big|_{s=0}\right\| = C_2(\varphi) < \infty \tag{4.13}$$

то

$$\lim_{t\to+0}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left\|\frac{\varphi(U(t,x))-\varphi(x)}{t}-\varphi'(x)f(x)\right\| \le \lim_{t\to+0}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left(t\cdot\sup_{0\le s\le t}\left\|\frac{d^2}{ds^2}\varphi(U(s,x))\right\|\right) =$$

$$= \lim_{t\to+0}\left(t\cdot\sup_{x\in\overline{\Omega}}\sup_{0\le s\le t}\left\|\frac{d^2}{ds^2}\varphi(U(s,x))\right\|\right) = \left(\lim_{t\to+0} t\right)\cdot\left(\lim_{t\to+0}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\sup_{0\le s\le t}\left\|\frac{d^2}{ds^2}\varphi(U(s,x))\right\|\right) =$$

$$= \left(\lim_{t\to+0} t\right)\cdot C_2(\varphi) = 0$$

то есть выполнено условие (4.12) и, следовательно $\varphi\in Dom(A_T)$, причем $(A_T(\varphi))(x)=\varphi'(x)f(x)$.

Получим явное выражение для второй производной $\frac{d^2}{ds^2}\varphi(U(s,x))$:

$$\frac{d^2}{ds^2}\varphi(U(s,x)) = \frac{d}{ds}\left(\varphi'(U(s,x))f(U(s,x))\right) =$$

$$\left(\varphi''(U(s,x))\frac{d}{ds}U(s,x)\right)f(U(s,x)) + \varphi'(U(s,x))\left(f'(U(s,x))\frac{d}{ds}U(s,x)\right) =$$

$$= \varphi''(U(s,x))(f(U(s,x)),f(U(s,x))) + \varphi'(U(s,x))f'(U(s,x))f(U(s,x))$$

где $\varphi''(U(s,x))(f(U(s,x)),f(U(s,x)))$ обозначает действие билинейного отображения $\varphi''(U(s,x))$ на паре элементов $f(U(s,x))$ (см. подробный вывод [3, часть I, §7, п.5]). При $s=0: U(0,x)=x$ и

$$\frac{d^2}{ds^2}\varphi(U(s,x))\Big|_{s=0} = \varphi''(x)(f(x),f(x)) + \varphi'(x)f'(x)f(x) \tag{4.14}$$

Условие (4.13) принимает вид

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}\|\varphi''(x)(f(x),f(x)) + \varphi'(x)f'(x)f(x)\| = C_2(\varphi) < \infty \tag{4.15}$$

Производная $\frac{d^2}{ds^2}\varphi(U(s,x))$ существует и непрерывна на $x\in\overline{\Omega}$, если на $x\in\overline{\Omega}$ существуют и непрерывны производные $\varphi''(x)$ и $f'(x)$. В этом случае выполнение (4.15) обеспечивает $\varphi\in Dom(A_T)$. Таким образом, можно утверждать что если производная $f'(x)$ непрерывна на $\overline{\Omega}$, то

$$Dom(A_T) \supseteq \{\varphi\in C^2(\overline{\Omega},Y) \mid \sup_{x\in\overline{\Omega}}\|\varphi''(x)(f(x),f(x)) + \varphi'(x)f'(x)f(x)\| < \infty\} \tag{4.16}$$

Глава 5

Случай нулевых краевых условий

5.1 Постановка краевой задачи для полугруппы неоднородного сдвига

Вернемся к постановке изначальной задачи в разделе 2.1. Если множество $\Omega \subseteq X$ не равно всему пространству X, то типичным является наличие краевых условий, накладываемых на значения самих отображений $\varphi \in \Phi \subseteq C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$ и/или значения их производных на границе $\partial\Omega$ множества Ω. В данном разделе мы рассмотрим случай простейших краевых условий:

$$\forall x \in \partial\Omega : \ \varphi(x) = 0 \tag{5.1}$$

где 0 - нулевой элемент пространства Y в котором принимают значения отображения φ.

Обозначим через $C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y)$ соответствующее подмножество ограниченных непрерывных отображений $\overline{\Omega} \mapsto Y$:

$$C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y) = \{\varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y) \mid \forall x \in \partial\Omega : \ \varphi(x) = 0\} \tag{5.2}$$

Множество $C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y)$ очевидно замкнуто относительно сложения элементов и умножения на число. Любая фундаментальная (по норме $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}^0}$ вмещающего пространства $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$) последовательность его элементов $\varphi_n \in C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y)$ сходится к элементу этого же множества, так как сходимость по норме $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}^0}$ влечет поточечную сходимость значений функций на всех $x \in \overline{\Omega}$. Следовательно, $C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y)$ замкнуто относительно сходимости и является подпространством пространства $C_b^0(\overline{\Omega}, Y)$. Это банахово пространство с той же самой sup-нормой $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}^0}$.

Пусть задано $f \in C^0(\overline{\Omega}, X)$ - непрерывное отображение $\overline{\Omega} \mapsto X$, удовлетворяющее на множестве $\overline{\Omega}$ условию Липшица с некоторой константой

$K_f < \infty$. Рассмотрим следующую **краевую задачу для полугруппы неоднородного сдвига**:

Построить полугруппу T_t, отображающую пространство $C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y)$ в себя

$$T\colon \mathbb{R}^+_0 \times C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y) \mapsto C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y) \tag{5.3}$$

такую что значения ее генератора $A_T\colon C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y) \mapsto C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y)$

$$A_T(\varphi) = \lim_{t\to+0} \frac{T_t(\varphi) - \varphi}{t} \tag{5.4}$$

для всех дифференцируемых на $\overline{\Omega}$ отображений $\varphi \in C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y)$, были равны $\varphi'(x)f(x)$:

$$\forall x \in \overline{\Omega}\colon (A_T(\varphi))(x) = \varphi'(x)f(x) \tag{5.5}$$

Поставленная задача - это уже рассмотренная задача (2.2)-(2.5) в том случае когда область определения $\Phi = Dom(T_t)$ искомой полугруппы T_t есть пространство $C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y)$:

$$\Phi = Dom(T_t) = C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y) \tag{5.6}$$

Согласно следствию 2.6.3, если

1. существует полугруппа
$$U \; : \; \left(\mathbb{R}^+_0 \times \overline{\Omega}\right) \mapsto \overline{\Omega} \tag{5.7}$$

2. для генератора A_U полугруппы U выполняется:
$$Dom(A_U) = \overline{\Omega} \quad \text{и} \quad \forall x \in \overline{\Omega} \; : \; A_U(x) = f(x) \tag{5.8}$$

3. выполняется включение
$$\begin{aligned} &\forall \varphi \in C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y), \; \forall t \geq 0 \; : \\ &(T_t\varphi)(\cdot) = \varphi(U(t, \cdot)) \in C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y) \end{aligned} \tag{5.9}$$

(где точка обозначает произвольный аргумент $x \in \overline{\Omega}$)

то однопараметрическое семейство отображений $T(t, \varphi)$ определенное формулой

$$(T_t\varphi)(x) = \varphi(U(t, x)) \tag{5.10}$$

является решением задачи (5.3)-(5.5). При этом мы знаем (см. предложение 2.7.1) что два первых пункта выполняются для полугруппы $U(t, x)$ определенной как решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t, x) = f(U(t, x)), \; 0 \leq t \leq T \\ U(0, x) = x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{5.11}$$

при условии что решение задачи Коши существует для любого начального значения $x \in \overline{\Omega}$ в течении неограниченного промежутка времени и не выходит за пределы множества $\overline{\Omega}$.

