Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Я.А. Киндеркнехт

ЛЕКЦИИ ПО КУРСУ
“УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ”.
ЧАСТЬ I.

Москва
2012

В настоящей работе изложены некоторые теоретические сведения, необходимые при изучении курса “Уравнения математической физики”, читаемого автором на факультетах ИУ и РЛ. В частности, рассмотрена теория обобщённых функций, представлены свойства интегральных преобразований Фурье и Лапласа. Показано применение обобщённых функций и интегральных преобразований для решения различных задач математической физики (метод интегральных преобразований, метод функции Грина). Наряду с классическими представлены также некоторые новые подходы к решению задач математической физики (метод формул Фейнмана).

Оглавление

Введение

Функциональный анализ — это математический аппарат современных исследований уравнений математической физики. Язык функционального анализа позволяет изложить методы решений задач математической физики в наиболее ясном и чётком виде.

В настоящей работе приведены основные теоретические сведения из некоторых разделов функционального анализа (обобщённые функции, интегральные преобразования Фурье и Лапласа, теория полугрупп операторов) и показано их применение к решению различных задач математической физики (метод интегральных преобразований, метод функции Грина, метод формул Фейнмана). Некоторые доказательства утверждений, изложенных в настоящем пособии, могут быть найдены в книгах [1]—[11]. В частности, теория обобщенных функций излагается в книгах [1], [3], [7]; интегральные преобразования Фурье и Лапласа — в книгах [1], [2], [3], [4], [7], [11]; понятие фундаментального решения оператора и метод функции Грина в различной мере описываются в [1], [5], [6], [8], [9], [10].

Настоящая работа предназначена в основном для студентов факультетов ИУ и РЛ МГТУ им. Н.Э. Баумана в помощь при изучении курса уравнений математической физики.

Глава 1

Обобщенные функции

1.1 Предпосылки для появления обобщенных функций

Обобщенные функции — это обобщение классического понятия функции, которое позволяет придать строгий математический смысл таким физическим понятиям, как плотность точечного заряда, интенсивность мгновенного источника, плотность точечной массы и т.п. С другой стороны, в понятии обобщенной функции находит отражение и тот факт, что реально нельзя измерить, например, плотность вещества в точке, можно измерить лишь среднюю плотность в достаточно малой окрестности этой точки.

Пример 1. Попытаемся определить плотность, создаваемую материальной точкой массы 1. Логично предположить, что если мы рассмотрим плотность единичной массы, равномерно распределенной в шаре радиуса $\varepsilon > 0$, а потом устремим ε к нулю, то и получим искомое. Итак, пусть наша точка совпадает с началом координат. Будем рассматривать одномерный случай для упрощения выкладок, т.е. вместо шара — отрезок.

Плотность единичной массы, равномерно распределенной по отрезку имеет вид: $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon},\ x \in [-\varepsilon, +\varepsilon] \\ 0,\ x \notin [-\varepsilon, +\varepsilon] \end{cases}$ причем сама масса m равна $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)dx = 1$.

Теперь надо найти $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x)$. Для этого надо ввести понятия расстояния и сходимости на множестве функций. С такой проблемой мы уже сталкивались при изучении функциональных рядов, при этом определялись различные виды сходимости:

Определение (поточечной сходимости). Функция f является поточечным пределом последовательности функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на множестве Ω, если для любого $x \in \Omega$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, равный числу $f(x)$; то есть $\forall\varepsilon > 0$ и $\forall x \in \Omega$ $\exists N_\varepsilon(x) \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon$ выполняется оценка $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Определение (равномерной сходимости). Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно к функции f на множестве Ω, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} :$ $\forall n > N_\varepsilon$ оценка $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ выполняется сразу для всех $x \in \Omega$. Или, что то же самое, $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} :$ $\forall n > N_\varepsilon$ выполняется оценка $\sup\limits_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Для обозначения равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ к функции f на множестве Ω обычно используется обозначение $f_n \overset{\Omega}{\rightrightarrows} f$. Очевидно, что если последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно на Ω, то она сходится и поточечно. Однако, как показывает следующий пример, обратное утверждение неверно.

Пример. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) =$

$\begin{cases} 1,\ x \le 0 \\ -nx+1,\ x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0,\ x \ge \frac{1}{n} \end{cases}$ и функцию $f(x) = \begin{cases} 1,\ x \le 0 \\ 0,\ x > 0 \end{cases}$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ числовая последовательность $f_n(x)$ сходится к числу $f(x)$, так как $\forall x \in \mathbb{R}_+$ можно найти такой номер $N(x) \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N(x)\ f_n(x) = 0$. Но чем ближе x к точке 0, тем больший номер $N(x)$ надо брать. Натурального числа N, подходящего сразу для всех $x \in (0; \infty)$, не существует. Тем самым, рассмотренная последовательность сходится к своему пределу поточечно, но не равномерно. Кроме того, в курсе математического анализа доказывалось, что равномерный предел последовательности непрерывных функций есть непрерывная функция. Так как наша f разрывная, то равномерная сходимость места не имеет.

Вернемся к примеру 1 и найдем поточечный предел последовательности функций $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon},\ x \in [-\varepsilon, +\varepsilon] \\ 0,\ x \notin [-\varepsilon, +\varepsilon] \end{cases}$. Обозначим $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = \delta(x)$. Тогда: $\delta(x) = \begin{cases} +\infty,\ x = 0 \\ 0,\ x \ne 0 \end{cases}$, так как $\frac{1}{2\varepsilon} \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$. Но $\delta(x)$ должна играть роль плотности единичной массы, то есть должно выполняться равенство $\int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x)dx = 1$. Однако этого быть не может, так как по определению интеграла Римана $\int\limits_{\Omega} \delta(x)dx = 0$, если $0 \notin \Omega$, а если $0 \in \Omega$, то интеграл не существует!

Что же мы имеем с точки зрения функционального анализа? Есть некоторое пространство E, например, множество всех локально абсолютно интегрируемых функций (f — локально абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, если для любого отрезка $[a, b]$ выполняется: $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$). Каждая из функций $f_\varepsilon(x)$ является элементом пространства E. Но последовательность f_ε не имеет предела, который бы являлся элементом этого пространства, какую бы из известных нам уже сходимостей мы ни рассматривали. Идея: найдем пространство функций побольше, так чтобы f_ε принадлежали ему, и введем там подходящее понятие сходимости так, чтобы последовательность $\{f_\varepsilon\}$ имела предел в этом пространстве. Для этого потребуется конструкция пространств основных и обобщенных функций.

1.2 Пространство основных функций

Символом $C^\infty(\mathbb{R})$ будем обозначать множество всех бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций.

Определение. Функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to$ называется финитной, если существует такой отрезок $[a_\varphi, b_\varphi]$, что $\varphi(x) \equiv 0$ при $x \notin [a_\varphi, b_\varphi]$.

Определение. Пространством основных функций называется множество всех финитных бесконечно дифференцируемых функций. Обозначается символом $D(\mathbb{R})$. Таким образом, $D(\mathbb{R}) = \{\, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \varphi(x) \equiv 0$ вне некоторого $[a_\varphi, b_\varphi]\, \}$.

Пример: Рассмотрим функцию:

$$w_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, \ |x| < \varepsilon \\ 0, |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

, $c_\varepsilon =$const. Эта функция очевидно финитная. Она также является бесконечно дифференцируемой, так как все односторонние производные любого порядка в точках $x = \pm\varepsilon$ равны нулю. Таким образом, $w_\varepsilon(x)$ — это основная функция. Эта функция иногда называется "шапочкой".

Предложение. Множество основных функций обладает следующими свойствами:

1. Для любых $\varphi, \psi \in D(\mathbb{R})$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ линейная комбинация $(\alpha\varphi + \beta\psi) \in D(\mathbb{R})$, то есть $D(\mathbb{R})$—линейное пространство.

2. Для любых $\varphi \in D(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ их произведение $\varphi\psi \in D(\mathbb{R})$.

3. Для любой $\varphi \in D(\mathbb{R})$ её производная k-го порядка $\varphi^{(k)} \in D(\mathbb{R})$.

4. Для любой $\varphi(x) \in D(\mathbb{R})$ и любого $a \in \mathbb{R}$ сдвиг $\varphi(x-a) \in D(\mathbb{R})$.

С помощью вышеперечисленных свойств, начиная с "шапочки", можно получить некоторые другие основные функции, например, $\varphi(x) = x^2 \sin x w_\varepsilon(x-a) + \frac{d^n(e^x w_\varepsilon(x))}{dx^n}$.

Теперь определим понятие сходимости на множестве основных функций $D(\mathbb{R})$.

Определение. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к φ в $D(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$, если

1. $\exists [a,b] \subset \mathbb{R}\colon\ \varphi_n(x) \equiv 0$ вне $[a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

2. $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\ \varphi_n^{(k)} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi^{(k)}$ при $n \to \infty$.

Таким образом, носители всех элементов последовательности должны лежать на одном общем для всех интервале; и на этом интервале как сама ппоследовательность, так и все её производные должны сходиться равномерно.

Аналогичным оразом определяются пространства $D(\mathbb{R}^n)$, $D(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^n$, и сходимость в них.

1.3 Пространство обобщенных функций.

Определение. Любое отображение F из пространства $D(\mathbb{R})$ в комплексные числа будем называть функционалом на $D(\mathbb{R})$; т.е. $F\colon D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$.

Определение. Функционал $F\colon D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ называется линейным, если $\forall\, \varphi, \psi \in D(\mathbb{R})$ и $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполняется

$$F(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha F(\varphi) + \beta F(\psi).$$

Определение. Функционал $F\colon D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ называется непрерывным, если для любой $\varphi \in D(\mathbb{R})$ и любой последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(\mathbb{R})$, сходящейся к φ в $D(\mathbb{R})$, числовая последовательность $\{F(\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу $F(\varphi)$.

Определение. Множество всех линейных непрерывных функционалов на $D(\mathbb{R})$ называется пространством обобщенных функций; его элементы называются обобщенными функциями. Пространство обобщенных функций обозначается $D'(\mathbb{R})$.

Обобщенные функции — это функции бесконечномерного аргумента, их аргумент φ пробегает бесконечномерное пространство основных функций $D(\mathbb{R})$. Значение функционала F на элементе φ будем обозначать $F(\varphi)$ или (F, φ). Отметим, что пространство обобщенных функций $D'(\mathbb{R})$ строилось по пространству основных функций $D(\mathbb{R})$. Взяв другое пространство основных функций и рассмотрев все линейные непрерывные функционалы на нем, можно получить другое пространство обобщенных функций.

Замечание. Вводя обобщённые функции, мы хотели расширить множество "обычных" функций. Однако, пока мы рассмотрели совсем другие объекты — функции бесконечномерного аргумента $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Если теперь каждому элементу из множества "обычных" функций мы сопоставим некоторый объект из множества обобщённых функций, то и окажется, что "обычные" функции являются частным случаем обобщёных.

Определение (регулярных обобщенных функций). Обозначим множество всех локально абсолютно интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций символом $L_1^{loc}(\mathbb{R})$, то есть $L_1^{loc}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}\, ; \forall\, [a, b] \int\limits_a^b |f(x)|dx < \infty\}$. Отметим, что все непрерывные и некоторые кусочно-непрерывные функции принадлежат этому множеству. Итак, пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$. Сопоставим "обычной" функции f из $L_1^{loc}(\mathbb{R})$ отображение F_f, определенное так:

$$(F_f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *F_f определено для $\forall\varphi \in D(\mathbb{R})$, т.е. F_f— функционал на $D(\mathbb{R})$.*

   Действительно, для любой φ из $D(\mathbb{R})$ существует и конечен $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$, так как $f(x)\varphi(x) \equiv 0$ вне некоторого отрезка $[a, b]$, f - локально интегрируема и

   $\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx\right| < \max_{x\in[a,b]} |\varphi(x)| \cdot \int_a^b |f(x)|dx < \infty.$

2. *F_f— линейный функционал.*

   Действительно, $\forall\varphi, \psi \in D(\mathbb{R})$, $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполняется: $(F_f, \alpha\varphi + \beta\psi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)(\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x))dx = \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx + \beta \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)dx = \alpha(F_f, \varphi) + \beta(F_f, \psi)$.

3. *F_f — непрерывный функционал.*

Действительно, если $\varphi_n \to \varphi$ в $D(\mathbb{R})$, то $\lim_{n\to\infty}(F_f, \varphi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = (F_f, \varphi)$.

Таким образом, любая локально абсолютно интегрируемая функция $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ определяет обобщенную функцию F_f из $D'(\mathbb{R})$. Далее вместо символа F_f будем иногда использовать символ f для обозначения регулярной обобщенной функции, соответствующей "обычной" функции f.

Введём теперь понятие сходимости в пространстве обобщённых функций. Такая сходимость иногда называется слабой.

Определение (слабой сходимости). Функционал $F \in D'(\mathbb{R})$ является (слабым) пределом последовательности функционалов $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D'(\mathbb{R})$, если для любой φ из $D(\mathbb{R})$ выполняется:

$$(F_n, \varphi) \to (F, \varphi) \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, это аналог поточечной сходимости, но в роли точек функции φ из $D(\mathbb{R})$.

Если все F_n и F— регулярные обобщенные функции, то есть каждой F_n соответствует некоторая функция $f_n \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$: $(F_n, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx$, F соответствует функция $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$: $(F, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$ для любой $\varphi \in D(\mathbb{R})$, то определение слабой сходимости имеет вид:

Определение. Функция $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ является слабым пределом функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1^{loc}(\mathbb{R})$, если $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \quad \text{при } \; n \to \infty.$$

Вернемся теперь снова к Примеру 1, в котором мы пытались определить плотность точечной массы. Найдем слабый предел

$\{f_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$. Для любой $\varphi \in D(\mathbb{R})$ имеем $\int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx =$ $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\varphi(x)dx =$ по теореме о среднем $= \frac{1}{2\varepsilon}\varphi(c_\varepsilon)(\varepsilon + \varepsilon) = \varphi(c_\varepsilon)$, где c_ε — некоторая точка из $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Таким образом, для любой φ из $D(\mathbb{R})$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(c_\varepsilon) = \varphi(0).$$

Определим обобщенную функцию δ по формуле: $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$. Тогда δ — слабый предел последовательности $\{f_\varepsilon\}$. Функция δ называется δ-функцией Дирака. Очевидно, что δ действительно является линейным непрерывным функционалом на $D(\mathbb{R})$.

Итак, в пространстве $D'(\mathbb{R})$ обобщенных функций пределом последовательности $\{f_\varepsilon\}$ является обобщенная функция δ. Эта функция не является регулярной обобщенной функцией, т.к. не существует локально интегрируемой функции $\delta(x)$, такой что $\delta(x) = \begin{cases} \infty, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases}$ и $\int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x)dx = 1$.

Тем не менее, по аналогии со случаем регулярных обобщенных функций введем формальную запись: $(\delta, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi(x)dx \, (\equiv \ \varphi(0))$. При этом, формальное выражение $\int\limits_a^b \delta(x)\varphi(x)dx$ будем понимать так:

$$\int\limits_a^b \delta(x)\varphi(x)dx = \begin{cases} \varphi(0),\ 0 \in [a,b] \\ 0,\ 0 \notin [a,b] \end{cases}$$

Функционал δ определен формулой $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ для более широкого класса функций чем $D(\mathbb{R})$ (например, для всех непрерывных на $\mathbb{R}$ функций). В частности, можно рассматривать $\varphi(x) \equiv 1 \, \forall x \in \mathbb{R}$. Тогда $(\delta, \varphi) = (\delta, 1) = 1$. Таким образом,

$(\delta, 1)$ и будем считать массой точечного заряда, так как при нашей формальной записи: $1 = (\delta, 1) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)dx$ — как раз формула для вычисления полной массы по ее плотности. Если в точке $x_0 = 0$ сосредоточена масса m, то ее плотность будем считать равной $m\delta$.

Аналогично, рассмотрим обобщенную функцию δ_{x_0}: $(\delta_{x_0}, \varphi) = \varphi(x_0)$ для любой $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Таким образом, если в точке x_0 сосредоточена масса m, то ее плотность будем считать равной $m\delta_{x_0}$. Будем использовать также обозначение $\delta_{x_0} = \delta(x - x_0)$, что согласуется с введенной ранее формальной записью: $(\delta_{x_0}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \delta_{x_0}(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0) = \int_{\mathbb{R}} \delta(y)\varphi(y + x_0)dy = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0)\varphi(x)dx$. Итак, если в различных точках $x_1, \ldots, x_n$ сосредоточены массы $m_1, \ldots, m_n$, то плотность распределения массы будем считать равной $\sum_{k=1}^{n} m_k \delta(x - x_k)$.

