УДК 62-50

ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧЕ СЛЕДОВАНИЯ КОЛЕСНОГО РОБОТА ПО ЗАДАННОМУ ПУТИ

Андрианова О. Г., Касаткина Т. С.

Москва, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Аннотация

Решается задача следования колесного робота по заданному пути. Построена нормальная форма аффинной системы. Проведен анализ нулевой динамики системы. Для уточнения замены переменных введена подвижная система координат, связанная с роботом. Проанализирована область применимости замены декартовых координат на криволинейные.

Введение

Задача следования колесного робота по заданному пути привлекает внимание многих исследователей в связи с проблемами, возникающими в сельском хозяйстве, строительстве, при добыче полезных ископаемых.

Требуется, чтобы колесный робот из некоторого начального положения достиг заданной линии движения (заданного пути) и двигался вдоль нее с постоянной скоростью. При движении по заданному пути решается задача стабилизации.

Известны различные подходы к решению задачи следования по заданному пути. Так, в [1, 2] соответствующее управление находится с использованием кинематической модели на основе преобразования системы к цепной форме. В [3] предложен метод преобразования системы по части переменных к специальному виду, допускающему линеаризацию обратной связью.

Целью настоящей работы является модификация предложенного в [3] подхода с точки зрения теории нормальной формы аффинной системы [4], анализ области применимости замены декартовых координат на криволинейные.

Кинематическая модель колесного робота

Рис. 1. Модель колесного робота

Следуя [3], приведем модель движения колесного робота, учитывающую динамику привода рулевого механизма. Робот представлен абсолютно твердой платформой и колесной системой с четырьмя недеформируемыми колесами.

Положение робота на плоскости задается двумя координатами целевой точки $O(x_o, y_o)$ и ориентацией продольной оси робота, определяемой углом θ_t между положительным направлением оси X_A и вектором линейной скорости v.

Введем "средний" угол поворота передних колес δ с помощью формулы

$$\operatorname{tg}\delta = ul, \tag{1}$$

где u — мгновенная кривизна пути, l — расстояние между передними и задними колесами.

Кинематические уравнения движения робота имеют вид

$$\begin{gathered}\dot{x}_o = v\cos\theta_t,\\ \dot{y}_o = v\sin\theta_t,\\ \dot{\theta}_t = v\,u(\delta),\\ \dot{\delta} = V.\end{gathered} \tag{2}$$

Последнее уравнение описывает динамику привода передних колес. На угол поворота и управление наложены ограничения

$$|V| \le \overline{V},\ |\delta| \le \overline{\delta}.$$

Преобразование системы к нормальной форме и анализ применимости замены переменных

В [3] предъявлена замена по части переменных, приводящая систему к специальному виду. Такой подход представляется не совсем верным, поскольку в этом случае решается задача стабилизации системы

Рис. 2. Расчетная схема

на некотором многообразии, что без анализа характера движения по этому многообразию не дает полного представления о поведении системы, замкнутой предложенным управлением. Поэтому представляется целесообразным получить расчетные формулы для стабилизирующего управления на основе теории нормальной формы аффинной системы [4].

Напомним, что O — точка робота, которая должна следовать по заданному пути. В качестве выхода выберем расстояние от точки $O(x_o, y_o)$ до ближайшей точки заданного пути $M(x_m, y_m)$. $R(s)$ — мгновенный центр кривизны пути в точке M, $RM = r(s) = 1/c(s)$, $r(s)$ — радиус кривизны пути в точке M, $c(s)$ — значение кривизны в точке M, θ_c — угол между касательной к пути в точке M и осью X_A, $\tilde{\theta} = \theta_t - \theta_c$. Полагаем, что при движении робота вдоль целевой кривой в положительном направлении выполняется

$$|\tilde{\theta}| < \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Введем систему координат Ozp, ось z направлена ортогонально касательной к заданному пути в точке M, а ось p — по касательной к пути в этой точке в направлении движения.

В качестве независимой переменной возьмем длину пути ξ, пройденного роботом до текущего момента времени, и заменим производные по времени в уравнениях (2) производными по ξ.

Первой фазовой переменной выберем z_1 — расстояние от точки O до точки M, которое будем вычислять с учетом направления движения робота вдоль пути $z_1 = (\sigma)\,|OM|$, где $\sigma = -y'_s\,(x_m - x_o) + x'_s\,(y_m - y_o)$.

Укажем такую замену переменных z, η, для которой возможна линеаризация системы (2) по части переменных статической обратной связью по состоянию.

Так как $\dot{z}_1 = v\sin\tilde{\theta}$, то $z'_1 = \dfrac{\dot{z}_1}{\dot{\xi}} = \sin\tilde{\theta}$. В качестве второй фазовой переменной примем $z_2 = \sin\tilde{\theta}$. Дифференцируя обе части этого равенства по ξ, получим

$$z'_2 = \cos\tilde{\theta}\left(u - \frac{c\cos\tilde{\theta}}{1 + c\,z_1}\right). \tag{4}$$

Определим третью фазовую переменную формулой

$$z_3 = \cos\tilde{\theta}\left(u - \frac{c\cos\tilde{\theta}}{1 + c\,z_1}\right) \tag{5}$$

и продифференцируем ее по ξ

$$z'_3 = \cos\tilde{\theta}\,u' - f, \tag{6}$$

где

$$f = \frac{z_2 z_3^2}{1 - z_2^2} + \frac{c'_s\cos^3\tilde{\theta}}{(1 + c\,z_1)^2} - \frac{c\,z_2 z_3}{1 + c\,z_1} - \frac{c^2\cos^2\tilde{\theta} z_2}{(1 + c\,z_1)^2} - \frac{c\,c'_s\,z_1\cos^3\tilde{\theta}}{(1 + c\,z_1)^3},\ \beta = \frac{\cos\tilde{\theta}\left(1 + u^2\,l^2\right)}{v\,l},$$

$$u = \frac{z_3}{\cos\tilde{\theta}} + \frac{c\cos\tilde{\theta}}{1 + c\,z_1},\ u' = \frac{\dot{u}}{\dot{\xi}} = \frac{\dot{u}}{v} = \frac{V}{v}\left(\frac{1}{l} + u^2 l\right).$$

Заметим, что $\beta \neq 0$, если $\cos\tilde{\theta} \neq 0$. Для выхода $y = z_1$ в указанной области определена относительная степень выхода, равная 3. Следовательно, в окрестности каждой точки области замена по части переменных z не вырождена [5]. Будем предполагать, что замена переменных определена во всей области.