Мы сосредоточимся на поиске условий, при которых для полугруппы U_t определенной как решение задачи Коши (5.11) выполняется требование (5.9). Понятно, что для того чтобы это требование выполнялось, значение $U(t,x)$ должно быть определено для всех $t \geq 0,\ x \in \overline{\Omega}$ и принадлежать множеству $\overline{\Omega}$: в противном случае либо утверждение (5.9) выполнено не для всех $t \geq 0,\ x \in \overline{\Omega}$, либо значение $\varphi(U(t,x))$ не определено и тогда (5.9) не выполняется. Заметим что требование (5.9) эквивалентно выполнению двух условий:

$$\left(\varphi(U(t,\cdot)) \in C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega},Y)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(U(t,\cdot)) \in C^0_b(\overline{\Omega},Y) \\ \forall x_\Gamma \in \partial\Omega : \ \varphi(U(t,x_\Gamma)) = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

Мы рассматриваем формулу (5.10) только в том случае когда она определена корректно, то есть выполнено условие $\forall x \in \overline{\Omega}, \forall t \geq 0 : \ U(t,x) \in \overline{\Omega}$ и, следовательно, $\forall x \in \overline{\Omega}, \forall t \geq 0$ выполнено либо $U(t,x) \in \Omega$ либо $U(t,x) \in \partial\Omega$ - так как для открытого множества Ω его замыкание $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, причем $\Omega \cap \partial\Omega = \varnothing$.

Пусть $\varphi \in C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega},Y)$ - произвольно. Тогда $\forall x \in \partial\Omega$: $\varphi(x) = 0$ а значения $\varphi(x)$ при $x \in \Omega$ вообще говоря произвольны. Следовательно, для отображения $(T_t(\varphi))(x) = \varphi(U(t,x))$ краевое условие (5.1)

$$\forall x \in \partial\Omega\colon (T_t(\varphi))(x) = \varphi(U(t,x)) = 0 \tag{5.13}$$

может выполняться в том и только в том случае, если

$$\forall x_\Gamma \in \partial\Omega, \forall t \geq 0 : \ U(t,x_\Gamma) \in \partial\Omega \tag{5.14}$$

Таким образом, для того чтобы общая формула (5.10) давала решение краевой задачи (5.3)-(5.5) необходимо чтобы для полугруппы $U(t,x)$ множество $\partial\Omega$ являлось инвариантным, то есть чтобы все траектории задачи Коши (5.11) начинающиеся на границе $\partial\Omega$ множества Ω неограниченно долго оставались на границе. Следующая теорема показывает что достаточно потребовать, чтобы для любой начальной точки $u_0 \in \partial\Omega$ существовало локальное по времени решение задачи Коши, не выходящее из $\partial\Omega$.

Теорема 5.1.1. *Пусть X - банахово пространство, $\Omega \subseteq X$ - его открытое подмножество, $\partial\Omega$ - граница Ω, отображение $f\colon \overline{\Omega} \mapsto X$ удовлетворяет на $\overline{\Omega}$ условию Липшица. Для того чтобы все траектории решения задачи Коши $\dot{u} = f(u), u(0) = u_0 \in \partial\Omega$ существовали неограниченно долго во времени и не выходили за пределы $\partial\Omega$, необходимо и достаточно чтобы для любого начального значения $u_0 \in \partial\Omega$существовало локальное по времени решение задачи Коши, не выходящее из $\partial\Omega$.*

Доказательство. Необходимость очевидна - если для некоторого начального значения $u_0 \in \partial\Omega$ локальное по времени решение не существует либо покидает $\partial\Omega$, то и глобального решения остающегося внутри $\partial\Omega$ для $u(0) = u_0$ не существует. Докажем достаточность.

Пусть известно что для любого начального значения $u_0 \in \partial\Omega$ в течение ненулевого отрезка времени существует локальное решение задачи Коши, не выходящее из $\partial\Omega$. Следовательно, каждое локальное решение можно продолжить на ненулевой отрезок времени, не выходя за пределы $\partial\Omega$. Покажем что это продолжение можно осуществлять неограниченно долго во времени. Ход рассуждений полностью аналогичен использованному при доказательстве теоремы 3.4.2: предположим что решение не выходящее из $\partial\Omega$ существует лишь на некотором отрезке $[0, \tau]$ или полуотрезке $[0, \tau)$ времени. Если оно определено на замкнутом отрезке, то по условиям теоремы, его можно продолжить далее во времени не выходя за пределы $\partial\Omega$ - противоречие. Если решение $u(t)$ определено лишь на полуотрезке $t \in [0, \tau)$ то, выбрав последовательность моментов времени t_k сходящуюся к τ, можно показать что последовательность $u(t_k) \in \partial\Omega$ сходится к некоторому значению $u(\tau)$, причем $u(\tau) \in \partial\Omega$, так $u(t_k) \in \partial\Omega$ и $\partial\Omega$ - замкнутое множество. Далее остается показать что функция $u(t)$ в точке $t = \tau$ является непрерывной слева и удовлетворяет интегральному уравнению, соответствующему задаче Коши.

В приведенном доказательстве существенным является то что поле направлений f глобально липшицево на $\partial\Omega$ и то что $\partial\Omega$ - замкнутое множество. □

Мы рассмотрим вопрос существования локального по времени решения не выходящего за пределы $\partial\Omega$ в случае гладкой границы $\partial\Omega$.

5.2 Задание гладкой границы непрерывно дифференцируемым функционалом

Определение 5.2.1. *Будем будем говорить что граница $\partial\Omega$ открытого множества Ω* ***локально гладко задана функционалом*** *G, если для любой граничной точки $u_0 \in \partial\Omega$ можно указать некоторую ее открытую окрестность $B_r(u_0)$ радиуса $r > 0$ и непрерывно-дифференцируемое отображение*

$$G\colon B_r(u_0) \mapsto \mathbb{R} \tag{5.15}$$

такое что

$$\forall u \in \Omega \cap B_r(u_0) \quad : \quad G(u) < 0 \tag{5.16}$$

$$\forall u \in \partial\Omega \cap B_r(u_0) \quad : \quad G(u) = 0 \tag{5.17}$$

Рассматривая только точки $u \in B_r(u_0)$ мы можем заключить что $u \notin \overline{\Omega} \Rightarrow G(u) > 0$ (так как в случае $u \in \overline{\Omega}$ либо $G(u) < 0$ либо $G(u) = 0$). Таким образом в пределах окрестности $B_r(u_0)$ принадлежность точки u к множеству Ω, его границе $\partial\Omega$, либо к дополнению $\overline{\Omega}$, однозначно определяется знаком $G(u)$:

$$\begin{aligned} u \in \Omega \;&\Leftrightarrow\; G(u) < 0 \\ u \in \partial\Omega \;&\Leftrightarrow\; G(u) = 0 \\ u \notin \overline{\Omega} \;&\Leftrightarrow\; G(u) > 0 \end{aligned} \tag{5.18}$$

5.3 Необходимое условие инвариантности нулевых краевых условий к преобразованиям полугруппы сдвигов