Упражнение. показать, что последовательность "шапочек" $w_\varepsilon(x)$ слабо сходится к δ-функции при $\varepsilon \to 0$, если нормирующая константа c_ε выбрана так, что: $c_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$ и для любого ε выполнено равенство $\int_{\mathbb{R}} w_\varepsilon(x)dx = 1$.

Итак, пространство обобщенных функций $D'(\mathbb{R})$ состоит из регулярных обобщенных функций, соответствующих локально абсолютно интегрируемым обычным функциям, и обобщенных функций, не являющихся регулярными. Такие обобщенные функции называются **сингулярными**. С одной из сингулярных функций мы уже знакомы — это дельта-функция Дирака. Рассмотрим другие примеры сингулярных обобщённых функций.

Пример (сингулярных обобщенных функций). Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является локально интегрируемой, так как не интегрируема ни на каком интервале, содержащем 0. Функции $f(x) = \frac{1}{x}$ можно сопоставить различные сингулярные обобщённые функции. Например, можно рассмотреть слабый предел при $\varepsilon \to 0$ последовательности регулярных функций $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{x+i\varepsilon}$. Эти функции регулярны, так как их особые точки $z = -i\varepsilon$ не лежат на вещественной оси, и поэтому функции локально абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Обозначим $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{1}{x+i0}$.

Кроме того, для любого φ из $D(\mathbb{R})$ можно определить интеграл $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}dx$ в смысле главного значения ($v.p. \int$), такой, что $v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}dx$.

Т.к. $\varphi(x) \equiv 0$ вне некоторого отрезка $[-R; R]$, то $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}dx = v.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}dx = v.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)+\varphi(0)}{x}dx =$ по формуле Лагранжа $= v.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi'(y)x}{x}dx + \varphi(0)\cdot v.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{1}{x}dx$, где y — некоторая точка между 0 и x. Первый интеграл существует в обычном смысле и конечен. А $v.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right)\frac{1}{x}dx = 0$ в силу нечётности $\frac{1}{x}$. Таким образом, для любой основной функции $\varphi \in D(\mathbb{R})$ интеграл $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}dx$ определён и конечен. Значит корректно задана обобщенная функция $\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ по формуле: $\left(\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right) = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}dx$. Линейность функционала $\mathcal{P}$ следует из свойств инеграла, непрерывность надо доказывать отдельно. При этом оказывается, что верна формула Сохоцкого, широко используемая в квантовой физике:

$$\frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Замечание: Аналогичным образом можно определить пространства основных функций $D(\mathbb{R}^n)$ и $D(\Omega)$, Ω — область в $\mathbb{R}^n$, а также соответсвующие пространства обобщенных функций $D'(\mathbb{R}^n)$ и $D'(\Omega)$. В следующей секции мы введём операции на пространсве $D'(\mathbb{R})$, обобщающие аналогичные операции на множестве "обычных" функций. Эти операции можно определить также и в пространствах $D'(\mathbb{R}^n)$ и $D'(\Omega)$.

1.4 Действия над обобщенными функциями.

В этом параграфе мы введём следующие операции на множестве обобщённых функций: сложение и умножение на число, умножение на гладкую функцию, линейная замена переменных, дифференцирование, свёртка. В следующей главе мы определим для обобщённых функций также преобразования Фурье и Лапласа.

Предложение (сложение и умножение на число). Пространство $D'(\mathbb{R})$ является линейным, т.е. $\forall\, F, G \in D'(\mathbb{R})$ и $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ функционал $\alpha F + \beta G$, определённый по формуле $(\alpha F + \beta G, \varphi) = \alpha(F, \varphi) + \beta(G, \varphi)$ $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$, является элементом $D'(\mathbb{R})$.

Отметим, что определение операции взятия линейной комбинации обобщенных функций согласованно с определением линейной комбинации классических функций, т.е., если $f, g \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, то $F_{\alpha f + \beta g} = \alpha F_f + \beta F_g$, где в левой части равенства стоит регулярная обобщённая функция, соответствующая классической линейной комбинации $\alpha f + \beta g$, а в правой части равенства стоит линейная комбинация обобщенных функций, соответствующих классическим функциям f и g.

Пример. Линейная комбинация дельта-функций $\alpha\delta_{x_1} + \beta\delta_{x_2}$ действует так: $(\alpha\delta_{x_1} + \beta\delta_{x_2}, \varphi) = \alpha\varphi(x_1) + \beta\varphi(x_2)$.

Предложение (умножение на гладкую функцию). Если

$\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}), F \in D'(\mathbb{R})$, то $\alpha F \in D'(\mathbb{R})$, где функционал αF определяется по формуле : $(\alpha F, \varphi) = (F, \alpha\varphi)\ \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$.

По свойствам основных функций, если $\varphi \in D(\mathbb{R})$, то и $\alpha\varphi \in D(\mathbb{R})$, а значит выражение $(F, \alpha\varphi)$ определено. Тем самым, функционал αF определён для всех $\varphi \in D(\mathbb{R})$. И снова наше определение согласованно с классическим определением той же операции, т.к. $F_{\alpha f} = \alpha F_f$ для любой $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

Пример. Пусть $\alpha(x) = e^x$. Тогда для $e^x\delta$ и для любой φ из $D(\mathbb{R})$ выполняется: $(e^x\delta, \varphi) = (\delta, e^x\varphi) = e^x\varphi(x)|_{x=0} = e^0\varphi(0) = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$. Таким образом, $e^x\delta \equiv \delta$. Аналогично, для любого $\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ выполняется : $(\alpha\delta, \varphi) = (\delta, \alpha\varphi) = \alpha(0)\varphi(0) = (\alpha(0)\delta, \varphi)$. В частности, для $x\delta$ и для любой φ из $D(\mathbb{R})$ выполняется: $(x\delta, \varphi) = (\delta, x\varphi) = x\varphi(x)|_{x=0} = 0$. Таким образом, $x\delta \equiv 0$ — нуль в пространстве $D'(\mathbb{R})$.

Заметим, что процедуру перемножения двух произвольных обобщённых функций корректно определить не удаётся.

Определение (дифференцирование обобщённых функций). Если $F \in D'(\mathbb{R})$, то ее обобщенной производной назовем элемент F' пространства $D'(\mathbb{R})$, определенный по формуле: $(F', \varphi) = -(F, \varphi')\ \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$.

Проверим корректность определения. По свойствам основных функций если $\varphi \in D(\mathbb{R})$, то и $\varphi' \in D(\mathbb{R})$, т.е. выражение (F, φ') определено при всех $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Проверим согласованность определения с классическим определением дифференцирования. Пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ обладает классической производной $f' \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$. Покажем, что $F_f' = F_{f'}$, т.е. покажем, что обобщенная производная совпадает с классической. Итак, по формуле интегрирования по частям:

$$(F_{f'},\varphi)=\int_{\mathbb{R}}f'(x)\varphi(x)dx=f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi'(x)dx$$

Так как $\varphi,\ \varphi'\in D(\mathbb{R})$, то первое слагаемое равно нулю, а второе равно $-(F_f,\varphi')=(F_f',\varphi)$ в соответствии с нашим определением обобщенной производной. Обобщённую производную F_f' функции f будем иногда обозначать символом $f'_{\text{обобщ}}$, а классическую производную — символом $f'_{\text{класс}}$.

Непосредственно из определения дифференцируемости вытекают следующие утверждения:

Предложение. Любая обобщенная функция $F\in D'(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируема в обобщённом смысле и для любого $n\in\mathbb{N}$ производная $F^{(n)}$ определена по формуле: $(F^{(n)},\varphi)=(-1)^n(F,\varphi^{(n)}),\ \forall\varphi\in D(\mathbb{R})$. Таким образом, все локально абсолютно интегрируемые функции оказываются бесконечно дифференцируемыми в обобщённом смысле.

Предложение. Если последовательность обобщенных функций $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится в $D'(\mathbb{R})$ к обобщенной функции F, то $\forall\ k\in\mathbb{N}$ последовательность производных $\{F_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к $F^{(k)}$.

Следствие. Всякий сходящийся в смысле обобщенных функций ряд (т.е. слабо сходящийся) можно дифференцировать почленно любое число раз, получая сходящийся в этом же смысле ряд.

При решении уравнений математической физики часто возникают функции, не дифференцируемые нужное число раз (например, в виде рядов, которые при дифференцировании расходятся в классическом смысле). Однако в смысле теории обобщенных функций все производные существуют и оказывается, что наши функции удовлетворяют необходимым уравнениям в смысле теории обобщенных функций.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$. Его суммой служит функция, имеющая период 2π и определённая на отрезке $[-\pi,\pi]$ по формуле:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-x}{2},\ x\in(0,\pi],\\ \frac{-\pi-x}{2},\ x\in[-\pi,0),\\ 0,\ x=0.\end{cases}$$

Тогда обобщенная производная f равна: $f'(x) = -\frac{1}{2} + \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(x-2\pi k)$. Это некоторая обобщённая функция из $D'(\mathbb{R})$. С другой стороны, дифференцируя ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ почленно, получим расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)$. Однако, в смысле обобщенных функций он сходится к обобщенной функции $f'(x)=-\frac{1}{2}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(x-2\pi k)$.

Пример. Рассмотрим функцию Хевисайда: $\eta(x)=1$ при $x\geq 0$ и $\eta(x)=0$ при $x<0$. Это локально абсолютно интегрируемая функция, поэтому ей соответствует регулярная обобщенная функция $F_\eta : (F_\eta,\varphi)=\int_0^{+\infty}\varphi(x)dx,\ \forall\ \varphi\in D(\mathbb{R})$. Найдем обобщенную производную функции Хевисайда $F'_\eta\equiv\eta'_{\text{обобщ}}$:

$$(F'_\eta,\varphi)=-(F_\eta,\varphi')=-\int_0^{+\infty}\varphi'(x)dx=-\left.\varphi(x)\right|_0^{+\infty}=\varphi(0),$$

так как $\varphi(+\infty)=0$ в силу финитности φ. Таким образом, $(F'_\eta,\varphi)=\varphi(0)=(\delta,\varphi)$ для любой φ из $D(\mathbb{R})$, то есть $\eta'_{\text{обобщ}}=\delta$, где δ — дельта-функция Дирака. Заметим, что в обычном, классическом смысле производная $\eta(x)$ существует при $x\neq 0$ и $\eta'_{\text{класс}}(x)=0$. В точке $x=0$ классическая производная не определена. Аналогично, обобщённая производная функции $\eta(x-x_0)$ равна $\delta_{x_0}\equiv\delta(x-x_0)$.

Пример. Найдём производную δ-функции. Для любой φ из $D(\mathbb{R})$ по определению: $(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0)$. Аналогично, $(\delta^{(n)}, \varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$.

Исследуем взаимосвязь обобщённых и классических производных подробнее. Пусть дана непрерывная функция $f(x)$: Рассмотрим

$$g(x) = f(x) + a\eta(x - x_0) = \begin{cases} f(x),\ x < x_0, \\ f(x) + a,\ x \geq x_0. \end{cases}$$

Тогда функция g имеет в точке x_0 скачок величины a и непрерывна в остальных точках вещественной оси. Любую кусочно-непрерывную функцию $g(x)$, имеющую лишь конечное число разрывов первого рода, можно представить в виде $g(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k \eta(x - x_k)$, где $f(x)$ — некоторая непрерывная функция, x_k — точки разрыва g, a_k — величины скачков функции g в точках x_k. Тогда:

$g'_{\text{обобщ}} = \{f(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k \eta(x - x_k)\}'_{\text{обобщ}} = \{f\}'_{\text{обобщ}} + \sum_{k=1}^{n} a_k \delta(x - x_k) = f'_{\text{класс}} + \sum_{k=1}^{n} a_k \delta(x - x_k)$.

Если f— кусочно-дифференцируема, то $f'_{\text{обобщ}} = f'_{\text{класс}}$, где $f'_{\text{класс}}$ уже может быть разрывной неограниченной в $x_1, \ldots, x_n$ функцией.

Пример. Найдём вторую обобщённую производную функции

$$g(x) = \begin{cases} x^2,\ x \leq 1, \\ x - 1,\ x > 1. \end{cases}$$

Функцию $g(x)$ можно представить в виде:

$g(x) = f(x) - 1 \cdot \eta(x - 1)$, где $f(x) = \begin{cases} x^2,\ x \leq 1 \\ x,\ x > 1 \end{cases}$ — непрерывная функция. Тогда $g'_{\text{обобщ}} = f'_{\text{обобщ}} - \delta(x - 1)$, а

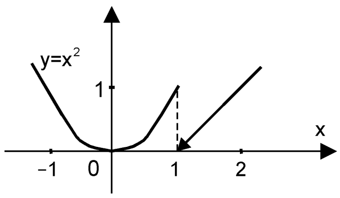

Рис. 1

$$f'_{\text{обобщ}}(x) = f'_{\text{класс}}(x) = \begin{cases} 2x,\ x \leq 1 \\ 1,\ x > 1 \end{cases} = 2x\eta(1-x) + \eta(x-1).$$

Тогда $g'_{\text{обобщ}} = 2x\eta(1-x) + \eta(x-1) - \delta(x-1)$. Аналогично, $g''_{\text{обобщ}} = 2\eta(1-x) + \delta(x-1) - \delta'(x-1)$.

Определение (линейной замены переменых). Введем на множестве обобщённых функций операцию, аналогичную операции линейной замены переменных для "обычных" функций. Для любой функции $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ и любых чисел $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ определена функция $f^{a,b} \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ такая, что

$$f^{a,b}(x) = f(ax+b).$$

Попробуем для любой обобщённой функции F определить "линейную замену переменных" и получить обобщенную функцию $F^{a,b}$ так, чтобы $F_{f^{a,b}} = F_f^{a,b}$ (для согласованности с классическим определением).

Пусть F_f — регулярная обобщенная функция, то есть для любой φ из $D(\mathbb{R})$ выполняется: $(F_f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$. Тогда $F_{f^{a,b}}$ определена следующим образом:

$$(F_{f^{a,b}}, \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}} f(ax+b)\varphi(x)dx.$$

Сделаем в интеграле замену переменных: $ax+b = y$, $x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}$, $dx = \frac{1}{a}dy$. Тогда, если $a > 0$, то изменению x от $-\infty$ до ∞ соответствует изменение y от $-\infty$ до ∞; если $a < 0$, то изменению x от $-\infty$ до ∞ соответствует изменение y от $+\infty$ до $-\infty$. Таким образом,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(ax+b)\varphi(x)dx = \frac{1}{|a|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi\left(\frac{y}{a}-\frac{b}{a}\right)dy = \left(F_f, \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{\cdot}{a}-\frac{b}{a}\right)\right).$$

Итак, $(F_f^{a,b},\varphi) = (F_{f^{a,b}},\varphi) = \left(F_f, \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{\cdot}{a}-\frac{b}{a}\right)\right)$. Эту формулу будем использовать для определения линейной замены переменных и в случае, если обобщенная функция не является регулярной:

$$(F^{a,b},\varphi) = \left(F, \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{\cdot}{a}-\frac{b}{a}\right)\right).$$

В частности, можно определить "сдвиг" на число $b\in\mathbb{R}$:

$$(F^{1,b},\varphi) = (F,\varphi(\cdot - b)).$$

Предложение. $\delta^{a,b} = \frac{1}{|a|}\delta_{\frac{b}{a}}$.

Действительно, по определению,

$$(\delta^{a,b},\varphi) = \left(\delta, \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{\cdot}{a}-\frac{b}{a}\right)\right) = \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x}{a}-\frac{b}{a}\right)\Big|_{x=0} = \\ = \frac{1}{|a|}\varphi\left(-\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{1}{|a|}\delta_{\frac{b}{a}},\varphi\right).$$

Таким образом, в частности, $\delta^{-1,0}=\delta$, т.е. дельта-функция Дирака является "чётной" функцией.

Определение (свёртки). Свёрткой функций $f(x)$ и $g(x)$ называется функция $f*g$, заданная формулой:

$$(f*g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau. \tag{1}$$

Свёртка определена для тех функций f и g, для которых интеграл в правой части последнего равенства существует и конечен при всех $x \in \mathbb{R}$. В частности, свёртка двух абсолютно интегрируемых по $\mathbb{R}$ функций определена и является абсолютно интегрируемой по $\mathbb{R}$ функцией.

Теорема (свойства свёртки). Пусть даны функции f, g, h, такие, что свёртки $f * g$, $f * h$, $g * h$ определены. Тогда выполняются следующие соотношения:

1. **линейность:** $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha(f * h) + \beta(g * h)$ для любых чисел α и β.

2. **симметричность:** $f * g = g * f$.

3. **ассоциативность:** $(f * g) * h = f * (g * h)$.