Пусть $\eta = s$, тогда $\eta' = \dfrac{\cos\tilde{\theta}}{1 + c\,z_1}$.

Таким образом, нормальная форма системы (2) по выходу $y = z_1$ в координатах z, η "в виде заготовки" запишется

$$\begin{aligned} z'_1 &= z_2,\\ z'_2 &= z_3,\\ z'_3 &= \beta\,V - f,\\ \eta' &= \frac{\cos\tilde{\theta}}{1 + c\,z_1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Последнее уравнение (7) не содержит управления, что существенно облегчает анализ нулевой динамики системы. Нулевая динамика при $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$ имеет вид

$$\eta' = \frac{\cos\tilde{\theta}}{1 + c\,z_1} = 1,$$

так как $z_1' = z_2 = \sin\tilde{\theta} = 0$, $\tilde{\theta} = 0$, $\cos\tilde{\theta} = 1$. Для интерпретации полученного результата перейдем от производной по ξ к производной по t

$$\dot{\eta} = v\,\eta' = v. \tag{8}$$

Выражение (8) описывает движение с постоянной скоростью по желаемому пути.

Переход к новым координатам z, η является локальной заменой переменных, если выполнено условие

$$1 + c\,z_1 \neq 0. \tag{9}$$

Если решается задача следования вдоль прямой, то замена переменных является не только локальной, но и глобальной. Если же заданный путь представляет собой окружность радиуса r, то (9) принимает вид

$$z_1 \neq r. \tag{10}$$

Синтез закона управления

Поскольку коэффициент β при управлении не обращается в ноль в области $\cos\tilde{\theta} \neq 0$, воспользуемся методом линеаризации по части переменных для построения стабилизирующего управления

$$V = \frac{f - \gamma(z)}{\beta}, \tag{11}$$

где $\gamma(z) = b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3$.

Подходящим выбором вектора $b = [b_1,\, b_2,\, b_3]^T$ матрицу A всегда можно сделать гурвицевой, обеспечивая асимптотическую устойчивость замкнутой системы в переменных z.

Ограничение на управление $|V| \leq \bar{V}$ примем в виде

$$V = \begin{cases} -\bar{V}, & \text{если } V \leq -\bar{V}; \\ V, & \text{если } |V| < \bar{V}; \\ \bar{V}, & \text{если } V \geq \bar{V}. \end{cases} \tag{12}$$

При этом нулевая динамика не является устойчивой, однако обеспечивается решение задачи движения вдоль заданного пути с постоянной скоростью.

Результаты моделирования

Рассмотрим случай, когда заданный путь аппроксимирован нормальным кубическим сплайном, проходящим через заданные контрольные точки.

Примем линейную скорость робота равной 1.70 м/с, длину — 2.45 м. Зададим начальные условия равными $x(0) = 15.00$ м, $y(0) = -47.00$ м, $\theta_t(0) = \pi/8$ рад, $\delta(0) = 0.07$ рад. Ограничение на управление примем равным $\bar{V} = 0.13$ рад/с.

Рис. 3. Заданный путь и путь робота. Зависимость управления V от времени t.

Заключение

В данной работе:

1. Результирующая система для синтеза стабилизирующего управления получена на основе теории нормальной формы аффинной системы. Приведено и проанализировано уравнение нулевой динамики системы. Показано, что нулевая динамика определяет движение вдоль заданного пути.
2. Введена подвижная система координат, связанная с роботом. Измерение в этой системе координат расстояния до кривой приводит к правилу определения знаков для расстояния.
3. Получено условие применимости локальной замены переменных. Выяснено, что для случая, когда заданный путь – прямая, замена переменных носит глобальный характер.

4. Приведены результаты численного моделирования, подтверждающие работоспособность предложенных алгоритмов.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №12-07-00329 и Программы Президента по поддержке ведущих научных школ, грант НШ-3659.2012.1.

Литература

[1] *THUILOT B., CARIOU C., MARTINET P., BERDUCAT M.* Automatic Guidance of a Farm Tractor Relying on a Single CP-DGPS // Autonomous Robots. — Vol 13, 2002 — P. 53-71.

[2] *FANG H., FAN R., THUILOT B., MARTINET P.* Trajectory tracking control of farm vehicles in presence of sliding // Robotics and Autonomous Systems. — Vol 54, 2006 — № 10. — P. 828-839.

[3] *ГИЛИМЬЯНОВ Р. Ф., ПЕСТЕРЕВ А. В., РАПОПОРТ Л. Б.* Управление движением колесного робота в задаче следования вдоль криволинейного пути // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2008. — Т. 47, № 6. — С. 158–165.

[4] *ISIDORI A.* Nonlinear control systems— London: Springer-Verlag, 1995.— 297 P.

[5] *КРИЩЕНКО А. П.* Преобразование нелинейных систем и стабилизация программных движений // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. — 1988. — № 512. — С. 69–87.