Пусть для каждой точки $u_0 \in \partial\Omega$ в некоторой ее открытой окрестности $B_r(u_0)$ граница $\partial\Omega$ локально гладко задана функционалом $G\colon B_r(u_0) \mapsto R$. Пусть $x \in \partial\Omega \cap B_r(u_0)$ - произвольная точка границы множества Ω в окрестности $B_r(u_0)$. Пусть $U(t,x)\colon [0,T(x)] \mapsto B_r(u_0)$ - локальное по времени решение задачи Коши $\dot{u} = f(u), u(0) = x$ определенное на отрезке времени $[0,T(x)], T(x) > 0$. Условие того что локальное решение, начинающееся в точке $x \in \partial\Omega \cap B_r(u_0)$ границы множества Ω не покидает границу в течении всего отрезка времени на котором оно определено, принимает в силу (5.18) вид

$$\forall t \in [0,T(x)] \;:\; G(U(t,x)) = 0 \tag{5.19}$$

то есть функция $G(u(t))$ постоянна на $t \in [0,T(x)]$. Отсюда немедленно следует что ее производная равна нулю:

$$\forall t \in [0,T(x)] \;:\; \frac{d}{dt}G(U(t,x)) = G'(U(t,x))f(U(t,x)) = 0 \tag{5.20}$$

Требование чтобы **любое** локальное по времени решение, начинающееся в любой точке $x \in \partial\Omega \cap B_r(u_0)$ не покидало $\partial\Omega$ по крайней мере до выхода из окрестности $B_r(u_0)$, тогда влечет

$$\forall x \in \partial\Omega \cap B_r(u_0) \;:\; G'(x)f(x) = 0 \tag{5.21}$$

(в силу теоремы о сохранении функцией знака своей производной в окрестности точки, где она принимает нулевое значение). Поэтому если мы хотим потребовать чтобы общая формула (5.10) давала корректное решение краевой задачи (5.3)-(5.5) для полугруппы неоднородного сдвига, мы должны потребовать выполнения условия (5.21) в каждой окрестности $B_r(u_0)$ границы по отношению к полю направлений f и соответствующему функционалу $G = G_{u_0}$ задающему границу множества Ω в этой окрестности. Таким образом, необходимое условие того что общая формула (5.10) дает решение краевой задачи для полугруппы неоднородного сдвига имеет вид

$$\forall x \in \partial\Omega \;:\; G'(x)f(x) = 0 \tag{5.22}$$

где G - функционал, задающий границу множества Ω в некоторой окрестности содержащей точку x. Сформулированное условие является необходимым, но не является достаточным.

Замечание 5.3.1. *Заметим что при выводе необходимого условия (5.22) непрерывность производной $G'(x)$, которую влечет определение 5.2.1 гладкой заданности границы функционалом, по существу не была использована.*

Геометрический смысл условия 5.22: Для фиксированной точки $x \in \partial\Omega$ производная $G'(x)$ - это непрерывный линейный функционал, отображающий пространство X в числовую прямую $\mathbb{R}$. Множество элементов $h \in X$ таких что $G'(x)h = 0$ - это линейное подпространство тех приращений $h = \Delta x$ аргумента x функционала $G(x)$, для которых его дифференциал $dG(x) = G'(x)h$ (т.е. линейная часть приращения) обращается в ноль. Это линейное подпространство определяет касательную плоскость к границе $\partial\Omega$ множества Ω в точке x. С другой стороны, уравнение $\dot{u} = f(u)$ определяет $f(x)$ как вектор направления траектории решения задачи Коши (5.11)в точке x. Поэтому условие $\forall x \in \partial\Omega\ :\ G'(x)f(x) = 0$ означает что касательный вектор траектории решения задачи Коши (5.11) в каждой точке $x \in \partial\Omega$ границы лежит в касательной плоскости к границе в этой точке.

5.4 Достаточные условия инвариантности нулевых краевых условий к преобразованиям полугруппы сдвигов

Установим достаточные условия выполнения условия (5.14) $U(t, \partial\Omega) \subseteq \partial\Omega$, которое обеспечивает корректность решения краевой задачи для полугруппы неоднородного сдвига с помощью общей формулы (5.10) $(T_t(\varphi))(x) = \varphi(U(t,x))$. В силу теоремы 5.1.1 нам достаточно установить условия, при выполнении которых для любого начального значения $x \in \partial\Omega$ в течение некоторого ненулевого промежутка времени $[0,T]$ решение задачи Коши $\dot{u} = f(u), u(0) = x$ существует и остается в $\partial\Omega$.

Пусть снова для каждой точки $u_0 \in \partial\Omega$ в некоторой ее открытой окрестности $B_r(u_0)$ граница $\partial\Omega$ локально гладко задана функционалом $G\colon B_r(u_0) \mapsto R$, производная которого существует и непрерывна в окрестности $B_r(u_0)$. Для доказательства существования локального по времени решения не выходящего из $\partial\Omega$ нам помимо необходимого условия (5.22) понадобятся следующие дополнительные предположения:

1. Производная $G'(x)$ не обращается в ноль на $\partial\Omega$:
$$\forall u \in \partial\Omega \cap B_r(u_0)\ :\ G'(u) \neq 0 \tag{5.23}$$

2. Производная G' удовлетворяет на $B_r(u_0)$ условию Липшица с некоторой константой $0 < K_{G'} < \infty$:
$$\forall u_1, u_2 \in \cap B_r(u_0)\colon \|G'(u_1) - G'(u_2)\| \leq K_{G'}\|u_1 - u_2\| \tag{5.24}$$

Мы построим локальное решение как единственную неподвижную точку некоторого сжимающего оператора H, отображающего в себя замкнутое подмножество пространства локальных траекторий (потенциальных локальных решений задачи Коши). При этом выберем оператор таким, что он является сжимающим также относительно нормы - супремума модуля функционала G на данной траектории. Это обеспечит то что неподвижная точка оператора - локальное решение задачи Коши - будет лежать строго в $\partial\Omega$. Сжимающий оператор H мы построим как композицию двух операторов $H = F \circ P$.

- F - это традиционный интегральный оператор
$$F : (F(y))(t) = u_0 + \int_0^t f(y(s))ds$$
который обеспечивает сходимость итераций над произвольной начальной траекторией $y_0(t)$ к локальному решению задачи Коши.

- P - оператор локального проектирования траектории $y(t)$ на поверхность $\partial\Omega$ границы множества Ω.

5.4.1 Оператор локальной проекции на $\partial\Omega$

Пусть точка $u_0 \in \partial\Omega$, функционал $G\colon B_r(u_0) \mapsto R$ в некоторой открытой окрестности $B_r(u_0)$ точки u_0 задает границу $\partial\Omega$ множества Ω, в $B_r(u_0)$ существует и непрерывна производная $G'(x)$, которая (предположение (5.23)) не обращается в ноль на $\partial\Omega$. Для фиксированного $x \in B_r(u_0)$, $G'(x)(\cdot)\colon X \mapsto \mathbb{R}$ - это ограниченный линейный функционал. В силу $G'(u_0) \neq 0$ можно указать такой ненулевой элемент $h \in X$ что $G'(u_0)h \neq 0$. Выражение $G'(u_0)h$ - это элемент банахова пространства X, в котором определено множество $\Omega \subset X$, поэтому $G'(u_0)h$ можно рассматривать как направление движения в X. Оператор P локальной проекции на $\partial\Omega$ сопоставляет данной точке $u \in X$ точку $P(u) \in \partial\Omega$. Точка $P(u)$ определяется как точка пересечения прямой $u + sG'(u_0)h, s \in \mathbb{R}$ с поверхностью $\partial\Omega$. Прямая $u + sG'(u_0)h, s \in \mathbb{R}$ проходит через данную точку u в фиксированном (не зависящем от u) направлении $G'(u_0)h$. Для того чтобы показать что такая точка пересечения существует, мы ограничим область определения оператора проекции P не всем пространством X и даже не окрестностью $B_r(u_0)$ в которой определен функционал G, а некоторой ее замкнутой подокрестностью $\overline{B}_{\delta_P}(u_0) \subset B_r(u_0)$ радиуса δ_P.