4. **инвариантность относительно сдвига:**

   $$[f(\cdot) * g(\cdot)](\cdot - \alpha) = [f(\cdot - \alpha) * g(\cdot)](\cdot) = [f(\cdot) * g(\cdot - \alpha)](\cdot).$$

5. **правило дифференцирования свёртки:** если существуют $\frac{d^n}{dx^n}(f * g)$, $\frac{d^n f}{dx^n} * g$, $f * \frac{d^n g}{dx^n}$, то справедливо равенство: $\frac{d^n}{dx^n}(f * g) = \frac{d^n f}{dx^n} * g = f * \frac{d^n g}{dx^n}$.

Свойство линейности свёртки очевидно следует из свойства линейности интеграла. Правило дифференцирования свётки вытекает из формулы интегрирования по чатям. Докажем свойство симметричности свёртки. По определению, $(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(x - \tau) d\tau$. Сделаем в интеграле замену переменных: $x - \tau = y$. Тогда, $\tau = x - y$, $d\tau = -dy$. Следовательно, $(f*g)(x) = -\int\limits_{+\infty}^{-\infty} f(x-y)g(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy = (g*f)(x)$.

Теперь введем операцию свёртки на множестве обобщенных функций. Пусть функции f, g, $f * g \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, то есть F_f, F_g и F_{f*g} — регулярные обобщённые функции. Для согласованности определения операции свёртки обобщенных функций с определением свёртки обычных функций необходимо, чтобы выполнялось равенство $F_f * f_g = F_{f*g}$.

Итак, для любой $\varphi \in D(\mathbb{R})$ имеем:

$$(F_f * F_g, \varphi) = (F_{f*g}, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f * g(x)\varphi(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)g(x-\tau)d\tau\right] \varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau) \left[\int\limits_{\mathbb{R}} g(x-\tau)\varphi(x)dx\right] d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau) \left[\int\limits_{\mathbb{R}} g(t)\varphi(t+\tau)dt\right] d\tau = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(\tau)g(t)\varphi(t+\tau)dtd\tau =$$

$$= (F_{f(\tau)g(t)}, \varphi(t+\tau)),$$

где последнее выражение понимается как действие регулярной обобщенной функции из $D'(\mathbb{R}^2)$, соответствующей "обычной" функции двух переменных $f(\tau)g(t)$, на "основную" функцию $\varphi(t+\tau)$ двух переменных t и τ. Определим свёртку аналогичным образом и для произвольных обобщённых функций.

Определение (свёртки обобщенных функций). Свёрткой обобщённых функций F, G из $D'(\mathbb{R})$ называется (если существует) такая обобщённая функция $F * G$ из $D'(\mathbb{R})$, что для любого $\varphi \in D(\mathbb{R})$ справедива формула:

$$(F * G, \varphi) = (F(\tau)G(t), \varphi(t+\tau)),$$

здесь в правой части формулы записано действие обобщенной функции из $D'(\mathbb{R}^2)$ на "основную" функцию $\varphi(t+\tau)$ двух переменных t и τ, причём символы $F(\tau)$ и $G(t)$ показывают, что обобщенная функция F действует на основную функцию переменной τ, а обобщенная функция G действует на основную функцию переменной t.

Заметим, что, хотя $F(\tau)G(t)$ и задаёт линейный непрерывный функционал на $D(\mathbb{R}^2)$, но функция двух переменных $\varphi(t+\tau)$ уже не принадлежит пространству основных функций $D(\mathbb{R}^2)$, и поэтому выражение $(F(\tau)G(t), \varphi(t+\tau))$ имеет смысл лишь для тех обобщённых функций F, G из $D'(\mathbb{R})$, для которых все функции $\varphi(t+\tau)$ входят в область определения функционала $F(\tau)G(t)$. Таким образом, свёртка определена на для всех обобщённых функций. Отметим, что для тех обобщённых функций, для которых свёртка определена, все свойства свёртки, кроме ассоциативности, сохраняются.

Пример. Для любой обобщенной функции $F \in D'(\mathbb{R})$ справедливо равенство $\delta * F = F * \delta = F$. Действительно, $(\delta * F, \varphi) = (\delta(\tau)F(t), \varphi(t+\tau)) = (F(t), \varphi(t+0)) = (F, \varphi)$.

Для некоторых обобщенных функций можно определить и другие операции, такие как преобразование Фурье и преобразование Лапласа. Эти операции мы рассмотрим в следующей главе.

1.5 Многомерные аналоги δ-функции Дирака

Аналогично $D(\mathbb{R})$ и $D'(\mathbb{R})$ можно определить пространства основных и обобщенных функций $D(\mathbb{R}^n)$ и $D'(\mathbb{R}^n)$, $D(\Omega)$ и $D'(\Omega)$ для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. При этом, $D(\Omega)$ — это множество всех бесконечно дифференцируемых по каждому из аргументов функций, каждая из которых обращается в нуль вне некоторого замкнутого и ограниченного подмножества Ω. Понятие дельта-функции Дирака и её производных можно распространить на случай нескольких переменных различными способами. Рассмотрим некоторые из возможных вариантов.

1. δ-функция, сосредоточенная в точке.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ некоторая точка пространства. Для любого φ из $D(\mathbb{R}^3)$ определим δ_{M_0} так:

$$(\delta_{M_0}, \varphi) = \varphi(M_0).$$

Как и ранее, можно ввести формальную запись $(\delta_{M_0}, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \delta_{M_0}(x, y, z)\varphi(x, y, z)dxdydz \equiv \varphi(M_0)$.

2. δ-функция, сосредоточенная на поверхности ("простой слой").

Пусть S- кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность в $\mathbb{R}^3$. Для любого φ из $D(\mathbb{R}^3)$ определим δ_S так:

$$(\delta_S, \varphi) \equiv \iint\limits_S \varphi(x, y, z)dS,$$

где в правой части равенства стоит поверхностный интеграл первого рода по поверхности S.

Тогда, если S имеет конечную площадь, то $(\delta_S, 1) = \iint_S dS = |S|$ — площадь поверхности S. Снова можно ввести формальную запись: $(\delta_S, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \delta_S(x, y, z)\varphi(x, y, z)dxdydz \equiv \iint\limits_S \varphi(x, y, z)dS$. При этом, как и в случае одномерной δ-функции, можно считать, что для δ_S выполняются соотношения: $\delta_S(M) = \begin{cases} +\infty, \ M(x, y, z) \in S \\ 0, \ M \notin S \end{cases}$ и $\frac{1}{|S|}\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta_S(x, y, z)dx\, dy\, dz = 1$. Таким образом, функция $\frac{1}{|S|}\delta_S$ играет роль плотности единичной массы или единичного заряда, сосредоточенных на поверхности S.

Пример. Пусть S— плоскость $x = x_0$, тогда в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно рассматривать функцию $\delta_{x_0} = \delta(x - x_0)$:

$$(\delta_{x_0}, \varphi(x,y,z)) = \iint_{S:\, x=x_0} \varphi(x,y,z)dS =$$
$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x_0,y,z)dydz = \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(x-x_0)\varphi(x,y,z)dxdydz$$

Упражнение. Показать, что $\delta_{M_0} = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$.

Пример: Введём в $\mathbb{R}^3$ цилиндрическую систему координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = h, \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{cases} 0 \le \rho < \infty, \\ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ h \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Можно рассматривать $\delta_{\varphi_0} = \delta(\varphi-\varphi_0)$, $\delta_{\rho_0} = \delta(\rho-\rho_0), \delta_{h_0} = \delta(h-h_0)$ для поверхностей $S : \varphi = \varphi_0$ или $\rho = \rho_0$, или $h = h_0$. При этом, $\delta_{M_0} = \frac{1}{\rho}\delta_{\varphi_0}\delta_{\rho_0}\delta_{h_0}$, где точка $M_0(x_0,y_0,z_0) = M_0(\varphi_0,\rho_0,h_0)$. Множитель $\frac{1}{\rho}$ возникает из-за якобиана замены переменных в тройном интеграле.

Пример. Введём в $\mathbb{R}^3$ сферическую систему координат:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{cases} 0 \le r < \infty, \\ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ 0 \le \theta < \pi. \end{cases}$$

Аналогично можно рассматривать $\delta_{\varphi_0}, \delta_{\theta_0}, \delta_{r_0}$ для поверхностей $S : \varphi = \varphi_0$ или $\theta = \theta_0$, или $r = r_0$. При этом, $\delta_{M_0} = \frac{1}{r^2}\delta(r-r_0)\frac{1}{\sin\theta}\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$, где $M_0(x_0,y_0,z_0) = M_0(r_0,\varphi_0,\theta_0)$. И вновь множитель $\frac{1}{r^2\sin\theta}$ возникает из-за якобиана замены переменных в тройном интеграле.

3. δ-функция, сосредоточенная на кривой.

Пусть γ — кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$. Для любого φ из

$D(\mathbb{R}^3)$ определим δ_γ так:

$$(\delta_\gamma, \varphi) \equiv \int\limits_\gamma \varphi(x, y, z) d\gamma,$$

где в правой части равенства стоит криволинейный интеграл первого рода по кривой γ.

Аналогично предыдущим случаям, если кривая γ имеет конечную длину, то $(\delta_\gamma, 1) = \int\limits_\gamma d\gamma = |\gamma|$ — длина кривой γ; $\delta_\gamma(M) = \begin{cases} +\infty, \ M(x, y, z) \in \gamma \\ 0, \ M \notin \gamma \end{cases}$, $\frac{1}{|\gamma|}\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta_\gamma(x, y, z) dx\, dy\, dz = 1$, то есть функция $\frac{1}{|\gamma|}\delta_\gamma$ играет роль единичного заряда (или единичной массы), сосредоточенного на кривой γ.

Пример. Пусть кривая γ задается уравнениями: $y = y_0$, $x = x_0$ (то есть γ — это прямая). Тогда $\delta_\gamma = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$.

4. Нормальная производная δ-функции ("двойной слой").

Это обобщение функции $\delta'(x)$ на случай нескольких переменных. Пусть S — кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность в $\mathbb{R}^3$. Тогда для любого φ из $D(R)$ определим функцию $\frac{\partial \delta_S}{\partial n}$ следующим образом:

$$\left(\frac{\partial \delta_S}{\partial n}, \varphi\right) = -\iint\limits_S \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x, y, z) dS,$$

где $\overrightarrow{n}$ — нормаль к S, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ — нормальная производная φ, то есть производная φ по направлению $\overrightarrow{n}$. Обобщенная функция $\frac{\partial \delta_S}{\partial n}$ называется "двойным слоем на поверхности S по нормали n" и описывает плотность зарядов, соответствующую распределению диполей на поверхности S с единичной поверхностной плотностью моментов.

Глава 2

Метод интегральных преобразований

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными очень полезны интегральные преобразования, такие как преобразование Лапласа, преобразование Фурье и многие другие.

2.1 Определение и основные свойства преобразования Фурье

Символом $L_1(\mathbb{R})$ обозначим множество всех абсолютно интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций: $L_1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, таких что $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty\}$.

Определение (преобразования Фурье). Преобразованием Фурье (интегралом Фурье) функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ называется функция $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, определенная по формуле:

$$\widehat{f}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx.$$

Замечание: Для любых действительных x и y верно неравенство $\left|e^{-ixy}\right| \leq 1$, следовательно, для любого действительного y: $|\widehat{f}(y)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < \infty$, т.е. $\widehat{f}(y)$— непрерывная на $\mathbb{R}$ и ограниченная функция.

Теорема (обращения). Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ — непрерывна на $\mathbb{R}$ за исключением, быть может, изолированных точек. Тогда в каждой точке, в которой f дифференцируема, справедлива формула:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)e^{ixy}dy.$$

Замечание. Так как функция $\widehat{f}$ не обязательно является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$, то интеграл в теореме обращения надо понимать, как интеграл в смысле главного значения: $\int_{-\infty}^{+\infty} \equiv v.p. \int_{-\infty}^{-\infty} = \lim_{R\to 0}\int_{-R}^{+R}$.

Замечание. Для функции $g(y)$ функцию $\widetilde{g}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{ixy}dy$ будем называть обратным преобразованием Фурье функции g. Таким образом, по теореме обращения $f = \widetilde{\widehat{f}}$.

Пример. Найдём преобразование Фурье прямоугольного импульса

$$f(x) = \eta(a-|x|) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \equiv \mathrm{rect}\left(\frac{2t}{a}\right), \ \ a > 0:$$

$\widehat{f}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx = \int\limits_{-a}^{a} e^{-ixy}dx = \frac{e^{iya}-e^{-iya}}{iy} = \frac{2\sin ya}{y}$. Функция $\frac{\sin y}{y}$ обозначается как $\mathrm{sinc}\, y$, то есть $\widehat{\mathrm{rect}\, x} = \mathrm{sinc}\, y$.

Пример. Найдём преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-ax^2}$:

$\widehat{f}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}e^{-ixy}dx$. Преобразуем степень экспоненты, выделив полный квадрат: $-ax^2 - ixy = -a(x+\frac{iy}{2a})^2 - \frac{y^2}{4a}$. Тогда

$\widehat{f}(y)=e^{-\frac{y^2}{4a}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a(x+\frac{iy}{2a})^2}dx$. Под интегралом аналитическая в $\mathbb{C}$ функция переменной $x\in\mathbb{C}$, стремящаяся к нулю вдоль каждой прямой, параллельной вещественной оси (при $|\mathbb{R}\,x|\to\infty$). Поэтому в силу теоремы Коши и леммы Жордана (см. [4]) интеграл не изменит своего значения, если его взять не по действительной оси, а по любой другой прямой, параллельной этой оси. Возьмём его по прямой $x=z-\frac{iy}{2a}$, $z\in(-\infty,+\infty)$. Тогда $\widehat{f}(y)=e^{-\frac{y^2}{4a}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-az^2}dz=e^{-\frac{y^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, так как интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$. Итак, $\widehat{f}(y)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{y^2}{4a}}$.

Замечание. В случае $a=\frac{1}{2}$ получим: $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\widehat{f}(y)=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{y^2}{2}}$. Функция $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ называется гауссовской экспонентой и часто встречается в теории вероятностей и математической статистике. Функция

$$p_t^{BM}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

представляет собой фундаментальное решение оператора теплопроводности, а также плотность переходной вероятности процесса броуновского движения. Аналогично можно найти преобразование Фурье функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi i}}e^{\frac{ix^2}{2}}$ (с помощью замены переменных и леммы Жордана нужно перейти к интегралу от гауссовской экспоненты, см. [4]). При этом, $\widehat{f}(y)=\sqrt{2\pi i}e^{i\frac{y^2}{2}}$. Функция

$$p_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi it}}e^{\frac{ix^2}{2t}}$$

представляет собой фундаментальное решение оператора (уравнения) Шрёдингера.

Теперь изучим основные свойства преобразования Фурье.

Предложение 1. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ то $\widehat{f}$ ограниченная непрерывная функция, причём $\widehat{f}(y) \to 0$ при $|y| \to \infty$.

Доказательство можно найти в книге [3].

Предложение 2. Если f, $f' \in L_1(\mathbb{R})$, причём в любой точке $x \in \mathbb{R}$ для f справедлива формула Ньютона–Лейбница

$$f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)dt,$$

то преобразованием Фурье функции $f'(x)$ является функция $iy\widehat{f}(y)$, т.е $\widehat{f'}(y) = iy\widehat{f}(y)$.

Действительно, $\widehat{f'}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}dx$. Интегрируя по частям, получим: $\widehat{f'}(y) = f(x)e^{-ixy}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + iy\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-ixy}dx = iy\widehat{f}(y)$. Последнее равенство выполняется в силу того, что функция $f(x)$ стремится к нулю при $x \to \pm\infty$ (это следует из формулы Ньютона–Лейбница и того, что $f' \in L_1(\mathbb{R})$), а значит, $f(x)e^{-ixy}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0$.

Следствие. Если f,f',.... $f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$, то $\widehat{f^{(k)}}(y) = (iy)^k\widehat{f}(y)$.

Замечание. Так как $\widehat{f^{(k)}}(y) = (iy)^k\widehat{f}(y) \to 0$ при $|y| \to \infty$ по Предложению 1, то $\widehat{f}(y) \to 0$ при $|y| \to \infty$ быстрее, чем $\frac{1}{|y^k|}$. Таким образом, чем больше производных есть у f в $L_1(\mathbb{R})$, тем быстрее убывает на бесконечности её преобразование Фурье.

Предложение 3. Если $f(x)$ и $xf(x)$ принадлежат $L_1(\mathbb{R})$, то преобразованием Фурье функции $-ixf(x)$ является функция $\frac{d\widehat{f}(y)}{dy} = (\widehat{f}\,)'$, то есть $\widehat{-ixf(x)} = (\widehat{f}\,)'$.

Действительно, $(\widehat{f}\,)'(y) = \frac{d\widehat{f}(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy}dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\frac{d}{dy}(e^{-ixy})dx = -i\int\limits_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-ixy}dx = \widehat{-ixf(x)}$. Интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-ixy}dx$ существует, так как $xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$.