В силу непрерывности $G'(x)$ в окрестности $B_r(u_0)$, для любого данного $\epsilon_{G'} > 0$ можно указать $\delta = \delta(\epsilon_{G'}) > 0$ такое что

$$\|u - u_0\| \leq \delta \;\Rightarrow\; \|G'(u) - G'(u_0)\| \leq \epsilon_{G'} \tag{5.25}$$

Далее, так как $G'(u_0) \neq 0$ то $\|G'(u_0)\| > 0$. Согласно определению нормы линейного функционала

$$\|G'(u_0)\| = \sup_{h \in X, \|h\| \leq 1} |G'(u_0)h| = \sup_{h \in X, \|h\| = 1} |G'(u_0)h|$$

и свойству sup, для любого сколь угодно малого числа $\epsilon_{\|G'\|} > 0$ можно указать такой элемент $h \in X, \|h\| = 1$ что

$$\|G'(u_0)h\| - \epsilon_{\|G'\|} < |G'(u_0)h| \leq \|G'(u_0)\| \tag{5.26}$$

причем в силу линейности функционала $G'(u_0)$ можно выбрать h так что $\|G'(u_0)h\| = G'(u_0)h > 0$, и тогда

$$\|G'(u_0)\| - \epsilon_{\|G'\|} < G'(u_0)h \leq \|G'(u_0)\| \tag{5.27}$$

Используя неравенство (5.25) можно оценить

$$\|u - u_0\| < \delta \;\Rightarrow\; |G'(u)h - G'(u_0)h| \leq \|G'(u) - G'(u_0)\|\|h\| \leq \epsilon_{G'} \tag{5.28}$$

Из неравенств (5.27) и (5.28) получаем оценку снизу для числа $G'(u)h$:

$$\|u - u_0\| < \delta \;\Rightarrow\; G'(u)h \geq \|G'(u_0)\| - \epsilon_{G'} - \epsilon_{\|G'\|} = \|G'(u_0)\| - \epsilon \tag{5.29}$$

где для краткости обозначено $\epsilon = \epsilon_{G'} + \epsilon_{\|G'\|}$. Выбрав $\epsilon < \|G'(u_0)\|$ мы получаем

$$\forall u \in \overline{B}_\delta(u_0) \colon G'(u)h \geq \|G'(u_0)\| - \epsilon > 0 \tag{5.30}$$

Введем отображение $v(t, u) \colon (\mathbb{R}_0^+ \times \overline{B}_{\delta_P}(u_0)) \mapsto X$:

$$v(t, u) = u - t \cdot h \cdot sign(G(u)) \tag{5.31}$$

которое описывает траекторию движения точки в X от начальной точки $u \in \overline{B}_{\delta_P}(u_0)$ вдоль прямой $u + s \cdot G'(u_0)h, s \in \mathbb{R}$. Это движение начинается в направлении уменьшения модуля начального значения величины $G(v(0, u)) = G(u)$, так как

$$\frac{d}{dt}G(v(t, u)) = -G'(v(t, u))h \cdot sign(G(u)) \tag{5.32}$$

и в силу неравенства (5.30) $\forall v \in \overline{B}_\delta(u_0) \colon G'(v)h > 0$.

Выберем интервал времени движения $t \in [0, T]$ так чтобы:

1. В течении этого интервала все траектории $v(t, u)$ начинающиеся в окрестности $u \in \overline{B}_{\delta_P}(u_0)$ оставались в объемлющей ее окрестности $\overline{B}_\delta(u_0)$:
$$\|u - u_0\| \leq \delta_P, \; t \in [0, T] \;\Rightarrow\; \|v(t, u) - u_0\| \leq \delta \tag{5.33}$$

2. В течении этого интервала траектория движения $v(t, u)$ начинающаяся в любой точке окрестности $u \in \overline{B}_{\delta_P}(u_0)$ пересекла множество $\partial\Omega$, то есть должно выполняться:

$$\|u - u_0\| \leq \delta_P \;\Rightarrow\; \tau(u) = \inf_{t \geq 0}\{t \mid G(v(t, u)) = 0\} \leq T \tag{5.34}$$

Здесь $\tau(u)$ - время достижения множества $\partial\Omega$ точкой, движущейся по траектории $v(t,u)$ из начального положения u.

Так как $\left|\frac{d}{dt}v(t,u)\right| = |h| = 1$, то для выполнения условия (5.33) достаточно взять $T = \delta - \delta_P$ (и мы очевидно должны взять $\delta_P < \delta$). Поскольку в течении всего рассматриваемого интервала времени $t \in [0,T]$ траектории $v(t,u)$ начинающиеся в $u \in \overline{B}_{\delta_P}(u_0)$ остаются в окрестности $\overline{B}_\delta(u_0)$, то мы вправе, используя неравенство (5.30), утверждать что $\forall u \in \overline{B}_{\delta_P}(u_0), \forall t \in [0,T]$:

$$sign\left(\frac{d}{dt}G(v(t,u))\right) = -sign\left(G(u)\right) \tag{5.35}$$

$$\left|\frac{d}{dt}G(v(t,u))\right| = G'(v(t,u))h \geq \|G'(u_0)\| - \epsilon > 0 \tag{5.36}$$

то есть при фиксированном u на интервале $t \in [0,T]$ производная по t функции $G(v(t,u))$ имеет знак противоположный начальному значению функции. Поэтому за время $\tau(u)$ не превышающее $|G(u)|/(\|G'(u_0)\| - \epsilon)$ функция $G(v(t,u))$ достигнет нулевого значения, это означает что траектория точки $v(t,u)$ пересечет $\partial\Omega$.

Оценим $|G(u)|$ по формуле конечных приращений (1.6):

$$|G(u) - G(u_0) - G'(u_0)(u - u_0)| \leq \|u - u_0\| \cdot \sup_{0\leq\theta\leq 1} \|G'(u_0 + \theta(u - u_0)) - G'(u_0)\|$$

Так как $u_0 \in \partial\Omega$ то $G(u_0) = 0$. Так как $u \in \overline{B}_{\delta_P}(u_0)$ то $\|u - u_0\| \leq \delta_P$. В силу (5.25) : $\sup\limits_{0\leq\theta\leq 1} \|G'(u_0 + \theta(u - u_0)) - G'(u_0)\| \leq \epsilon_{G'} < \epsilon$. Поэтому получаем оценку

$$\begin{aligned}
&|G(u) - G'(u_0)(u - u_0)| < \delta_P \cdot \epsilon \\
&|G(u)| < |G'(u_0)(u - u_0)| + \epsilon \cdot \delta_P \leq \\
&\leq \|G'(u_0)\|\|u - u_0\| + \epsilon \cdot \delta_P \leq \|G'(u_0)\| \cdot \delta_P + \epsilon \cdot \delta_P \\
&|G(u)| < (\|G'(u_0)\| + \epsilon) \cdot \delta_P
\end{aligned} \tag{5.37}$$

и оценку сверху для времени $\tau(u)$ которое пройдет до пересечения траектории $v(t,u)$ с $\partial\Omega$:

$$\tau(u) \leq \frac{|G(u)|}{\|G'(u_0)\| - \epsilon} < \frac{\|G'(u_0)\| + \epsilon}{\|G'(u_0)\| - \epsilon} \cdot \delta_P \tag{5.38}$$

Теперь можно утверждать что второе условие (5.34) $\tau(u) \leq T = \delta - \delta_P$ выполнено при

$$\frac{\|G'(u_0)\| + \epsilon}{\|G'(u_0)\| - \epsilon} \cdot \delta_P \leq \delta - \delta_P \tag{5.39}$$

$$\delta_P \leq \frac{\delta}{2}\left(1 - \frac{\epsilon}{\|G'(u_0)\|}\right) \tag{5.40}$$

Для δ_P удовлетворяющего неравенству (5.40) мы теперь можем определить оператор $P = P(\epsilon, \delta, \delta_P)$ локальной проекции на $\partial\Omega$:

$$P\colon \overline{B}_{\delta_P}(u_0) \;\mapsto\; \partial\Omega \cap \overline{B}_{\delta}(u_0) \tag{5.41}$$
$$P(u) = v(\tau(u), u) \tag{5.42}$$

Замечание 5.4.1. *При построении оператора проекции мы использовали непрерывность производной $G'(x)$ во всей окрестности $\overline{B}_\delta(u_0)$. Условие же (5.23) того что $G'(x)$ не обращается в ноль на границе использовалось лишь в точке u_0, в окрестности которой мы строили проекцию. Поэтому условие (5.23) в его общей форме является избыточным: достаточно лишь потребовать чтобы в сколь угодно малой окрестности любой точка границы x была другая точка границы x_0 такая что $G'(x_0) \neq 0$.*

Для того чтобы доказать существование локального решения задачи Коши, не выходящего из $\partial\Omega$, нам понадобится следующее утверждение:

Предложение 5.4.2. *Оператор P локальной проекции на $\partial\Omega$ удовлетворяет на $\overline{B}_{\delta_P}(u_0)$ условию Липшица, то есть существует число $K_P < \infty$ такое что*

$$\forall u_1, u_2 \in \overline{B}_{\delta_P}(u_0) \;:\; \|P(u_1) - P(u_2)\| \leq K_P \cdot \|u_1 - u_2\| \tag{5.43}$$

Доказательство. Пусть $u_1, u_2 \in \overline{B}_{\delta_P}(u_0) \subset \overline{B}_\delta(u_0)$. Из неравенства (5.25) следует $\forall u \in \overline{B}_\delta(u_0) \;:\; \|G'(u)\| \leq \|G'(u_0)\| + \epsilon_{G'} < \|G'(u_0)\| + \epsilon$, поэтому

$$|G(u_1)-G(u_2)| \leq \|u_1-u_2\| \cdot \sup_{0\leq\theta\leq 1} \|G'(u_1)+\theta(u_1-u_2)\| \leq \|u_1-u_2\| \cdot (\|G'(u_0)\|+\epsilon) \tag{5.44}$$

Кроме того, в силу определения (5.31) отображения $v(t,u)$ и определения (5.42) оператора проекции для $i = 1, 2$ имеем

$$\begin{aligned} \|u_i - P(u_i)\| &= \|u_i - v(\tau(u_i), u_i)\| = \|\tau(u_i) \cdot h\| = \\ &= |\tau(u_i)| \leq \{\text{см. } (5.38)\} \leq \frac{|G(u_i)|}{\|G'(u_0)\| - \epsilon} \end{aligned} \tag{5.45}$$

Разберем два возможных случая:

Случай 1: $sign(G(u_1)) \neq sign(G(u_2))$, т.е. точки u_1 и u_2 лежат по разные стороны от $\partial\Omega$. Тогда

$$\|G(u_1)\| + \|G(u_2)\| = |G(u_1) - G(u_2)| \leq \|u_1 - u_2\| \cdot (\|G'(u_0)\| + \epsilon) \tag{5.46}$$
$$\|G(u_i)\| \leq \|u_1 - u_2\| \cdot (\|G'(u_0)\| + \epsilon), \; i = 1, 2 \tag{5.47}$$

Тогда

$$\|u_i - P(u_i)\| \leq \{\text{см. } (5.45)\} \leq \frac{|G(u_i)|}{\|G'(u_0)\| - \epsilon} \leq \frac{\|G'(u_0)\| + \epsilon}{\|G'(u_0)\| - \epsilon}\|u_1 - u_2\|$$

$$
\begin{aligned}
&\|Pu_1 - Pu_2\| = \|(Pu_1 - u_1) + (u_1 - u_2) + (u_2 - Pu_2)\| \le \\
&\le \|(Pu_1 - u_1)\| + \|(u_1 - u_2)\| + \|(u_2 - Pu_2)\| \le \\
&\le \frac{(\|G'(u_0)\| + \epsilon)}{\|G'(u_0)\| - \epsilon}\|u_1 - u_2\| + \|(u_1 - u_2)\| + \frac{(\|G'(u_0)\| + \epsilon)}{\|G'(u_0)\| - \epsilon}\|u_1 - u_2\| \le \\
&\le \left(1 + 2\frac{(\|G'(u_0)\| + \epsilon)}{\|G'(u_0)\| - \epsilon}\right)\|(u_1 - u_2)\|
\end{aligned}
\tag{5.48}
$$

Случай 2: $sign(G(u_1)) = sign(G(u_2))$, т.е. точки u_1 и u_2 лежат с одной и той же стороны от $\partial\Omega$. Так как $\frac{d}{dt}v(t, u_i) = -h \cdot sign(G(u_i))$ и $sign(G(u_1)) = sign(G(u_2))$ то $\frac{d}{dt}v(t, u_1) = \frac{d}{dt}v(t, u_2)$ поэтому $\forall t \ge 0$: $\|v(t, u_1) - v(t, u_2)\| = \|u_1 - u_2\|$. В момент времени $\tau_{min} = \min\{\tau(u_1, \tau(u_2))\}$ одна из точек траекторий $v(t, u_i)$ достигнет $\partial\Omega$. Пусть для определенности $\tau_1 = \tau(u_1) \le \tau(u_2) = \tau_2$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\|Pu_1 - Pu_2\| = \|v(\tau_1, u_1) - v(\tau_2, u_2)\| = \\
&= \|(v(\tau_1, u_1) - v(\tau_1, u_2)) + (v(\tau_1, u_2) - v(\tau_2, u_2))\| \le \\
&\le \|(v(\tau_1, u_1) - v(\tau_1, u_2))\| + \|(v(\tau_1, u_2) - v(\tau_2, u_2))\| = \\
&= \|u_1 - u_2\| + \|(v(\tau_1, u_2) - v(\tau_2, u_2))\|
\end{aligned}
\tag{5.49}
$$