Следствие. Если f, $-ixf$,..., $(-ix)^k f \in L_1(\mathbb{R})$, то $\widehat{(-ix)^k f} = (\widehat{f}\,)^{(k)}$.

Замечание. Предложение 3 утверждает также само существование производной преобразования Фурье. Таким образом, чем быстрее убывает функция f на бесконечности (то есть, чем для более высоких степеней k функция $(-ix)^k f \in L_1(\mathbb{R})$), тем больше производных существует у её преобразования Фурье.

Введем пространство $S(\mathbb{R})$ функций $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, бесконечно дифференцируемых на всей прямой и убывающих на бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее, чем любая степень $\frac{1}{|x|}$, т.е.

$$S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall m, n \in \mathbb{N}\ \ x^m \cdot f^n(x) \to 0 \text{ при } |x| \to \infty\}.$$

$S(\mathbb{R})$ называется пространством быстро убывающих функций или пространством Шварца. Из замечаний к Предложениям 2 и 3 вытекает:

Следствие. Для любой функции f из $S(\mathbb{R})$ ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ также принадлежит $S(\mathbb{R})$.

Предложение 4. Преобразованием Фурье функции $f * g$ служит функция $\widehat{f} \cdot \widehat{g}$, т.е. $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

Действительно,

$$\widehat{f * g}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f{*}g(x) e^{-ixy} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z) g(x-z) dz \right) e^{-ixy} dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z) \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x-z) e^{-ixy} dz \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z) \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x_1) e^{-ix_1 y} dx_1 \right) e^{-izy} dz =$$

$$= \hat{g}(y) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-iyz}dz = \hat{f}(y)\hat{g}(y).$$

Замечание. Для преобразования Фурье справедливо и двойственное свойство: $\widehat{f \cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

Предложение 5. Прямое и обратное преобразования Фурье связаны следующим образом: $\widetilde{f}(\cdot) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f(-\cdot)}$, где символ $f(-\cdot)$ обозначает $f(-x)$.

Действительно, $\widetilde{f}(y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(-z)e^{-izy}dz = \frac{1}{2\pi}\widehat{f(-\cdot)}(y)$.

Предложение 6. Преобразование Фурье обладает также следующими свойствами:

a) $[\widehat{af + bg}] = a\widehat{f} + b\widehat{g}$ для любых чисел a, b;

b) $\widehat{f(ax)} = \frac{1}{a}\widehat{f}(\frac{y}{a})$;

c) $\widehat{f(x + c)} = e^{-iyc}\widehat{f}(y)$;

d) $\widehat{e^{icx}f(x)} = \widehat{f}(y + c)$.

Замечание. Преобразование Фурье хорошо обобщается на случай функций нескольких переменных. Пусть $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$— абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}^n$, тогда: $\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot y}dx$, где $x \cdot y$— скалярное произведение векторов x и y. При этом, в обратном преобразовании Фурье будет стоять множитель $(2\pi)^{-n}$.

2.2 Преобразование Фурье обобщенных функций.

Рассмотрим пространство Шварца $S(\mathbb{R})$. Введём на пространстве $S(\mathbb{R})$ понятие сходимости последовательности функций.

Определение. Последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathbb{R})$ сходится к функции $\varphi \in S(\mathbb{R})$ в пространстве $S(\mathbb{R})$, если для всех m и $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$ $x^m\varphi_n^{(k)}(x) \rightrightarrows x^m\varphi^{(k)}(x)$.

Заметим, что $D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$ и из сходимости в $D(\mathbb{R})$ следует сходимость в $S(\mathbb{R})$. Тем не менее, пространства $S(\mathbb{R})$ и $D(\mathbb{R})$ не совпадают, так как, например, функция e^{-x^2} принадлежит $S(\mathbb{R})$ и не принадлежит $D(\mathbb{R})$.

Предложение. Пространство Шварца обладает следующими свойствами:

1. $S(\mathbb{R})$—линейное пространство.
2. $\forall\varphi \in S(\mathbb{R})$ её производная k-го порядка $\varphi^{(k)} \in S(\mathbb{R})$.
3. $\forall\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ выполняется $\varphi(x-a) \in S(\mathbb{R})$.
4. Если $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ вместе со всеми своими производными растёт на бесконечности не быстрее полинома, то $\forall\varphi \in S(\mathbb{R})$, выполняется: $\varphi\psi \in S(\mathbb{R})$.

Определение (обобщенных функций медленного роста). Примем пространство $S(\mathbb{R})$ за пространство основных функций. Рассмотрим множество всех линейных непрерывных функционалов на $S(\mathbb{R})$. Это множество будем называть пространством обобщенных функций медленного роста и обозначать $S'(\mathbb{R})$. (Непрерывность функционала F на пространстве

$S(\mathbb{R})$ определяется так же, как и непрерывность функционала на пространстве $D(\mathbb{R})$.)

Предложение. $S'(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})$.

Действительно, если f — непрерывное линейное отображение пространства $S(\mathbb{R})$, то оно тем более непрерывное линейное отображение его подпространства $D(\mathbb{R})$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = e^{x^2}$. Тогда $f(x) \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, т.е. f— локально абсолютно интегрируемая функция, и, следовательно, ей соответствует обобщенная функция $f \in D'(\mathbb{R})$. Т.к. функция $f(x) = e^{x^2}$ растет быстрее чем любая функция $|x|^m$, то не для всех функций из $S(\mathbb{R})$ существует интеграл $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$. Таким образом, $f \in D'(\mathbb{R})$, но $f \notin S'(\mathbb{R})$.

Пример. Дельта-функция Дирака может быть определена по формуле $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ для любой непрерывной на $\mathbb{R}$ функции φ, в частности, для любой $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Таким образом, $\delta \in S'(\mathbb{R})$.

Теперь определим сходимость в пространстве $S'(\mathbb{R})$. Определяется она аналогично сходимости в $D'(\mathbb{R})$.

Определение. Функционал $f \in S'(\mathbb{R})$ является (слабым) пределом последовательности функционалов $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S'(\mathbb{R})$, если для любой φ из $S(\mathbb{R})$ выполняется: $(f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$ при $n \to \infty$.

Определение (преобразования Фурье обобщенных функций). Преобразованием Фурье обобщенной функции F из $S'(\mathbb{R})$ называется обобщенная функция $\widehat{F} \in S'(\mathbb{R})$, действующая по формуле:

$$(\widehat{F}, \varphi) = (F, \widehat{\varphi}) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}).$$

Так как для любой функции $\varphi \in S(\mathbb{R})$ её преобразование фурье $\widehat{\varphi}$ тоже принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R})$,то определение корректно. Проверим согласованность определения с классическим. Пусть F_f— регулярная обобщенная функция, соответствующая обычной функции $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, т.е. $(F_f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$. Пусть кроме того $f \in L_1(\mathbb{R})$, то есть существует ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ в обычном смысле, причём $\widehat{f} \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$. Покажем, что $\widehat{F}_f = F_{\widehat{f}}$. Итак,

$$(\widehat{F}_f, \varphi) = (F_f, \widehat{\varphi}) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{-ixy}dy \right) dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(y)e^{-ixy}dy\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f(y)}\varphi(y)dy = (F_{\widehat{f}}, \varphi).$$

Отметим, что при таком определении все свойства преобразования Фурье сохраняются.

Пример. Найдем преобразование Фурье δ-функции Дирака:

$$(\widehat{\delta}, \varphi) = (\delta, \widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{ixy}dy \Bigg|_{x=0} = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)\cdot 1 dy = (1, \varphi).$$

Таким образом, $\widehat{\delta} = 1$.

Пример. Найдем преобразование Фурье обобщенной функции $f(x) \equiv 1$. Заметим, что обычное преобразование Фурье не существует, т.к. константа 1 не является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$). Итак, $\widehat{1} = \widehat{\widehat{\delta}} = 2\pi\widetilde{\delta(-x)} = 2\pi\delta(-x) = 2\pi\delta$.

Замечание. В многомерном случае, если $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, $F \in S'(\mathbb{R}^n)$, то преобразование Фурье определяется по формуле: $(\widehat{F}, \varphi) = (F, \widehat{\varphi})$.

Замечание. Стандартное преобразование Фурье функции φ из $S(\mathbb{R})$: $\widehat{\varphi}(y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-ixy}dx$ можно рассматривать как действие обобщенной функции e^{-ixy} на "основную" функцию φ: $\widehat{\varphi}(y) = (e^{-ixy}, \varphi(x))$.

2.3 Определение и основные свойства преобразования Лапласа.

Определение (показателя роста). Пусть $f(t) : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ непрерывная, за исключением быть может изолированных точек, функция. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-st}dt. \tag{2}$$

Если существует вещественное $s_0 \in \mathbb{R}$ такое, что интеграл (2) сходится, то и для всех вещественных чисел $s > s_0$ интеграл сходится, так как $0 \leq |f(t)|e^{-st} < |f(t)|e^{-s_0 t}$.

Таким образом, возможны три случая:

1. существует $s_0 \in \mathbb{R}$ такое, что при $s > s_0$ интеграл (2) сходится, при $s < s_0$ интеграл (2) расходится, такое s_0 назовём показателем роста функции $f(t)$;

2. интеграл (2) сходится для всех $s \in \mathbb{R}$, тогда считаем показатель роста f равным $-\infty$;

3. интеграл (2) рассходится для всех $s \in \mathbb{R}$, тогда считаем показатель роста f равным $+\infty$.

Если показатель роста f меньше $+\infty$, то будем говорить, что f имеет ограниченный рост.

Замечание. Если для некоторых $s_1, M \in \mathbb{R}$ и любого $t \in [0, +\infty)$ выполнено неравенство $|f(t)| \leq Me^{s_1 t}$, то f — ограниченного роста, показатель роста $s_0 \leq s_1$.

Замечание. Если f имеет ограниченный рост, то f — абсолютно интегрируема на любом отрезке $[0, a]$, то есть $\int_0^a |f(t)|dt < \infty$.

Определение (оригинала). Пусть $f(t) : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ непрерывная, за исключением быть может изолированных точек, и имеет ограниченный рост с показателем s_0. Для всех $t < 0$ доопределим $f(t) = 0$. Назовём такую функцию оригиналом.

Пример. Рассмотрим функцию Хевисайда $\eta(x) = \begin{cases} 1, \ x \geq 0, \\ 0, \ x < 0. \end{cases}$ Эта функция является оригиналом, так как имеет ограниченный рост $|\eta(t)| \leq 1e^{0t}$ и непрерывна везде, кроме нуля.

Замечание. Если функция $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ непрерывная, за исключением быть может изолированных точек, и имеет ограниченный рост, то функция $f(t)\eta(t)$ является оригиналом. Если $f(t)$ - оригинал, то $f(t) = f(t)\eta(t)$.

Предложение. Если $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $a, \tau \geq 0$ функции $\alpha f(t) + \beta g(t)$, $f(at)$, $tf(t)$, $f(t-\tau)$, $f(t)e^{\lambda t}$, $\int\limits_0^t f(s)ds$ также являются оригиналами.

Определение (изображения). Функцию $F(p)$ комплексного переменного $p = x + iy$, определённую при $p : \mathbb{R}\, p = x > s_0$ формулой

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

назовем изображением.

Определение (преобразования Лапласа). Преобразование L, отображающее оригинал f в его изображение $L[f] = F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$, называется преобразованием Лапласа. Обозначения: $f(t) \risingdotseq F(p)$, $F = L[f]$.

Теорема. Если f — оригинал с показателем роста s_0, то его изображение $F(p)$ — аналитическая функция в области $\{p \in \mathbb{C} : \mathbb{R}\, p > s_0\}$. При этом, если $\mathbb{R}\, p \to +\infty$ то $F(p) \to 0$.

Теорема (единственности). Если $F(p) = G(p)$ в некоторой области $\{p \in \mathbb{C} : \mathbb{R}p > s_0\}$, $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$, то $f(t) = g(t)$ во всех точках непрерывности этих функций.

Изучим теперь основные свойства преобразования Лапласа.

Предложение (свойство линейности). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $g(t) \risingdotseq G(p)$, то $\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)$, для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Действительно, $\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-pt}dt = \alpha \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt + \beta \int\limits_0^\infty g(t)e^{-pt}dt = \alpha F(p) + \beta G(p)$.

Предложение (свойство подобия). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $a > 0$, то $f(at) \risingdotseq \frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$.

Действительно,

$$f(at) \risingdotseq \int\limits_0^\infty f(at)e^{-pt}dt = \frac{1}{a}\int\limits_0^\infty f(at)e^{-\frac{p}{a}(at)}d(at) = \frac{1}{a}F(\frac{p}{a}).$$

Таким образом, $f(at)$ — оригинал с порядком роста as_0, где s_0 — порядок роста $f(t)$.

Предложение (о запаздывающем оригинале). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p)$ для любого $\tau \geq 0$.

Действительно, $f(t-\tau) \risingdotseq \int\limits_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int\limits_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = \big|t - \tau = u, dt = du\big| = \int\limits_0^\infty f(u)e^{-(u+\tau)p}du = e^{-\tau p}\int\limits_0^\infty f(u)e^{-up}du = e^{-\tau p}F(p)$.

Замечание. Если $f(t)$ — оригинал, то есть $f(t) = f(t)\eta(t)$, то $f(t-\tau) = f(t-\tau)\eta(t-\tau)$. Например, если в качестве оригинала рассматривается $f(t) = \sin(t) = \sin(t)\eta(t)$, то в качестве запаздывающего оригинала надо рассматривать функцию $f(t-\tau) = \sin(t-\tau)\eta(t-\tau)$, обращающуюся в нуль при $t < \tau$, а не $\sin(t-\tau)$, обращающуюся в нуль при $t < 0$.

Предложение (о смещении изображения). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $e^{\lambda t}f(t) \risingdotseq F(p-\lambda)$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Действительно, $e^{\lambda t}f(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{\lambda t}f(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-(p-\lambda)t}dt = F(p-\lambda)$.

Предложение (о дифференцировании оригинала). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $f'(t)$ — оригинал, то $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(+0)$.

Действительно, $f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt$. Интегрируя по частям, получим $f'(t) \risingdotseq e^{-pt}f(t)|_0^\infty - \int\limits_0^\infty f(t)(-p)e^{-pt}dt = 0 - f(+0) + p\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(+0)$.

Следствие. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $f^{(n)}(t)$ — оригинал, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - f(+0)p^{n-1} - f'(+0)p^{n-2} - ... - f^{n-1}(+0).$$

Предложение (о дифференцировании изображения). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $-tf(t) \risingdotseq F'(p)$.

Действительно, $F'(p) = \frac{d}{dp}\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^\infty f(t)\frac{d}{dp}e^{-pt}dt = \int\limits_0^\infty -tf(t)e^{-pt}dt \fallingdotseq -tf(t)$

Следствие. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $(-1)^nt^nf(t) \risingdotseq F^{(n)}(p)$.

Предложение (об интегрировании оригинала). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\int\limits_0^t f(s)ds \risingdotseq \frac{1}{p}F(p)$

Действительно, пусть $g(t) = \int\limits_0^t f(s)ds$, $g(t) \risingdotseq G(p)$. Тогда $g(+0) = 0$, $g'(t) \risingdotseq pG(p) - 0$. Так как $g'(t) = f(t)$, то $F(p) = pG(p)$, то есть $G(p) = \frac{1}{p}F(p)$.

Предложение (об интегрировании изображения). Если $\frac{1}{t}f(t)$ — оригинал (тогда и $f(t)$ тоже) и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\frac{1}{t}f(t) \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(q)dq$, где $\int\limits_p^\infty = \lim\limits_{\mathbb{R}z\to\infty}\int\limits_p^z$.

Действительно, пусть $\frac{1}{t}f(t) \risingdotseq G(p)$, тогда $f(t) = t(\frac{1}{t}f(t)) \risingdotseq -G'(p)$ по свойству дифференцирровования изображения. Таким образом, $-G'(p) = F(p)$. Следовательно, $\int\limits_p^z F(q)dq = -(G(z) - G(p))$. Так как $G(p)$ — изображение, то $G(z) \to 0$ при $\mathbb{R}z \to \infty$. Тогда $\int\limits_p^\infty F(q)dq = G(p)$.

Предложение (о свёртке). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $g(t) \risingdotseq G(p)$, то $(f * g)(t) \risingdotseq F(p) \cdot G(p)$

Замечание. Если функции $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы, то есть равны нулю при $t < 0$, то в определении свёртки по формуле (1) на стр. 22 интеграл можно брать от нуля до t:

$$(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Докажем предложение о свёртке. $(f*g)(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \risingdotseq$

$\risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt}(\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau)dt = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)e^{-pt}d\tau dt$. Так как $g(t-\tau)$— запаздывающий оригинал, то $(f * g)(t) = \int\limits_0^\infty(\int\limits_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-pt}dt)f(\tau)d\tau$. Сделаем замену переменных: $t - \tau = s$, тогда $dt = ds$, $t\big|_\tau^\infty \to s\big|_0^\infty$. При этом, $(f * g)(t) = \int\limits_0^\infty(\int\limits_0^\infty g(s)e^{-p(s+\tau)}ds)f(\tau)d\tau = \int\limits_0^\infty g(s)e^{-ps}ds \int\limits_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau = F(p) \cdot G(p)$.