Так как $|\frac{d}{dt}v(t, u)| = \|h\| = 1$ то $\|(v(\tau_1, u_2) - v(\tau_2, u_2))\| = \tau_2 - \tau_1$ и

$$
\|Pu_1 - Pu_2\| \le \|u_1 - u_2\| + (\tau_2 - \tau_1) \tag{5.50}
$$

Аналогично с (5.44) мы можем оценить

$$
\begin{aligned}
&|G(v(\tau_1, u_1)) - G(v(\tau_1, u_2))| \le \|(v(\tau_1, u_1) - v(\tau_1, u_2)\|(\|G'(u_0)\| + \epsilon) = \\
&= \|u_1 - u_2\|(\|G'(u_0)\| + \epsilon)
\end{aligned}
\tag{5.51}
$$

и, так как $G(v(\tau_1, u_1)) = 0$, то

$$
|G(v(\tau_1, u_2))| \le \|u_1 - u_2\|(\|G'(u_0)\| + \epsilon) \tag{5.52}
$$

Значение $|G(v(t, u_2))|$ на интервале $t \in [\tau_1, \tau_2]$ уменьшается до нуля, со скоростью (в силу (5.36)) не менее $\|G'(u_0)\| - \epsilon$, поэтому

$$
\tau_2 - \tau_1 \le \frac{|G(v(\tau_1, u_2))|}{\|G'(u_0)\| - \epsilon} \le \frac{\|G'(u_0)\| + \epsilon}{\|G'(u_0)\| - \epsilon}\|u_1 - u_2\| \tag{5.53}
$$

$$
(5.50) \ \Rightarrow \|Pu_1 - Pu_2\| \le \left(1 + \frac{\|G'(u_0)\| + \epsilon}{\|G'(u_0)\| - \epsilon}\right)\|u_1 - u_2\| \tag{5.54}
$$

$\square$

5.4.2 Существование локального решения задачи Коши для полугруппы U_t, не выходящего из $\partial\Omega$

Теорема 5.4.3. *Пусть X - банахово пространство, $\Omega \subset X$ его открытое подмножество. Пусть в некоторой окрестности $B_r(u_0)$ точки $u_0 \in \partial\Omega$*

граница $\partial\Omega$ локально гладко задана функционалом $G\colon B_r(u_0) \mapsto \mathbb{R}$, причем производная $G'(x)$ на $B_r(u_0)$ существует, непрерывна, удовлетворяет условию Липшица с константой $K_{G'} < \infty$ и

1. *либо $G'(x)$ не обращается в ноль на $\partial\Omega \cap B_r(u_0)$,*
2. *либо для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ в которой $G'(x_0) = 0$ в любой сколь угодно малой ее окрестности найдется точка $x \in \partial\Omega$ такая что $G'(x) \neq 0$.*

Пусть отображение $f\colon B_r(u_0) \mapsto X$, на $B_r(u_0)$ непрерывно и удовлетворяет условию Липшица с константой $K_f < \infty$ и пусть

$$\forall u_\Gamma \in \partial\Omega \cap B_r(u_0) \ : \ G'(u_\Gamma)f(u_\Gamma) = 0 \tag{5.55}$$

Тогда на некотором достаточно малом интервале времени $t \in [-\eta, \eta]$ существует единственное решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{5.56}$$

причем $\forall t \in [-\eta, \eta]\colon u(t) \in \partial\Omega$.

Доказательство. Мы можем считать что $G'(u_0) \neq 0$, в противном случае заменим u_0 на некоторую другую точку $\tilde{u}_0 \in \partial\Omega \cap B_r(u_0)$ такую что $G'(\tilde{u}_0) \neq 0$, которая найдется по условиям теоремы. Определим согласно (5.41)-(5.42) для некоторых $\epsilon > 0, \delta_P < \delta < r$ оператор локальной проекции

$$P_{pt} = P_{pt}(\epsilon, \delta, \delta_P) \ : \ \overline{B}_{\delta_P}(u_0) \ \mapsto \ \partial\Omega \cap \overline{B}_\delta(u_0) \tag{5.57}$$

Для данных $\eta > 0, \delta > 0$ определим пространство $Y_{\eta,\delta} = C([-\eta, \eta], \overline{B}_\delta(u_0))$ непрерывных отображений отрезка $[-\eta, \eta]$ в замкнутую окрестность $\overline{B}_\delta(u_0)$, со стандартной sup-нормой

$$\forall y \in Y_{\eta,\delta} \ : \ \|y\| = \sup_{-\eta \le t \le \eta} \|y(t)\| \tag{5.58}$$

относительно которой это пространство полно. Определим действующий на пространстве $Y_{\eta,\delta}$ оператор F:

$$\forall y \in Y_{\eta,\delta} \ : \ (F(y))(t) = u_0 + \int_0^t f(y(s))ds \tag{5.59}$$

Выберем η таким чтобы оператор F отображал $Y_{\eta,\delta}$ в Y_{η,δ_P}: пусть

$$M_{f,\delta} = \sup_{x \in \overline{\Omega} \cap \overline{B}_\delta(u_0)} \|f(x)\| \tag{5.60}$$

В силу липшицевости f на $\overline{B}_\delta(u_0)$, $M_{f,\delta} < \infty$. Тогда $\forall y \in Y_{\eta,\delta}, \forall t \in [-\eta, \eta]$:

$$\|(F(y))(t) - u_0\| = \left\| \int_0^t f(u(s))ds \right\| \le \eta \cdot M_{f,\delta} \tag{5.61}$$

и при $\eta \leq \delta_P/M_{f,\delta}$ оператор F отображает $Y_{\eta,\delta}$ в Y_{η,δ_P}. Определим пространство

$$Z_{\eta,\delta} = C([-\eta,\eta], \partial\Omega \cap \overline{B}_\delta(u_0)) \tag{5.62}$$

непрерывных отображений отрезка $[-\eta,\eta]$ в $\partial\Omega \cap \overline{B}_\delta(u_0))$, с той же sup-нормой. Это пространство локальных траекторий в окрестности $\overline{B}_\delta(u_0)$, следующих по поверхности $\partial\Omega$. Применив оператор локального проектирования P_{pt} поточечно к точкам траекторий отображений $y \in Y_{\eta,\delta_P}$, мы получим оператор P проектирования траекторий:

$$\begin{aligned} & P \,:\, Y_{\eta,\delta_P} \mapsto Z_{\eta,\delta} \\ & \forall y \in Y_{\eta,\delta_P} \,:\, (P(y))(t) = P_{pt}(y(t)) \end{aligned} \tag{5.63}$$

Так как

$$F \,:\, Y_{\eta,\delta} \mapsto Y_{\eta,\delta_P} \tag{5.64}$$

$$\text{и } Z_{\eta,\delta} \subset Y_{\eta,\delta} \tag{5.65}$$

то можно корректно определить оператор H:

$$H \,:\, Y_{\eta,\delta_P} \mapsto Y_{\eta,\delta_P} \tag{5.66}$$

$$H = F \circ P \tag{5.67}$$

Выберем $\eta > 0$ таким чтобы оператор H был сжимающим. Для $y_1, y_2 \in Y_{\eta,\delta_P}$ имеем оценку:

$$\|Py_1 - Py_2\| = \sup_{-\eta \leq t \leq \eta} \|(Py_1)(t) - (Py_2)(t)\| \leq \tag{5.68}$$

$$\leq \sup_{-\eta \leq t \leq \eta} K_P \|y_1(t) - y_2(t)\| \leq K_P \|y_1 - y_2\| \tag{5.69}$$