Теорема (о взаимосвязи преобразований Фурье и Лапласа). Пусть $f(t)$ — оригинал с показателем роста s_0, $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда при $a > s_0$ преобразованием Фурье функции $\varphi(t) = e^{-at}f(t)$ будет служить функция $F(a + is)$, то есть

$$f(t) \risingdotseq F(p) \Rightarrow \widehat{e^{-at}f(t)} = F(a + is).$$

Действительно, пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$. Рассмотрим $p = a+is$ для

$a > s_0$. Тогда $F(a+is) = \int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-(a+is)t}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}f(t)e^{-ist}dt = \widehat{e^{-at}f(t)}$.

Теорема (обращения преобразования Лапласа). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то в каждой точке t, в которой функция f дифференцируема, справедлива формула Меллина–Римана (обратное преобразование Лапласа):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp,$$

где a - любое вещественное число, $a > s_0$, $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} = \lim\limits_{\mathbb{R}\ni R\to+\infty} \int\limits_{a-iR}^{a+iR}$.

Действительно, если функция $f(t)$ дифференцируема в t, то и функция $\varphi(t) = e^{-at}f(t)$ тоже, $\widehat{e^{-at}f(t)} = F(a + is)$. Найдём обратное преобразование Фурье от $F(a + is)$: $\widetilde{F(a+is)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(a + is)e^{ist}ds$. По теореме об обращении преобразования Фурье имеем: $\widetilde{F(a+is)} = e^{-at}f(t)$, то есть $e^{-at}f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(a + is)e^{ist}ds$,. Таким образом, получим: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(a + is)e^{(a+is)t}ds$. Обозначим $p = a + is$. Если $s \in (-\infty, +\infty)$, то $p \in (a - i\infty, a + i\infty)$ и $ds = \frac{1}{i}dp$. Тогда получим: $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp$.

2.4 Преобразование Лапласа обобщенных функций.

Определение (носителя обобщенной функции). Говорят, что обобщённая функция f обращается в ноль на множестве

$\Omega \in \mathbb{R}$, если для любой основной функции $\varphi \in D(\Omega)$ выполняется равенство $(f, \varphi) = 0$. Объединение всех таких Ω даёт множество $\mathcal{O}$, называемое нулевым множеством обобщённой функции f. Множество $\mathbb{R} \setminus \mathcal{O}$ называется носителем обобщённой функции f; обозначается $\operatorname{supp} f$.

Пример. Носитель регулярной обобщённой функции f — это множество тех $x \in \mathbb{R}$, ни в какой окрестности которых f не обращается в ноль, то есть это — замыкание множества $x \in \mathbb{R}$, в которых f не обращается в ноль.

Пример. Носитель δ-функции Дирака — это точка $x = 0$, то есть $\operatorname{supp} f = \{0\}$.

Определим преобразование Лапласа на множестве обобщенных функций. Для "обычной" функции $f(t)$, являющейся оригиналом, ее изображение — это функция $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$, так как $f(t) = 0$ при $t < 0$. Если рассматривать функцию $f(t)$ как регулярную обобщённую функцию, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = (f, e^{-pt})$. Функция $\varphi(t) = e^{-pt} \notin D(\mathbb{R})$, однако некоторые обобщённые функции из $D'(\mathbb{R})$ имеют более широкую область определения, чем $D(\mathbb{R})$.

Определение (преобразования Лапласа обобщенных функций). Если обобщённая функция $f \in D'(\mathbb{R})$ такова, что:

1) её носитель лежит на полуоси $t \geq 0$,

2) для некоторого $s_0 \in \mathbb{R}$ при всех p, таких что $\mathbb{R}\, p > s_0$, функции вида $\varphi(t) = e^{-pt}$ лежат в её области определения,

то преобразованием Лапласа обобщённой функции f будем называть фунцию $F(p)$ комплексного переменного p, определённую для всех p, таких что $\mathbb{R}p > s_0$, формулой

$$F(p) = (f, e^{-pt}).$$

Замечание. Пользуясь связью преобразований Фурье и Лапласа можно также определить преобразование Лапласа обобщённой функции $f(t)$ как преобразование Фурье обобщённой фукции $e^{-at}f(t)$.

Пример. Найдем преобразование Лапласа дельта-функции Дирака δ: $(\delta, e^{-pt}) = e^{-p\cdot 0} = 1$. Таким образом, $\delta \risingdotseq 1$.

Пример. Найдем преобразование Лапласа дельта-функции Дирака $\delta(t-t_0)$, сосредоточенной в точке t_0: $(\delta(t-t_0), e^{-pt}) = e^{-pt_0}$, таким образом, $\delta(t-t_0) \risingdotseq e^{-pt_0}$, то есть для дельта-функции Дирака справедливо свойство запаздывающага оригинала.

Пример (преобразование Лапласа обобщённых производных). По определению обобщённой производной от обобщённой функции f, для любой основной функции φ выполнено: $(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n(f, \varphi^{(n)})$. Тогда $(f^{(n)}, e^{-pt}) = (-1)^n(f, \frac{d^n}{dt^n}e^{-pt}) = (-1)^n(f, (-1)^n p^n e^{-pt}) = p^n(f, e^{-pt}) = p^n F(p)$. Таким образом,

$$f^{(n)} \risingdotseq p^n F(p).$$

Замечание. Выясним, как формула $f^{(n)} \risingdotseq p^n F(p)$ согласуется с введённым ранее свойством дифференцирования оригинала $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(+0)$. Формула $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(+0)$ была введена только для тех оригиналов f, для которых f' — тоже оригинал, то есть только для почти всюду дифференцируемых, а, следовательно, непрерывных f с единственной допустимой точкой разрыва первого рода $t = 0$. Но для таких функций (см. стр. 21): $f'_{\text{обобщ}} = f'_{\text{класс}} + f(+0)\delta$. Так как $f'_{\text{класс}}(t) \risingdotseq pF(p) -$

$f(+0)$, то $f'_{\text{обобщ}} = f'_{\text{класс}} + f(+0)\delta \risingdotseq (pF(p) - f(+0)) + f(+0) \cdot 1 = pF(p)$.

Пример. Найдем преобразование Лапласа n-ой производной дельта-функции Дирака: $(\delta^{(n)}, e^{-pt}) = (-1)^n(\delta, \frac{d^n}{dt^n}e^{-pt}) = (-1)^n(\delta, (-1)^n p^n e^{-pt}) = p^n(\delta, e^{-pt}) = p^n e^0 = p^n$. Таким образом, $\delta^{(n)} \risingdotseq p^n$.

Замечание. Для изображений $F(p)$ обобщённых функций свойство $F(p) \to 0$ при $\mathbb{R}\, p \to +\infty$ уже не выполнено; $f^{(n)}_{\text{обобщ}} \risingdotseq p^n F(p)$, все остальные свойства преобразования Лапласа переносятся на обобщённые функции без изменения.

Упражнение. Найдите преобразование Лапласа функции $\delta^{(n)}(t - t_0)$.

2.5 Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом интегральных преобразований.

Решим задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = a^2 \Delta u(t,x) \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{3}$$

Будем считать, что как начальное условие $u_0(\cdot)$, так и решение $u(t,\cdot)$ при всех $t > 0$ являются элементами пространства Шварца $S(\mathbb{R}^n)$, то есть к ним можно применить преобразование Фурье по переменным $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, и полученные функции снова будут элементами $S(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\widehat{u(t,x)} = \widehat{u}(t,y)$, $\widehat{u_0(x)} = \widehat{u_0}(y)$. Тогда, так как преобразование Фурье по x перестановочно с производной по t, то $\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t,y)$, и по свойствам преобразования Фурье $\widehat{\Delta u(t,x)} = (\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}) = (-iy_1)^2\widehat{u} + ... + (-iy_n)^2\widehat{u} = -(y_1^2 + ... + y_n^2)\widehat{u} = -||y||^2\widehat{u}(t,y)$. Таким образом, применив преобразование Фурье к левым и правым частям равенств системы (3), получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения на функцию $\widehat{u}$ переменного t с параметром $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t,y) = -a^2||y||^2\widehat{u}(t,y), \quad t > 0, \\ \widehat{u}(0,y) = \widehat{u_0}(y). \end{cases} \tag{4}$$

Решением этой задачи Коши является функция $\widehat{u}(t,y) = e^{-a^2||y||^2 t}\widehat{u_0}(y)$. Теперь для получения решения исходной задачи (3) достаточно найти обратное преобразование Фурье функции $\widehat{u}(t,y)$ по переменным $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. По свойствам преобразования Фурье, $\widetilde{f \cdot g} = \widetilde{f} * \widetilde{g}$ и значит, $u = \widetilde{\widehat{u}} = (\widetilde{e^{-a^2||y||^2 t} \cdot \widehat{u_0}(y)}) = (\widetilde{e^{-a^2||y||^2 t}}) * u_0$. Так как обратное преобразование Фурье гауссовской экспоненты $f(y) = e^{-a^2 t||y||^2}$ есть гауссовская экспонента $\widetilde{f}(x) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{||x||^2}{4a^2 t}}$ (см. пример на стр. 31), то $u(t,x) = (\widetilde{f} * u_0)(t,x) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{||x-z||^2}{4a^2 t}} u_0(z)dz$.

Таким образом, для начальных условий из $S(\mathbb{R}^n)$ мы получили решение задачи Коши (3):

$$u(t,x) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{||x-z||^2}{4a^2 t}} u_0(z)dz.$$

Эта формула называется интегралом Пуассона. Легко видеть, что интеграл Пуассона имеет смысл и для более широкого класса начальных условий, например, для непрерывных функций u_0 ограниченного роста. И, если интеграл Пуассона существует, то он и представляет собой решение соответствующей задачи Коши (3).

Глава 3

Метод функции Грина

Пусть нам требуется решить уравнение вида $Lu = f$ относительно неизвестной функции u, где L — линейный дифференциальный оператор, а f — известная функция. Если бы можно было найти обратный к L оператор L^{-1}, такой что $L^{-1}Lu = LL^{-1}u = u$, то, применив его к обеим частям уравнения $Lu = f$, мы нашли бы решение u: $u = L^{-1}Lu = L^{-1}f$. Естественно предположить при этом, что если L — дифференциальный оператор, то L^{-1} — интегральный, то есть в самом общем виде $[L^{-1}f](x) = \int\limits_{\Omega} G(x,y)f(y)dy$, где Ω — область определения u и f, $G(x,y)$ — некоторая функция, называемая ядром интегрального оператора. Однако, общее решение дифференциального уравнения определяется неоднозначно, а значит обратного оператора L^{-1} не существует. Тем не менее, если наложить на u (или, что то же самое, на L) дополнительные условия, поставив тем самым корректную задачу математической физики (например, задачу Коши, краевую или начально-краевую задачу, в зависимости от уравнения), то, так как решение такой задачи существует и единственно, удаётся найти интегральный оператор, такой что $u(x) = \int\limits_{\Omega} G(x,y)f(y)dy$. Ядро $G(x,y)$ при этом называется функцией Грина поставленной задачи. Таким образом, построить для данной задачи функцию Грина — значит решить эту задачу. В построении функции Грина участвует объект, называемый фундаментальным решением оператора.

3.1 Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора

Пусть L — линейный дифференциальный оператор n переменных с постоянными коэффициентами, например $L = \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Порядком оператора назовем наивысший порядок производных в его формуле. (Δ — оператор второго порядка). Рассмотрим уравнение вида $Lu = f$, где f — известная функция, u — неизвестная функция.

Определение (обобщеного решения). Обобщенным решением уравнения $Lu = f$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется всякая обобщенная функция из $D'(\Omega)$, такая что для любой φ из $D(\Omega)$ выполнено: $(Lu, \varphi) = (f, \varphi)$. Для обобщенной функции u обобщенная функция Lu определяется с помощью введенных раннее операций над обобщенными функциями.

Предложение. Любое классическое решение уравнения $Lu = f$ является также его обобщенным решением.

Предложение. Если u— обобщенное решение уравнения $Lu = f$ и $u \in C^m(\Omega)$ (т.е. u— m раз непрерывно дифференцируемая в Ω функция), где m порядок оператора L, то u— классическое решение этого уравнения.

Определение (фундаментального решения). Фундаментальным решением оператора L (или фундаментальным решением уравнения $Lu = f$) называется любая обобщенная функция $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая в $\mathbb{R}^n$ уравнению $Lu = \delta$, то есть $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ такова, что для любого φ из $D(\mathbb{R}^n)$ верно равенство $(Lu, \varphi) = (\delta, \varphi)$.

Предложение. Если u — фундаментальное решение оператора L, u_0— решение уравнения $Lu = 0$, то $(u + u_0)$— тоже фундаментальное решение оператора L.

Действительно, в силу того, что L — линейный оператор, имеем: $L(u+u_0) = Lu+Lu_0 = \delta+0 = \delta$. Таким образом, $(u+u_0)$ — фундаментальное решение оператора L. Здесь наблюдается полная аналогия с теорией линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, где общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного и частного решения неоднородного. Таким образом, зная все решения $Lu = 0$ и хоть одно фундаментальное решение оператора L, можем найти все фундаментальные решения L.

С помощью фундаментального решения оператора L можно решить уравнение $Lu = f$.

Теорема (формула Дюамеля). Пусть $\mathcal{E}(x)$— общее решение уравнения $Lu = \delta$, т.е. $\mathcal{E}(x)$ — фундаментальное решение оператора L. Пусть f такова, что $\mathcal{E} * f \in D'(\mathbb{R}^n)$. Тогда решение уравнения $Lu = f$ единственно в классе обобщённых функций из $D'(\mathbb{R}^n)$, для которых существует свёртка с $\mathcal{E}(x)$, и может быть найдено по формуле Дюамеля:

$$u = \mathcal{E} * f.$$

Проверим, что $u = \mathcal{E} * f$ является решением уравнения $Lu = f$. По свойствам линейности и дифференцирования свертки: $L(g_1 * g_2) = L(g_1) * g_2 = g_1 * L(g_2)$, так как L— линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Тогда $Lu = L(\mathcal{E} * f) = L(\mathcal{E}) * f = \delta * f = f$.

Покажем, что других решений u уравнения $Lu = f$, для которых существовала бы $u * \mathcal{E}$, нет. Если u_1 и u_2— различные решения $Lu = f$, то $u = u_1 - u_2$ — решение уравнения $Lu = 0$. Действительно, $Lu = Lu_1 - Lu_2 = f - f = 0$. Покажем, что $u \equiv 0$. По свойствам δ-функции: $u = u * \delta = u * L(\mathcal{E}) = Lu * \mathcal{E} = 0 * \mathcal{E} = 0$.

Следствие. Если $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ и свертка $u * \mathcal{E}$ существует и лежит в $D'(\mathbb{R}^n)$, то справедливо равенство: $u = Lu * \mathcal{E}$.

Замечание (физический смысл формулы $u = \mathcal{E} * f$). Правая часть уравнения $Lu = f$, то есть источник $f(x)$, может быть представлена в виде: $f(x) = (f * \delta)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(z)\delta(x - z)dz$, где интеграл — это суперпозиция точечных источников вида $f(z)\delta(x - z)$. Каждый точечный источник $f(z)\delta(x - z)$ определяет влияние $f(z)\mathcal{E}(x - z)$, следовательно, решение $u = \mathcal{E} * f$ — это суперпозиция всех влияний.

Замечание. Если u — фундаментальное решение оператора L, то есть $Lu = \delta$, то $u_1 = cu$ — решение уравнения $Lu_1 = c\delta$ в силу линейности L, так как $L(cu) = cLu = c\delta$. Иногда фундаментальным решением оператора L называют любую обобщенную функцию u_1: $Lu_1 = c\delta$, где c выбрано так, что u_1 имеет наиболее простой вид.

Замечание. Можно так же рассматривать в качестве фундаментального решения оператора L решение уравнения $Lu = \delta_{M_0}$, где точка $M_0 \in \mathbb{R}^n$, $M_0 \neq 0$. Заменой координат $z = x - M_0$ уравнение $Lu(x) = \delta_{M_0}(x)$ переводится в уравнение $Lu(z) = \delta(z)$. Решение уравнения $Lu = \delta_{M_0}$ будем называть фундаментальным решением оператора L с особенностью (сингулярностью) в точке M_0.

Пример. Найдём фундаментальное решение оператора $L = \frac{d}{dt}+a,\ a=$const. Решим уравнение $Lu=\delta$, то есть $\frac{du}{dt}(t)+au(t)=\delta(t)$. Воспользуемся методами операционного исчисления (для обобщённых функций): пусть $u(t) \risingdotseq U(p)$, тогда по свойствам преобразования Лапласа обобщённых функций $\frac{du}{dt} \risingdotseq pU(p)$. Так как $\delta \risingdotseq 1$, то получаем $pU(p)+aU(p)=1$, то есть $U(p)=\frac{1}{p+a}$, и значит, $u(t)=e^{-at}\eta(t)$.

Пример. Найдём фундаментальное решение оператора $L = \frac{d^2}{dt^2}+a^2$, $a=$ const. Решим уравнение $\frac{d^2u}{dt^2}+a^2u=\delta$. Воспользуемся методами операционного исчисления (для обобщённых функций): пусть $u(t) \risingdotseq U(p)$, тогда по свойствам преобразования Лапласа обобщённых функций $\frac{du}{dt} \risingdotseq pU(p)$. Так как $\delta \risingdotseq 1$, то получаем $p^2U(p)+a^2U(p)=1$, $U(p)=\frac{1}{p^2+a^2}$, $u(t)=\frac{\sin at}{a}\eta(t)$.

3.2 Фундаментальное решение одномерного волнового оператора

Рассмотрим одномерное волновое уравнение ($x \in \mathbb{R}^1$):

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(t,x), \quad a=const>0.$$

Найдём его фундаментальное решение. Для этого решим уравнение

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \delta(t,x). \tag{5}$$

Замечание. Когда рассматриваются дифференциальные уравнения с частными производными, то удобно применять преобразование Фурье по всем переменным, превращая дифференциальное уравнение в алгебраическое, или комбинировать преобразование Фурье по всем, кроме одной, переменным (тогда уравнение с частными производными превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение) и преобразование Лапласа по оставшейся переменной для решения получившегося обыкновенного дифференциального уравнения.

Применим преобразование Фурье по переменной x к обеим частям уравнения (5). Обозначим преобразование Фурье функции $u(t,x)$ через $\widehat{u}(t,y)$. Тогда, по свойствам преобразования Фурье,

$$\frac{\partial^2 \widehat{u(t,x)}}{\partial x^2} = (iy)^2 \widehat{u}(t,y), \quad \frac{\partial^2 \widehat{u(t,x)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \widehat{u}(t,y)}{\partial t^2}$$

и, так как $\delta(t,x) = \delta(t)\delta(x)$, то $\widehat{\delta(t,x)} = \delta(t)\widehat{\delta(x)} = 1 \cdot \delta(t)$.

Таким образом, получим обыкновенное дифференциальное уравнение на функцию переменной t с параметром y:

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}(t,y)}{\partial t^2} + a^2 y^2 \widehat{u}(t,y) = \delta(t) \qquad (6).$$

В левой части уравнения (6) стоит линейный дифференциальный оператор $L_y = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + a^2 y^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + a^2 |y|^2$, и нам надо решить уравнение $L_y \widehat{u} = \delta$, то есть найти фундаментальное решение этого оператора. Фундаментальное решение такого оператора было найдено с помощью операционного исчисления в последней задаче предыдущего пункта. Оно имеет вид: $\widehat{u}(t,y) = \frac{\sin a|y|t}{a|y|}\eta(t) = \frac{\sin ayt}{ay}\eta(t)$, в силу чётности последней дроби.

Таким образом, фундаментальное решение одномерного волнового уравнения — это обратное преобразование Фурье по y функции $\widehat{u}(t,y)$. В пункте 2.1 (см. стр. 31) было показано, что $\eta(\widehat{a - |x|}) = \frac{2\sin ya}{y}$ для $a > 0$, и, значит, $\frac{1}{2a}\eta(\widehat{at - |x|}) = \frac{\sin aty}{ay}$ при

$at > 0$. При $at < 0$, то есть $t < 0$, $\eta(at - |x|) \equiv 0$, $\eta(\widehat{at - |x|}) \equiv 0$, и, значит, $\frac{1}{2a}\eta(\widehat{at - |x|}) = \frac{\sin aty}{ay}\eta(t)$.

Итак, фундаментальное решение одномерного волнового оператора — это функция

$$u(t, x) = \frac{1}{2a}\eta(at - |x|).$$

Фундаментальные решения двумерного и трёхмерного волнового оператора могут быть найдены аналогичным образом, см. [1].

3.3 Фундаментальное решение оператора Лапласа

Рассмотрим уравнение Пуассона в $\mathbb{R}^3$: $\Delta u = f$. В левой части стоит оператор Лапласа: $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. Если мы найдем фундаментальное решение оператора Лапласа, то научимся решать уравнение Пуассона для весьма обширного класса функций f в правой части уравнения.

Итак, необходимо решить уравнение $\Delta u(x) = \delta(x)$, где $x = (x_1, x_2, x_3)$. Найдем фундаментальное решение оператора Δ с помощью преобразования Фурье. Применим преобразование Фурье к обеим частям уравнения $\Delta u = \delta$.

$$\widehat{\Delta u}(y) =$$
$$= \left(\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}} + \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}} + \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}}\right)(y) = (iy_1)^2\widehat{u}(y) + (iy_2)^2\widehat{u}(y) + (iy_3)^2\widehat{u}(y) =$$
$$= -(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\widehat{u}(y).$$

Перейдем к сферическим координатам: тогда $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = r^2$, т.е. $\widehat{\Delta u} = -r^2\widehat{u}$. Так как $\widehat{\delta} = 1$, то получим алгебраическое уравнение: $-r^2\widehat{u} = 1$, т.е. $\widehat{u} = -\frac{1}{r^2}$ или $u = \widetilde{\left(-\frac{1}{r^2}\right)}$. Таким образом, фундаментальным решением оператора Δ в $\mathbb{R}^3$ является обратное преобразование Фурье функции $-\frac{1}{r^2}$. Найдем его.

Предложение. Функция $\widehat{u}(r) = -\frac{1}{r^2}$ локально интегрируема в $\mathbb{R}^3$; тем самым, задает регулярную обобщенную функцию.

Покажем, что $\widehat{u}(r) = -\frac{1}{r^2}$ интегрируема по любому шару $B_R = \{r \leq R\}$ с центром в нуле. Воспользуемся сферическими координатами:

$$\iiint\limits_{B_R} \widehat{u}(r) dy_1 dy_2 dy_3 = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} -\frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr =$$
$$= \cos\theta\Big|_0^{\pi} \varphi\Big|_0^{2\pi} r\Big|_0^R = -4\pi R < \infty.$$

Пусть теперь вектор $y = (y_1, y_2, y_3)$. Тогда $\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = \|y\|$. Таким образом $-\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{\|y\|^2}$. Т.к. функция $\widehat{u} = -\frac{1}{\|y\|^2}$— локально интегрируема, то ей соответствует регулярная обобщенная функция из $S'(\mathbb{R}^3)$, действующая на φ из $S(\mathbb{R}^3)$ по формуле

$$\left(-\frac{1}{\|y\|^2}, \varphi\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} -\frac{1}{\|y\|^2} \varphi(y) dy.$$

По определению линейной замены переменных и преобразования Фурье обобщенных функций, а также в силу чётности функции $\widehat{u}$ для любой φ из $S(\mathbb{R}^3)$ выполняется:

$$(2\pi)^3 (u, \varphi) =$$
$$= (2\pi)^3 (u, \widehat{\widehat{\varphi}}) = (u, \widehat{\widehat{\varphi}}(-\cdot)) = (\widehat{u}, \widehat{\varphi}(-\cdot)) = (\widehat{u}(-\cdot), \widehat{\varphi}) = (\widehat{u}, \widehat{\varphi}) =$$
$$= \left(-\frac{1}{\|y\|^2}, \widehat{\varphi}\right) = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\varphi}(y)}{\|y\|^2} dy = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\|y\|^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) e^{-iy\cdot x} dx dy =$$
$$= -\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{B_R} \frac{1}{\|y\|^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) e^{-iy\cdot x} dx dy =$$

$$= -\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) \int\limits_{B_R} \frac{1}{\|y\|^2} e^{-iy\cdot x} dy dx,$$

где $B_R = \{(y_1, y_2, y_3) : \ \|y\| < R\}$.

Найдем $I_R = \int\limits_{B_R} \frac{1}{\|y\|^2} e^{-iy\cdot x} dy$. Сделаем замену координат в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы в новых координатах (y_1', y_2', y_3') ось $0y_3'$ совпадала по направлению с фиксированным вектором x. В такой системе координат вектор x имеет координаты $(0, 0, \|x\|)$. Перейти к такой системе координат можно с помощью поворота исходной системы координат. Так как поворот — это ортогональное преобразование $\mathbb{R}^3$, то длины векторов, углы между векторами и скалярное произведение векторов сохранятся; якобиан замены переменных будет равен 1. Тогда

$$y \cdot x = \|y\| \cdot \|x\| \cdot \cos(\widehat{y, x}) = y_1' \cdot 0 + y_2' \cdot 0 + y_3' \cdot \|x\|.$$

Таким образом,

$$I_R = \int\limits_{B_R} \frac{e^{-iy\cdot x}}{\|y\|^2} dy = \int\limits_{B_R} \frac{e^{-iy_3\|x\|}}{\|y'\|^2} dy'.$$

Перейдем к сферическим координатам: $y_1' = \rho \cos\varphi \sin\theta$, $y_2' = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $y_3' = \rho\cos\theta$; тогда $\|y'\| = \rho$ и

$$I_R = \int\limits_{B_R} \frac{e^{-i\|x\|\rho\cos\theta}}{\rho^2} \rho^2 \sin\theta d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} e^{-i\|x\|\rho\cos\theta} \sin\theta\, d\theta\, d\rho = -2\pi \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} e^{-i\|x\|\rho\cos\theta}\, d\cos\theta\, d\rho =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^R \int\limits_{-1}^{1} e^{-i\|x\|\mu\rho} d\mu\, d\rho,$$

где мы сделали замену переменных: $\cos\theta = \mu, \ \ \theta|_0^\pi \to \mu|_{+1}^{-1}$.

Найдем $I_2 = \int\limits_{-1}^{1} e^{-i\|x\|\mu\rho} d\mu$:

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{1} e^{-i\|x\|\mu\rho} d\mu = \frac{1}{-i\|x\|\rho} \int\limits_{-1}^{1} e^{-i\|x\|\rho\mu} d(-i\|x\|\rho\mu) =$$

$$= \frac{1}{-i\|x\|\rho} e^{-i\|x\|\rho\mu} \Big|_{\mu=-1}^{\mu=1} = \frac{1}{i\|x\|\rho} \left(e^{i\|x\|\rho} - e^{-i\|x\|\rho} \right) = 2\frac{\sin\|x\|\rho}{\|x\|\rho}.$$

Итак, $I_R = 4\pi \int_0^R \frac{\sin\|x\|\rho}{\|x\|\rho} d\rho$.

Предложение. Для любого $\alpha > 0$ интеграл Дирихле $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha\rho}{\rho} d\rho$ равен $\frac{\pi}{2}$.

Таким образом,

$$\lim_{R\to+\infty} I_R = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{B_R} \frac{e^{-iy\cdot x}}{\|y\|} dy = 4\pi \lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^R \frac{\sin\|x\|\rho}{\|x\|\rho} d\rho = \frac{2\pi^2}{\|x\|}.$$

Итак, $(2\pi)^3(u,\varphi) = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{2\pi^2}{\|x\|}\varphi(x)dx$, т.е. $(u,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{-1}{4\pi\|x\|}\varphi(x)dx$, т.е. $u(x) = -\frac{1}{4\pi\|x\|}$ или в сферической системе координат $u(x) = -\frac{1}{4\pi r}$, где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Таким образом, фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$ — это функция $u(r) = \frac{-1}{4\pi r}$. Заметим, что функция $u(M) = \frac{-1}{4\pi r_{MM_0}}$, где $M = (x_1, x_2, x_3)$, $M_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ и $r_{MM_0} = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_2 - x_3^0)^2}$, является решением уравнения $\Delta u = \delta_{M_0}$. Решение такого уравнения будем называть фундаментальным решением с особенностью в точке M_0. Аналогичным образом (см. [1]) показывается, что фундаментальным решением оператора Лапласа в $\mathbb{R}^2$ является функция $u(\rho) = -\frac{1}{2\pi}\ln\rho$, где $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Замечание. Фундаментальное решение оператора L удовлетворяет уравнению $Lu = 0$ во всем пространстве без нуля.

3.4 Метод функции Грина решения краевых задач для уравнения Пуассона

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $M(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u(x_1, \ldots, x_n) \equiv u(M)$, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Определение. Дважды непрерывно дифференцируемая в области Ω функция u (т.е. $u \in C^2(\Omega)$) называется гармонической функцией в области Ω, если этой области она удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

Очевидно, что при $n = 1$ гармоническими являются только функции вида: $u(x) = ax + b$.

Предложение. Фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$ с особенностью в точке M_0: $u(M) = -\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$ — является гармонической функцией в $\mathbb{R}^3 \backslash \{M_0\}$.

Действительно, введём в $\mathbb{R}^3$ сферическую систему координат с центром в точке M_0: $\begin{cases} x_1 - x_1^0 = r \sin\theta \cos\varphi, \\ x_2 - x_2^0 = r \sin\theta \sin\varphi, \\ x_3 - x_3^0 = r \cos\varphi, \end{cases}$

то есть здесь $r \equiv r_{MM_0} = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2}$.

В сферической системе координат оператор Лапласа имеет вид (см. [10], стр. 279-282):

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Так как наша функция $u(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4\pi r}$ дифференцируема при $r \neq 0$ и не зависит от θ и φ, то

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r^2}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{-1}{4\pi r}\right)\right) = \frac{-1}{4\pi r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{-1}{r^2}\right) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0$$

Таким образом, для любой точки $M(x_1, x_2, x_3) \neq M_0$, $\Delta u(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Предложение (формулы Грина). Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ограничена замкнутой гладкой поверхностью $\Sigma \equiv \partial\Omega$, пусть $\vec{n}$— единичный вектор нормали к поверхности Σ, внешний по отношению к области Ω; пусть заданы функции v, u такие, что $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$, т.е v, u— непрерывны вместе с первыми производными в $\overline{\Omega} \equiv \Omega \cup \Sigma$ и имеют непрерывные вторые производные в Ω. Для таких функций справедливы следующие формулы (см.[9]):

1. **Первая формула Грина**:
$$\iiint\limits_{\Omega} v\Delta u\, dV = \iint\limits_{\Sigma} v\frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma - \iiint\limits_{\Omega} \overrightarrow{\nabla u} \cdot \overrightarrow{\nabla v} dV.$$

2. **Вторая формула Грина**:
$$\iiint\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\, dV = \iint\limits_{\Sigma} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma.$$

В правых частях стоят поверхностные интегралы первого рода.

Теорема (третья формула Грина). Пусть $u \in C^1(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$. Тогда справедлива третья (интегральная) формула Грина: $\forall\ M_0 \in \Omega$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma} \left[\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right] d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\Omega} \frac{\Delta u}{r_{MM_0}} dV.$$

Докажем третью формулу Грина с помощью первой и второй формул Грина. Пусть $M_0 \in \Omega$. Пусть $v(M) = \frac{-1}{4\pi r_{MM_0}}$ — фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$ с особенностью в точке M_0, ($\Delta v = \delta_{M_0}$). Окружим точку M_0 сферой Σ_ε радиуса ε с центром в M_0, целиком лежащей в Ω. Пусть B_ε— замкнутый шар, ограниченный сферой Σ_ε. Рассмотрим область $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash B_\varepsilon$. В этой области функция $v(M)$ — гармоническая,

$v \in C^2(\Omega_\varepsilon)$. Пусть $u(M) \in C^1(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$. Применим к функциям $u(M)$ и $v(M)$ вторую формулу Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} v\Delta u\, dV = \iint\limits_{\Sigma} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma + \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma$$

На сфере Σ_ε: $v(M) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon}$; $\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Sigma_\varepsilon} = -\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{\Sigma_\varepsilon} = \frac{-1}{4\pi r^2}\Big|_{\Sigma_\varepsilon} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon^2}$. Тогда по теореме о среднем для поверхностных интегралов, учитывая, что площадь поверхности сферы Σ_ε равна $4\pi\varepsilon^2$, получим:

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \left(u\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma =$$

$$= \left(u(M^*)\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}(M^*)\right) \cdot 4\pi\varepsilon^2 \to u(M_0),\ \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим третью формулу Грина. Теорема доказана.