где K_P - константа Липшица для оператора P_{pt} локального проектирования. Для $z_1, z_2 \in Z_{\eta,\delta}$ имеем оценку:

$$\|Fz_1 - Fz_2\| = \sup_{-\eta \leq t \leq \eta} \left\| \int_0^t (f(z_1(s)) - f(z_2(s)))\, ds \right\| \leq \tag{5.70}$$

$$\leq \eta \cdot K_f \cdot \sup_{-\eta \leq t \leq \eta} \|z_1(t) - z_2(t)\| = \eta K_f \|z_1 - z_2\| \tag{5.71}$$

Поэтому для $y_1, y_2 \in Y_{\eta,\delta_P}$ можно оценить

$$\|Hy_1 - Hy_2\| = \|FPy_1 - FPy_2\| \leq \eta K_f \|Py_1 - Py_2\| \leq \eta K_f K_P \|y_1 - y_2\| \tag{5.72}$$

и при $\eta < 1/(K_f K_P)$ оператор H - сжимающий. Так как H отображает замкнутое множество Y_{η,δ_P} в себя, то он имеет единственную неподвижную точку $y = (Hy) \in Y_{\eta,\delta_P}$.

Введем полунорму

$$\|y\|_G = \sup_{-\eta \leq t \leq \eta} |G(y(t))| \tag{5.73}$$

Мы покажем что для достаточно малых $\eta > 0$ выполняется $\|y\|_G = 0$.

Обозначим $z = P(y), z \in Z_{\eta,\delta}$. Тогда $y = Hy = FPy = Fz$ то есть

$$\begin{cases} y = Fz \\ z = Py \end{cases} \tag{5.74}$$

В силу неравенства (5.45) имеем $\forall t \in [-\eta, \eta]$:

$$\|y(t) - z(t)\| = \|y(t) - P_{pt}(y(t))\| \leq \frac{|G(y(t))|}{\|G'(u_0)\| - \epsilon} \tag{5.75}$$

$$\text{откуда } \|y - z\| \leq \frac{\|y\|_G}{\|G'(u_0)\| - \epsilon} \tag{5.76}$$

Так как $y = Fz$, то есть $y(t) = u_0 + \int_0^t f(z(s))ds$ и $u_0 \in \partial\Omega \Rightarrow G(u_0) = 0$ то

$$G(y(t)) = G(y(t)) - G(u_0) = \int_0^t \left(\frac{d}{ds} G(y(s))\right) ds = \int_0^t G'(y(s))f(z(s))ds$$

$$|G(y(t))| = \left|\int_0^t G'(y(s))f(z(s))ds\right| \leq \int_0^t |G'(y(s))f(z(s))|ds \tag{5.77}$$

В силу того что $G'(x)$ удовлетворяет на $B_r(u_0) \supset \overline{B}_\delta(u_0)$ условию Липшица с константой $K_{G'} < \infty$ мы можем оценить

$$\begin{aligned} &\|G'(y(s)) - G'(z(s))\| \leq K_{G'}\|y(s) - z(s)\| \leq \\ &\leq K_{G'}\|y - z\| \leq \{\text{см. } (5.76)\} \leq \frac{K_{G'}}{\|G'(u_0)\| - \epsilon}\|y\|_G \end{aligned} \tag{5.78}$$

Так как $\forall s \in [-\eta, \eta] \ : \ z(s) \in \partial\Omega$ то по условию теоремы (5.55)

$$\forall s \in [-\eta, \eta] \ : \ G'(z(s))f(z(s)) = 0$$

. Поэтому можно оценить

$$\begin{aligned} &|G'(y(s))f(z(s))| = |(G'(y(s)) - G'(z(s)))\, f(z(s))| \leq \\ &\leq \|G'(y(s)) - G'(z(s))\|\|f(z(s))\| \leq \{\text{см. } (5.78)\} \\ &\leq \frac{K_{G'}}{\|G'(u_0)\| - \epsilon}\|y\|_G\|f(z(s))\| \leq \frac{K_{G'} \cdot M_{f,\delta}}{\|G'(u_0)\| - \epsilon}\|y\|_G \end{aligned} \tag{5.79}$$

Теперь оценка (5.77) запишется как

$$\begin{aligned} &|G(y(t))| \leq \int_0^t \frac{K_{G'} \cdot M_{f,\delta}}{\|G'(u_0)\| - \epsilon}\|y\|_G ds \leq |t| \cdot \frac{K_{G'} \cdot M_{f,\delta}}{\|G'(u_0)\| - \epsilon}\|y\|_G \ \Rightarrow \\ &\|y\|_G = \sup_{-\eta \leq t \leq \eta} |G(y(t))| \ \leq \ \eta \cdot \frac{K_{G'} \cdot M_{f,\delta}}{\|G'(u_0)\| - \epsilon}\|y\|_G \end{aligned} \tag{5.80}$$

Если взять $\eta > 0$ такое что

$$\eta \cdot \frac{K_{G'} \cdot M_{f,\delta}}{\|G'(u_0)\| - \epsilon} = q < 1 \tag{5.81}$$

то мы получаем $\|y\|_G \le q \cdot \|y\|_G$ где $0 < q < 1$, что возможно только в случае $\|y\|_G = 0$. В этом случае все точки траектории $y(t), t \in [-\eta, \eta]$ принадлежат поверхности $\partial\Omega$ и $y = z$. Следовательно, в силу (5.74) выполняется $y = Fz = Fy$, то есть y удовлетворяет интегральному уравнению $y = Fy$ а значит, является решением задачи Коши (5.56). Таким образом, мы доказали существование локального решения задачи Коши (5.56), которое не выходит из $\partial\Omega$. Это решение определено на интервале времени $t \in [-\eta, \eta]$ где

$$0 < \eta < \min\{\frac{\delta_P}{M_{f,\delta}}, \frac{1}{K_f K_P}, \frac{\|G'(u_0)\| - \epsilon}{K_{G'} \cdot M_{f,\delta}}\} \tag{5.82}$$

□

5.5 Существование глобального решения задачи Коши, корректно определяющего полугруппу сдвигов на пространстве $C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y)$

В силу теоремы 5.1.1, мы получаем:

Теорема 5.5.1. *Пусть условия теоремы 5.4.3 выполнены в каждой точке границы $u_0 \in \partial\Omega$, а отображение $f \in C(\overline{\Omega}, X)$ удовлетворяет на всем множестве $\overline{\Omega}$ условию Липшица с некоторой константой $K_f < \infty$. Тогда общая формула (5.10)*

$$(T_t\varphi)(x) = \varphi(U(t, x))$$

(где $U(t, x)$ - решение задачи Коши (5.11)) корректно определяет полугруппу, которая служит решением краевой задачи для полугруппы неоднородного сдвига (5.3)-(5.5), определенную на пространстве $C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y)$ непрерывных ограниченных отображений удовлетворяющих краевому условию (5.1).

Доказательство. Так как условия теоремы 5.4.3 выполнены в каждой точке границы $u_0 \in \partial\Omega$, то по теореме (5.1.1) мы получаем что для всех начальных значений $x_\Gamma \in \partial\Omega$ существует неограниченное во времени решение задачи Коши (5.11), причем выполняется условие (5.14)

$$\forall x_\Gamma \in \partial\Omega, \forall t \ge 0 \; : \; U(t, x_\Gamma) \in \partial\Omega$$

которое обеспечивает инвариантность множества $\partial\Omega$ к действию преобразований U_t.