Теорема (об общем виде решения уравнения Пуассона). Обозначим фундаментальное решение оператора Лапласа с особенностью в M_0 так: $-\frac{1}{4\pi r_{MM_0}} = G(M, M_0)$. Тогда для любого M_0 из Ω решение $u(M)$ уравнения Пуассона $\Delta u = f$ в Ω представляется по третьей формуле Грина в виде:

$$u(M_0) = \underbrace{\iiint_\Omega f(M)G(M, M_0)dV}_{\varphi_0(M_0)} - \underbrace{\iint_\Sigma G(M, M_0)\frac{\partial u}{\partial n}(M)d\sigma}_{\varphi_1(M_0)} +$$

$$+ \underbrace{\iint_\Sigma u\frac{\partial}{\partial n}(M)G(M, M_0)d\sigma}_{\varphi_2(M_0)}.$$

Таким образом, решение уравнения Пуассона в области Ω определяется с помощью последней формулы по фундаментальному решению оператора Лапласа и по значениям решения и его нормальной производной на границе области Ω. Если обозначить интегралы в правой части последней формулы $\varphi_0(M_0)$, $\varphi_1(M_0)$, $\varphi_2(M_0)$, то решение уравнения $\Delta u = f$ запишется в виде: $u(M_0) = \varphi_0(M_0) + \varphi_1(M_0) + \varphi_3(M_0)$. Функции φ_0, φ_1, φ_2 называют соответственно объемным (Ньютовым) потенциалом, потенциалом простого слоя и потенциалом двойного слоя.

Замечание. Мы получили формулу для решения уравнения $\Delta u = f$ в Ω. Как она соотносится с формулой Дюамеля $u = \mathcal{E} * f$ для решения того же уравнения во всём пространстве? Мы рассматривали уравнение $\Delta u = f$ в Ω. Доопределим функцию $u(M)$ и функцию $f(M)$ нулем вне Ω, оставив прежние обозначения. Тогда можно рассмотреть уравнение $\Delta u = f$ во всем пространстве. При этом, для фундаментального решения $\mathcal{E}(M) = \frac{-1}{4\pi r}$ получим:

$$(\mathcal{E} * f)(M_0) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{-f(M)}{4\pi r_{MM_0}} dV = \iiint_{\Omega} \frac{-f(M)}{4\pi r_{MM_0}} dV = \varphi_0(M_0).$$

А что же такое тогда $\varphi_1(M_0)+\varphi_2(M_0)$? Дело в том, что формула $u = \mathcal{E} * f$ дает решение уравнения $\Delta u = g$ в смысле обобщенных функций, то есть в выражении Δu стоят вторые производные в смысле обобщенных функций (ведь после доопределения нулём u терпит разрыв на поверхности Σ, и значит не дифференцируема на ней в обычном смысле). И, по аналогии с формулой $f'_{\text{обобщ}} = f'_{\text{класс}} + \sum_k a_k \delta_{x_k}$, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет скачки величины a_k в точках x_k (см. стр. 21), для функции $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, которая терпит разрыв на поверхности Σ, получим (см. [1], §24 п.1):

$$(\Delta u)_{\text{обобщ}} = (\Delta u)_{\text{класс}} - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \delta_\Sigma - \frac{\partial}{\partial n}(u \cdot \delta_\Sigma).$$

Таким образом, в смысле обобщенных функций классическая задача $\Delta u = f$ в Ω эквивалентна обобщённой задаче $\Delta u = g$ в $\mathbb{R}^3$, где $g = f - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \delta_\Sigma - \frac{\partial}{\partial n}(u \cdot \delta_\Sigma)$, δ_Σ— дельта-функция, сосредоточенная на поверхности Σ (см. п.1.5.). При этом, по формуле Дюамеля

$$u = \mathcal{E} * g =$$
$$= \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} -\frac{1}{4\pi r_{MM_0}} \left(f(M) - \frac{\partial u(M)}{\partial n} \delta_\Sigma(M) - \frac{\partial}{\partial n}(u\delta_\Sigma) \right) dV =$$
$$= \iiint\limits_{\Omega} -\frac{f(M)}{4\pi r_{MM_0}} dV - \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} \left(\frac{-1}{4\pi r_{MM_0}} \right) d\sigma + \iint\limits_{\Sigma} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{-1}{4\pi r_{MM_0}} \right) d\sigma =$$
$$= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2,$$

где последний интеграл получается с помощью формулы интегрирования по частям.

Рассмотрим теперь случай $f \equiv 0$, то есть u — гармоническая в Ω функция. Тогда по третьей формуле Грина

$$u(M_0) = -\iint\limits_{\Sigma} \left[\frac{-1}{4\pi r_{MM_0}} \right] \frac{\partial u}{\partial n}(M)\, d\sigma + \iint\limits_{\Sigma} u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{-1}{4\pi r_{MM_0}} \right] d\sigma. \tag{7}$$

Пусть функция $v(M)$ — произволная гармоническая функция в Ω. Тогда для функций u и v вторая формула Грина имеет вид:

$$0 = \iint\limits_{\Sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma. \tag{8}$$

Сложим формулы (7) и (8) и введём теперь обозначение: $G(M, M_0) = v(M) + \frac{-1}{4\pi r_{MM_0}}$. Получим:

$$u(M_0) = \iint\limits_{\Sigma} G(M, M_0) \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma + \iint\limits_{\Sigma} u(M) \frac{\partial}{\partial n} G(M, M_0) d\sigma. \tag{9}$$

Отметим, что для любой гармонической в Ω функции $v(M)$ наравне с $\frac{-1}{4\pi r_{MM_0}}$ функция $G(M, M_0) = v(M) + \frac{-1}{4\pi r_{MM_0}}$ является фундаментальным решением оператора Лапласа в области Ω с особенностью в M_0. Действительно, для любой точки $M \in \Omega$

$\Delta G(M, M_0) = \Delta v(M) + \Delta(\frac{-1}{4\pi r_{MM_0}}) = 0 + \delta_{M_0}(M).$

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема (о представлении гармонической функции). Всевозможные решения уравнения Лапласа в области Ω определяются по формуле (9) через всевозможные фундаментальные решения оператора Лапласа в области Ω и по своему поведению на границе области.

Для решения конкретной краевой задачи для уравнения Лапласа в области Ω необходимо подобрать подходящее фундаментальное решение $G(M, M_0)$ так, чтобы формула (9) задавала решение именно поставленной краевой задачи. Такое "подходящее" фундаменальное решение называется функцией Грина поставленной задачи, а нахождение функции Грина, а значит и решения задачи по формуле (9), называется методом функции Грина. В частности, чтобы решить задачу Дирихле $\begin{cases} \Delta u(M) = 0, & M \in \Omega, \\ u(M) = F(M), & M \in \Sigma, \end{cases}$ надо найти такую функцию Грина, что $G(M, M_0) = 0$ при $M \in \Sigma$. Тогда решение задачи Дирихле может быть найдено по формуле (11), которая преобретает следующий вид:

$$u(M_0) = \iint_\Sigma F(M) \frac{\partial}{\partial n} G(M, M_0) d\sigma. \tag{12}$$

Пример. Пусть $\Omega = \{M(x, y, z) : z > 0\} \subset \mathbb{R}^3$, её граница Σ — плоскость $z = 0$. Тогда $n = (0, 0, -1)$ — внешняя нормаль, причём $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial z}$. Решим задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y, z) = 0, & M \in \Omega, \\ u(x, y, 0) = F(x, y), & M \in \Sigma. \end{cases}$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Рассмотрим точку $M_0^*(x_0, y_0, -z_0)$, симметричную точке M_0 относительно плоскости $z = 0$. В качестве $v(M)$ возьмём функцию $v(M) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0^*}}$, где $r_{MM_0^*} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}$. Эта функция — фундаментальное решение оператора Лапласа с особенностью в точке M_0^*, а значит, $v(M)$ гармоническая в $\Omega \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{M_0^*\}$.

Рассмотрим $G(M, M_0) = -\frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + \frac{1}{4\pi r_{MM_0^*}}$. Так как для любой точки M плоскости $z = 0$ верно равенство $r_{MM_0} = r_{MM_0^*}$, то $G(M, M_0) = 0$ при $M \in \Sigma$. Таким образом, $G(M, M_0)$ действительно функция Грина рассматриваемой задачи Дирихле. При этом, $\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_\Sigma = -\frac{\partial G}{\partial z}\Big|_\Sigma = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{-1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]\Bigg|_{z=0} = \frac{2z_0}{4\pi[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}$. Таким образом, по формуле (12) решение нашей задачи Дирихле имеет вид:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{F(x,y)dxdy}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}.$$

Эта формула называется интегралом Пуассона для полупространства.

Глава 4

Метод формул Фейнмана

4.1 Введение

В настоящей главе рассматриваются эволюционные уравнения следующего вида: $\frac{\partial f}{\partial t}(t,q) = Lf(t,q)$, где L некоторый линейный оператор, действующий на функцию $f(t,\cdot)$ переменной $q \in Q$, Q — некоторое пространство, которое мы будем называть конфигурационным пространством системы, описываемой этим уравнением, $t \geq 0$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t,q) = Lf(t,q), \\ f(0,q) = f_0(q). \end{cases} \tag{1.1}$$

Если L — это ограниченный оператор на некотором банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$ функций переменной q и $f_0 \in X$, то решение задачи Коши представимо в виде $f(t,q) = (e^{tL}f_0)(q)$, где оператор e^{tL} определяется как сумма ряда $e^{tL} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}L^n$, причем ряд сходится в равномерной операторной топологии. При этом, $\|e^{tL}\| \leq e^{t\|L\|}$, то есть оператор e^{tL} снова является ограниченным для любого $t \geq 0$. Кроме того, как видно из определения e^{tL}, справедливы соотношения $e^{tL} \circ e^{sL} = e^{(t+s)L}$ и $e^{0L} = Id$, где Id — тождественный оператор на X.

Как правило, однако, оператор L не является ограниченным. В этом случае приведенная выше схема решения задачи Коши (1.1) обобщается описанным ниже образом. Пусть символ $\mathcal{L}(X)$ обозначает пространство всех непрерывных линейных операторов на X с сильной операторной топологией. Если $Dom(L) \subset X$ — это линейное подпространство и $L : Dom(L) \to X$ — линейный оператор, то $Dom(L)$ означает область определения L. Однопараметрическое семейство $(T_t)_{t\geq 0}$ ограниченных линейных операторов $T_t : X \to X$ называется *сильно непрерывной полугруппой*, если $T_0 = Id$, $T_{s+t} = T_s \circ T_t$ для всех $s, t \geq 0$ и $\lim_{t\to 0} \|T_t\varphi - \varphi\|_X = 0$ для всех $\varphi \in X$. Если $(T_t)_{t\geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$, то *генератором* этой полугруппы называется оператор L, определенный по формуле

$$L\varphi := \lim_{t\to 0} \frac{T_t\varphi - \varphi}{t}$$

с областью определения

$$Dom(L) := \left\{ \varphi \in X \,\Big|\, \quad \lim_{t\to 0} \frac{T_t\varphi - \varphi}{t} \quad \exists \quad \text{как сильный предел} \right\}.$$

Таким образом, если L — ограниченный оператор на X, то $T_t = e^{tL}$ — это сильно непрерывная полугруппа на X с генератором L. И в случае, если генератор L — неограниченный оператор, будем иногда использовать обозначение e^{tL} для соответствующей полугруппы.

Теорема 4.1. *Пусть* $(L, Dom(L))$ *плотно определенный на банаховом пространстве* X *оператор с непустым резольвентным множеством*[1]. *Задача Коши* (1.1) *имеет единственное*

[1] *Резольвентным множеством* оператора L называется множество $\rho(L)$ всех таких

непрерывно дифференцируемое по $t \in [0, \infty)$ *решение* f *для каждого начального условия* $f_0 \in Dom(L)$ *тогда и только тогда, когда* $(L, Dom(L))$ *является генератором некоторой сильно непрерывной полугруппы* $(T_t)_{t \geq 0}$ *на* X*. При этом решение такой задачи Коши* (1.1) *для каждой* $f_0 \in Dom(L)$ *представляется в виде* $f(t, q) = T_t f_0(q)$*.*

Замечание 4.1. i) Для всех начальных условий $f_0 \in X$ функцию $f(t, q) = T_t f_0(q)$ по-прежнему будем называть решением задачи Коши (1.1) — в англоязычной литературе в этом случае используется термин “mild solution”

ii) Отметим, что если $(T_t)_{t \geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве X, то существуют константы $a \geq 0$, $M \geq 1$ такие, что $\|T_t\| \leq M e^{at}$ для всех $t \geq 0$ (см. [12], стр.4). Кроме того, если сильно непрерывная полугруппа $(T_t)_{t \geq 0}$ удовлетворяет неравенству $\|T_t\| \leq M e^{at}$, то семейство $(S_t)_{t \geq 0}$, где $S_t = e^{-at} T_t$, также является сильно непрерывной полугруппой на X, причём $\|S_t\| \leq M$ для всех $t \geq 0$. Введя на X новую норму $||| \cdot |||$, $||| f ||| = \sup_{t \geq 0} \|S_t f\|$, получим, что $\|f\| \leq ||| f ||| \leq M \|f\|$, то есть нормы $\| \cdot \|$ и $||| \cdot |||$ эквивалентны. Причём по отношению к норме $||| \cdot |||$ полугруппа $(S_t)_{t \geq 0}$ является полугруппой сжимающих отображений.

iii) Если $(T_t)_{t \geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве X с генератором $(L, \mathrm{Dom}(L))$, то справедливы также следующие утверждения:

комплексных чисел λ, для которых оператор $R(\lambda, L) = (\lambda \, Id - L)^{-1}$ является ограниченным оператором в X; семейство $\{R(\lambda, L)\}_{\lambda \in \rho(L)}$ называется *резольвентой* оператора L

(a) Если $\varphi \in X$ и $t \geq 0$, то $\int_0^t T_s f ds \in \mathrm{Dom}(L)$ и

$$T_t f - f = L \int\limits_0^t T_s f ds.$$

(b) Если $f \in \mathrm{Dom}(L)$ и $t \geq 0$, то $T_t f \in \mathrm{Dom}(L)$ и

$$\frac{d}{dt} T_t f = L T_t f = T_t L f.$$

(c) Если $f \in \mathrm{Dom}(L)$ и $t \geq 0$, то

$$T_t f - f = \int\limits_0^t L T_s f ds = \int\limits_0^t T_s L f ds.$$

(d) Генератор $(L, \mathrm{Dom}(L))$ является замкнутым оператором, множество $\mathrm{Dom}(L)$ всюду плотно в X.

Итак, решение задачи Коши (1.1) равносильно построению полугруппы $(T_t)_{t \geq 0}$ на X с заданным генератором L. Как правило, полугруппу $(T_t)_{t \geq 0}$ не удается получить в явном виде, но удается различными методами ее аппроксимировать. Опишем метод приближения, основанный на теореме Чернова.

Теорема 4.2 (Чернова). *Пусть X банахово пространство, $F : [0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$ — (сильно) непрерывное отображение такое, что $F(0) = Id$ и $\|F(t)\| \leq e^{at}$ для некоторой константы $a \in [0, \infty)$ и всех $t \geq 0$. Пусть D — это линейное подпространство $Dom(F'(0))$ такое, что сужение оператора $F'(0)$ на D замыкаемо. Пусть $(L, Dom(L))$ — соответствующее замыкание. Если $(L, Dom(L))$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $(T_t)_{t \geq 0}$, то для всех $t_0 > 0$ последовательность операторов $(F(t/n))^n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к $(T_t)_{t \geq 0}$ при $n \to \infty$ в* *сильной операторной топологии равномерно по* $t \in [0, t_0]$, *то есть* $T_t = \lim_{n\to\infty}(F(t/n))^n$.

Заметим, что производная в нуле функции $F : [0, \varepsilon) \to \mathcal{L}(X)$, $\varepsilon > 0$, — это линейное отображение $F'(0) : Dom(F'(0)) \to X$ такое, что

$$F'(0)g := \lim_{t\searrow 0} \frac{F(t)g - F(0)g}{t},$$

где $Dom(F'(0))$ — векторное пространство всех тех элементов $g \in X$, для которых этот предел существует.

Семейство операторов $(F(t))_{t\geq 0}$ называется *эквивалентным по Чернову* полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$ (будем обозначать это так: $F(t) \sim T_t$), если это семейство удовлетворяет всем требованиям теоремы Чернова по отношению к этой полугруппе, то есть по теореме Чернова в пространстве $\mathcal{L}(X)$ локально равномерно по t выполняется равенство

$$T_t = \lim_{n\to\infty}(F(t/n))^n. \tag{1.2}$$

Это равенство мы будем называть *формулой Фейнмана.* Мы используем такую терминологию, так как во многих случаях операторы $F(t)$ оказываются интегральными операторами, то есть в правой части формулы Фейнмана стоит предел кратных интегралов при возрастании кратности к бесконечности, а именно Ричард Фейнман впервые рассмотрел конструкцию функционального интеграла как предела обыкновенных многократных интегралов по пространствам неограниченно возрастающей размерности. *Любое представление решения начальной (или начально–краевой) задачи для эволюционного уравнения (или, эквивалентно, представление полугруппы, разрешающей* *данную задачу) в виде предела кратных интегралов при возрастании кратности к бесконечности мы будем называть формулой Фейнмана.* Такие представления решений эволюционных уравнений во многих случаях представляют собой кратные интегралы только от элементарных функций и, следовательно, могут быть использованы для непосредственных вычислений и моделирования рассматриваемой динамики.

Пример 4.1. Пусть операторы L_1, L_2, $L_1 + L_2$ являются генераторами сильно непрерывных полугрупп e^{tL_1}, e^{tL_2} и $e^{t(L_1+L_2)}$ на некотором банаховом пространстве X соответственно, причем операторы L_1 и L_2 не коммутируют. Тогда $e^{tL_1} \circ e^{tL_2} \neq e^{t(L_1+L_2)} \neq e^{tL_2} \circ e^{tL_1}$. Тем не менее, можно показать, что

$$e^{tL_1} \circ e^{tL_2} \sim e^{t(L_1+L_2)}, \qquad e^{tL_2} \circ e^{tL_1} \sim e^{t(L_1+L_2)},$$

и значит, из теоремы Чернова следует равенство

$$e^{t(L_1+L_2)} = \lim_{n\to\infty} \left[e^{\frac{t}{n}L_1} \circ e^{\frac{t}{n}L_2}\right]^n = \lim_{n\to\infty} \left[e^{\frac{t}{n}L_2} \circ e^{\frac{t}{n}L_1}\right]^n.$$

Последняя формула широко известна как формула Троттера.

Пример 4.2. Пусть L — ограниченный оператор. Тогда, можно показать, что $Id + tL \sim e^{tL}$, и значит, по теореме Чернова

$$e^{tL} = \lim_{n\to\infty} \left(Id + \frac{t}{n} L \right)^n,$$

что обобщает классическую формулу анализа

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Более полезна, однако, следующая формула (см. [12]), справедливая и в случае неограниченного генератора полугруппы:

$$e^{tL} = \lim_{n\to\infty} \left(Id - \frac{t}{n} L \right)^{-n} \equiv \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, L\right) \right]^n,$$

где $R(\lambda, L)$ — резольвента оператора L.

Замечание 4.2. Конечно же, для одной и той же полугруппы e^{tL} существует множество эквивалентных ей по Чернову семейств операторов. Например, если $F(t) \sim e^{tL}$, то для любого ограниченного оператора B имеем также $\left[F(t) + t^2 B\right] \sim e^{tL}$. Таким образом, в множестве семейств, эквивалентных по Чернову искомой полугруппе, естественно выбирать оптимальные для проведения непосредственных вычислений.

4.2 Формулы Фейнмана для полугрупп, порождённых аддитивными возмущениями генераторов

Теорема 4.3. *Пусть X — банахово просранство с нормой $\|\cdot\|_X$. Пусть $(T_k(t))_{t\geq 0}$, $k = 1, \dots, m$, — сильно непрерывные полугруппы на X с генераторами L_k соответственно. Предположим, что оператор $L = L_1 + \dots + L_m$ с областью определения $Dom(L) = \cap_{k=1}^m Dom(L_k)$ замыкаем и это замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы $(T(t))_{t\geq 0}$ на X. Пусть $(F_k(t))_{t\geq 0}$, $k = 1, \dots, m$, — семейства операторов на X, эквивалентные по Чернову полугруппам $(T_k(t))_{t\geq 0}$ соответственно, т.е. для каждого $k \in \{1, \dots, m\}$ выполнены соотношения: $F_k(0) = Id$, $\|F_k(t)\| \leq e^{a_k t}$ для некоторого $a_k > 0$ и существует множество $D_k \subset Dom(L_k)$, являющееся существенной областью определения оператора L_k, такое, что $\lim_{t\to 0} \left\|\frac{F_k(t)\varphi - \varphi}{t} - L_k\varphi\right\|_X = 0$ при всех $\varphi \in D_k$. Если существует множество $D \subset D_1 \cap .. \cap D_m$, являющееся существенной областью определения для оператора L, то семейство $(F(t))_{t\geq 0}$, где $F(t) = F_1(t) \circ \dots \circ F_m(t)$, эквивалентно по*

Чернову полугруппе $(T(t))_{t\geq 0}$ и, следовательно, формула Фейнмана

$$T_t = \lim_{n\to\infty} \big[F(t/n)\big]^n,$$

где предел понимается как предел в сильной операторной топологии, справедлива локально равномерно относительно $t \geq 0$.

Доказательство. Очевидно, что семейство $(F(t))_{t\geq 0}$ сильно непрерывно, $F(0) = Id$ и

$$\|F(t)\| \leq \|F_1(t)\| \cdot \ldots \cdot \|F_m(t)\| \leq e^{(a_1+\cdots+a_m)t}.$$

Пусть множество $D \subset D_1 \cap .. \cap D_m$ является существенной областью определения для оператора L. Тогда для любого $\varphi \in D$ имеем

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\left\|\frac{F(t)\varphi-\varphi}{t} - L\varphi\right\|_X = \\
&\quad= \lim_{t\to 0}\left\|\frac{F_1(t)\circ\cdots\circ F_m(t)\varphi-\varphi}{t} - L_1\varphi - \cdots - L_m\varphi\right\|_X = \\
&\quad= \lim_{t\to 0}\left\|F_1(t)\circ\cdots\circ F_{m-1}(t)\circ\frac{F_m(t)\varphi-\varphi}{t} - L_m\varphi + \right.\\
&\qquad\qquad\left. + \frac{F_1(t)\circ\cdots\circ F_{m-1}(t)\varphi-\varphi}{t} - L_1\varphi - \cdots - L_{m-1}\varphi\right\|_X \leq \\
&\quad\leq \lim_{t\to 0}\left\|\frac{F_1(t)\circ\cdots\circ F_{m-1}(t)\varphi-\varphi}{t} - L_1\varphi - \cdots - L_{m-1}\varphi\right\|_X \leq \\
&\quad\leq \cdots \leq \lim_{t\to 0}\left\|\frac{F_1(t)\varphi-\varphi}{t} - L_1\varphi\right\|_X = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Таким образом, все требования теоремы Чернова выполнены и $F(t) \sim T_t$.

Отметим, что если некоторые из полугрупп $(T_k(t))_{t\geq 0}$ известны явно и если $\|T_k(t)\| \leq e^{a_k t}$ для некоторого $a_k \geq 0$, то в формулах Фейнмана можно взять $F_k(t) \equiv T_k(t)$.

Пример 4.3 (возмущения шрёдингеровского типа). Пусть $X = C_\infty(\mathbb{R}^d)$ — пространство всех непрерывных на $\mathbb{R}^d$ функций, убывающих на бесконечности к нулю; это банахово пространтсво с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|.$$

Пусть $(T_t)_{t\geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа с генератором $(L,\, Dom(L))$, $(F(t))_{t\geq 0}$ — семейство операторов, эквивалентное по Чернову полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$. Пусть $c(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ непрерывная ограниченная сверху функция. Тогда функция $e^{tc(\cdot)}$ является ограниченной при всех $t \geq 0$. При этом оператор c умножения на функцию $c(\cdot)$ плотно определен в пространстве X (так как корректно определён, например, на множестве непрерывных финитных функций) и порождает сильно непрерывную полугруппу e^{tc} операторов умножения на функцию $e^{tc(\cdot)}$. Рассмотрим оператор $L + c$, где $Dom(L + c) = Dom(L) \cap Dom(c)$ и $(L + c)\varphi(q) = L\varphi(q) + c(q)\varphi(q)$ для всех $\varphi \in Dom(L + c)$. Предположим, что этот оператор порождает сильно непрерывную полугруппу[2] $(T_t^{L+c})_{t\geq 0}$ на $C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Тогда по теореме 4.3 справедлива формула Фейнмана

$$T_t^{L+c} = \lim_{n\to\infty} \left[e^{\frac{t}{n}c} \circ F(t/n)\right]^n.$$

В частности, $T_t^{L+c} = \lim_{n\to\infty} \left[e^{\frac{t}{n}c} \circ T_{t/n}\right]^n$, если $\|T_t\| \leq e^{at}$ для некоторого $a \geq 0$. Аналогичным образом показывается спра-

[2]Такое предположение справедливо, например, если функция $c(\cdot)$ является ограниченной или если оператор умножения на функцию $c(\cdot)$ является L-ограниченным оператором (определение дано на стр. 76).

ведливость этих формул Фейнмана и в других банаховых пространтсвах.

Пример 4.4 (возмущения градиентного типа). Пусть снова $X = C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Пусть $b(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ограниченное непрерывное векторное поле и $\nabla = (\frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial q_d})$. Рассмотрим оператор $b\nabla$, где $b\nabla\varphi(q) = b(q) \cdot \nabla\varphi(q)$ для всех $\varphi \in D(b\nabla)$. Рассмотрим семейство $(S(t))_{t\geq 0}$ операторов на $C_\infty(\mathbb{R}^d)$, определенных по формуле:

$$S(t)\varphi(q) = \varphi(q + tb(q)). \tag{2.1}$$

Отметим, что в случае постоянного векторного поля $b(\cdot) \equiv b \in \mathbb{R}^d$ семейство $(S(t))_{t\geq 0}$ совпадает с полугруппой сдвигов $(e^{tb\nabla})_{t\geq 0}$. Если векторное поле $b(\cdot)$ уже не является постоянным, то семейство $(S(t))_{t\geq 0}$ не является полугруппой, но эквивалентно по Чернову полугруппе $e^{tb\nabla}$, порожденной оператором $b\nabla$. Действительно, $S(0) = Id$, $\|S(t)\| = 1$ и для всех $\varphi \in D(b\nabla) \cap C^2(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\left\|\frac{S(t)\varphi - \varphi}{t} - b\nabla\varphi\right\|_\infty = \\
&\quad = \lim_{t\to 0}\sup_{q\in\mathbb{R}^d}\left|\frac{\varphi(q + tb(q)) - \varphi(q)}{t} - b(q)\cdot\nabla\varphi(q)\right| \\
&\quad \leq \lim_{t\to 0}\ t\left(\sup_{q\in\mathbb{R}^d,\, s\in[0,t]}\left|b(q)\cdot \operatorname{Hess}\varphi(q + sb(q))b(q)\right|\right) \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

где $\operatorname{Hess}\varphi$ это гессиан φ. Таким образом, $\frac{d}{dt}S(t)\big|_{t=0}\varphi = b\nabla\varphi$ для любой $\varphi \in D(b\nabla) \cap C^2(\mathbb{R}^d)$. Отметим, что множество $\varphi \in D(b\nabla) \cap C^2(\mathbb{R}^d)$ является существенной областью определения оператора $b\nabla$.

Пусть теперь $(T_t)_{t\geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа с генератором $(L, Dom(L))$ и семейство $(F(t))_{t\geq 0}$ эквивалентно по

Чернову полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$. Рассмотрим оператор $L + b\nabla$: $(L+b\nabla)\varphi(q) = L\varphi(q)+b(q)\cdot\nabla\varphi(q)$ для всех $\varphi \in Dom(L+b\nabla) = Dom(L)\cap Dom(b\nabla)$. Предположим, что оператор $L+b\nabla$ порождает сильно непрерывную полугруппу $(T_t^{L+b\nabla})_{t\geq 0}$ на $C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Отметим, что предположение выполняется, например, если оператор $b\nabla$ является L-*ограниченным*, т.е. $Dom(L) \subset Dom(b\nabla)$ и для всех $\varphi \in Dom(L)$ и некоторых $\lambda \in [0,1)$, $\gamma \geq 0$ выполняется оценка

$$\|b\nabla\varphi\|_X \leq \lambda\|L\varphi\|_X + \gamma\|\varphi\|_X$$

В частности, $b\nabla$ является L-ограниченным для $L = -(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha \in (1,2]$.

По теореме 4.3 семейство $(S(t) \circ F(t))_{t\geq 0}$ эквивалентно по Чернову полугруппе $(T_t^{L+b\nabla})_{t\geq 0}$ и справедлива формула Фейнмана

$$T_t^{L+b\nabla} = \lim_{n\to\infty} \big[S(t/n) \circ F(t/n)\big]^n.$$

4.3 формула Фейнмана для возмущений полугрупп, порожденных лапласианом

Пример 4.5 (Формула Фейнмана для параболического уравнения второго порядка). Пусть снова $X = C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Пусть $b(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ограниченное непрерывное векторное поле, $c(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Рассмотрим оператор Лапласа $L = \frac{1}{2}\Delta$, $Dom(L) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ — пространство бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^d$ функций с компактным носителем. Замыкание этого оператора порождает полугруппу $(T_t)_{t\geq 0}$, разрешающую задачу Коши для уравнения теплопроводности $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta f$;

$$T_t\varphi(q) = (2\pi t)^{(-d/2)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|q-y|^2}{2t}} \varphi(y)dy.$$

Тогда для полугруппы $(T_t^L)_{t\geq 0}$, порожденной оператором

$$L := \frac{1}{2}\Delta + b\nabla + c,$$

по теореме 4.3 справедлива формула Фейнмана:

$$T_t^L\varphi(q_0) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2\pi t/n)^{(-dn/2)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{t}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} c(q_{k-1})} \quad e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|q_{k-1}+b(q_{k-1})t/n-q_k|^2}{2t/n}} \times$$

$$\times\, \varphi(q_n)dq_1\cdots dq_n.$$

Так как $|x+b(x)t-y|^2 = |x-y|^2 + 2tb(x)\cdot(x-y) + t^2|b(x)|^2$, то

$$T_t^L\varphi(q_0) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} c(q_{k-1})} e^{-\sum_{k=1}^{n} b(q_{k-1})\cdot(q_{k-1}-q_k)} \times$$

$$\times e^{-\frac{t}{2n}\sum_{k=1}^{n}|b(q_{k-1})|^2} p_{t/n}^{BM}(q_0-q_1)\cdots p_{t/n}^{BM}(q_{n-1}-q_n)\varphi(q_n)dq_1\cdots dq_n,$$

где $p_t^{BM}(x) = (2\pi t)^{(-d/2)}\exp\left\{-\frac{|x|^2}{2t}\right\}$ это переходная плотность вероятности броуновского движения.

Пример 4.6 (формула Фейнмана для динамики квантовой частицы в потенциальном и магнитном полях). Пусть $X = L_2(\mathbb{R}^d)$. Рассмотрим оператор $L = \frac{i}{2}\Delta$, $Dom(L) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Замыкание этого оператора порождает (по теореме IX.27 из [7] и теореме Стоуна) (полу)группу $(T_t \equiv e^{\frac{it}{2}\Delta})_{t\geq 0}$, разрешающую задачу Коши для уравнения Шрёдингера

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta f;$$

$$T_t\varphi(q) = (2\pi i t)^{(-d/2)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\frac{|q-y|^2}{2t}} \varphi(y)dy,$$

где правая часть понимается в регуляризованном смысле (см. [7], формула IX.31). Пусть $b \in \mathbb{R}^d$, $c(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Тогда замыкание определенного на $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ оператора

$$L = \frac{i}{2}\Delta - b\nabla - ic$$

порождает (по теореме X.22 из [7] и теореме Стоуна) сильно непрерывную (полу)группу $(T_t^L)_{t\geq 0}$, для которой по теореме 4.3 справедлива формула Фейнмана

$$T_t^L\varphi(q_0) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[e^{-i\frac{t}{n}c} \circ e^{-\frac{t}{n}b\nabla} \circ T_{t/n}\right]^n \varphi(q_0) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(2\pi it)^{(-dn/2)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \dots \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\frac{t}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} c(q_{k-1})} e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{|q_k - q_{k-1} + \frac{t}{n}b|^2}{2t/n}} \varphi(q_n)dq_1\dots dq_n,$$

причем интегралы снова понимаются в регуляризованном смысле.

Литература

[1] Владимиров В.С., Уравнения математической физики, Наука, 1988.

[2] Волков И.К., Канатников А.Н., Интегральные преобразования и операционное исчисление, Издательство МГТУ, 1996.

[3] Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1972.

[4] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1973.

[5] Лошкарёв А.И., Облакова Т.В., Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора и задача Коши, Издательство МГТУ, 2006.

[6] Мартинсон Л.К., Малов Ю.И., Дифференциальные уравнения математической физики, Издательство МГТУ, 2006.

[7] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, М.: Мир, 1978.

[8] Смирнов В.И., Курс высшей математики, том 2, М.: Наука, 1967.

[9] Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В., Лекции по математической физике. — М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. — 416с.

[10] Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, Наука, 2004 (5-е издание).

[11] Шостак Р.Я., Операционное исчисление, М.: Высшая школа, 1972.

[12] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag new York 1983.