Так как все локальные решения задачи Коши с начальными значениями $x_\Gamma \in \partial\Omega$ остаются в $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$ и f удовлетворяет условию Липшица на всем $\overline{\Omega}$, то применима теорема 3.4.2 и можно утверждать что для любого начального значения $x \in \overline{\Omega}$ в течении любого конечного отрезка времени $[0, T]$ существует непрерывно дифференцируемое решение задачи Коши $\frac{d}{dt}U(t,x) = f(U(t,x)),\ U(0,x) = x$, не выходящее из $\overline{\Omega}$. Согласно предложению 2.7.1 это означает что

1. отображение $U(t,x)$ определяет однопараметрическую полугруппу, отображающую $\overline{\Omega}$ в себя
2. $Dom(A_U) = \overline{\Omega}$ и $\forall x \in \overline{\Omega}$: $A_U(x) = f(x)$

то есть выполнены предположения (5.7)-(5.8). Покажем что выполнено также предположение (5.9):

$$\forall \varphi \in C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y),\ \forall t \geq 0 \ :\ \varphi(U(t,\cdot)) \in C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y)$$

Для этого рассмотрим его в эквивалентной форме (5.12):

$$\left(\varphi(U(t,\cdot)) \in C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y)\right) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \varphi(U(t,\cdot)) \in C^0_b(\overline{\Omega}, Y) \\ \forall x_\Gamma \in \partial\Omega \ :\ \varphi(U(t, x_\Gamma)) = 0 \end{cases}$$

Пусть $\varphi \in C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y)$. Так как f удовлетворяет условию Липшица на всем $\overline{\Omega}$, то применима теорема 3.5.1, из которой следует что отображение $U(t,x)$ непрерывно по переменной x на $x \in \overline{\Omega}$ и, следовательно, отображение $\varphi(U(t,x))$ непрерывно по переменной x. Так как $U(t,x) \in \overline{\Omega}$ и $\varphi(x)$ ограничена на $x \in \overline{\Omega}$ то $\varphi(U(t,x))$ также ограничена на $x \in \overline{\Omega}$. Следовательно выполняется $\varphi(U(t,\cdot)) \in C^0_b(\overline{\Omega}, Y)$. Так как множество $\partial\Omega$ инвариантно к преобразованиям U_t, то выполняется и второе условие $\forall x_\Gamma \in \partial\Omega \ :\ \varphi(U(t, x_\Gamma)) = 0$. Следовательно, выполнено третье предположение (5.9).

Итак, выполнены все три предположения следствия 2.6.3, следовательно, верно утверждение следствия о том что общая формула (5.10)

$$(T_t\varphi)(\cdot) = \varphi(U(t,\cdot))$$

(где $U(t,x)$ - решение задачи Коши (5.11)) корректно определяет полугруппу, которая служит решением краевой задачи для полугруппы неоднородного сдвига (5.3)-(5.5), определенную на пространстве $C^0_{b,\partial\Omega=0}(\overline{\Omega}, Y)$ непрерывных ограниченных отображений, удовлетворяющих краевому условию (5.1). $\square$

5.6 Пример полугруппы неоднородного сдвига, определенной на множестве отображений Φ, которое не является линейным пространством

В обоих рассмотренных случаях область определения $\Phi = Dom(T_t)$ полугруппы неоднородного сдвига являлась линейным пространством:

$$\Phi = C_b^0(\overline{\Omega}, Y) \tag{5.83}$$

$$\Phi = C_{b,\partial\Omega=0}^0(\overline{\Omega}, Y) \tag{5.84}$$

Покажем что можно определить полугруппу неоднородного сдвига на множестве отображений Φ, которое незамкнуто относительно линейных операций над его элементами.

Пусть как и ранее X, Y - банаховы пространства, $\Omega \subset X$ - открытое множество в X. Пусть задано непрерывное отображение $\psi : \partial\Omega \mapsto Y$. Зададим область определения полугруппы неоднородных сдвигов T_t следующим образом:

$$Dom(T_t) = \Phi_\psi = \left\{\varphi \in C_b^0(\overline{\Omega}, Y) \,|\forall x_\Gamma \in \partial\Omega : \varphi(x_\Gamma) = \psi(x_\Gamma)\right\} \tag{5.85}$$

Если ψ принимает ненулевое значение хотя бы в одной точке $x_\Gamma \in \partial\Omega$, то множество отображений Φ_ψ незамкнуто относительно линейных операций над его элементами.

Пусть непрерывное отображение $f : \overline{\Omega} \mapsto X$ таково что выполнены условия теоремы 5.5.1, и поэтому для полугруппы $U(t, x)$ определенной как решение задачи Коши (5.11) выполняется условие (5.14)

$$\forall x_\Gamma \in \partial\Omega, \forall t \geq 0 : U(t, x_\Gamma) \in \partial\Omega$$

Пусть кроме того отображение f таково, что выполняется условие

$$\forall x_\Gamma \in \partial\Omega, \forall t \geq 0 : \psi(U(t, x_\Gamma)) = \psi(x_\Gamma) \tag{5.86}$$

Легко привести пример когда условие (5.86) выполняется:
Пусть $\partial\Omega$ - поверхность тора в $\mathbb{R}^3$, и точка $x_\Gamma \in \partial\Omega$ задается двумя углами θ_1, θ_2. Пусть поле направлений f, касательное к поверхности тора, таково, что траектории $U(t, x_\Gamma)$ при фиксированном $x_\Gamma \in \partial\Omega$ движутся вдоль линий $\theta_1 = const$. И пусть значения функции $\psi(\theta_1, \theta_2)$ не зависят от θ_2. Тогда условие (5.86) выполнено.

В случае выполнения условия (5.86), верно включение

$$\forall \varphi \in \Phi_\psi, \forall t : \varphi(U(t, \cdot)) \in \Phi_\psi \tag{5.87}$$

(тот факт что отображение $\varphi(U(t, x))$ непрерывно по x и ограничено на $x \in \overline{\Omega}$ устанавливается так же как и в теореме 5.5.1) то есть выполнено условие (2.18) следствия 2.5.2 и, следовательно, однопараметрическое семейство отображений $T(t,\varphi)$ определенное по формуле

$$\forall t \geq 0, \forall \varphi \in \Phi_\psi \ : \ (T_t\varphi)(\cdot) = \varphi(U(t,\cdot)) \tag{5.88}$$

определяет однопараметрическую полугруппу, отображающую множество отображений Φ_ψ в себя.

Литература

[1] Бутко Я.А. Формулы Феймана и функциональные интегралы для описания эволюционных систем [Рукопись]. — М.: Математический сборник [принято к печати — 2013].

[2] Далецкий Ю.Л. Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 536 с.

[3] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: УРСС, 2004. — 392 с.

[4] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — изд. четвёртое, переработанное. — М.: Наука, 1976. — 544 с.

[5] Engel K.J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. — NY.: Springer-Verlag, 2000. — 586 с.

[6] Hunter J. K. Nonlinear evolution equations. — 1996 — 76 с. [Электронный ресурс]. URL: http://www.math.ucdavis.edu/~hunter/notes/nonlinev.pdf (дата обращения: 22.03.2013).

[7] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — NY.: Springer-Verlag, 1983. — 279 с.

[8] Hille E., Phillips R.S. Functional analysis and semi-groups. — AMS, 1957. — 808 с.